МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

1

«ВИЩА ШКОЛА»

И. И. ЛЯШКО, А. К. БОЯРЧУК, Я. Г. ГАЙ, Г. П. ГОЛОВАЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

1 ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ, ПРОИЗВОДНАЯ, ИНТЕГРАЛ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов университетов и технических высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
«ВИЩА ШКОЛА»
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
КИЕВ — 1974

517.2
М34

УДК 517 (07)

Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Издательское объединение «Вища школа», 1974, 680 с.

Пособие состоит из четырех глав. В начале каждого параграфа помещен соответствующий теоретический материал, а затем подробно рассмотрены примеры и контрпримеры. Книга содержит свыше 1400 примеров и задач, к которым поданы подробные решения.
Пособие предназначено для студентов механико-математических и физических факультетов, а также факультетов кибернетики университетов, физико-математических факультетов педагогических институтов и для студентов технических вузов.
Ил. 158.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *А. С. Макуха*

М $\frac{20203-234}{М211(04)-74}$ БЗ—38—22—73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебным пособием по математическому анализу в его прикладном аспекте для студентов физико-математического профиля и кибернетики университетов, а также для студентов педагогических и технических вузов.

Пособие охватывает разделы анализа, изучаемые на первом курсе: введение в анализ, производная, интеграл и их применение.

В книге помещено свыше 1400 решенных примеров и задач, а также свыше 150 графиков. Материалом для нее послужили в основном задачи и примеры из сборника Б. П. Демидовича; были использованы и другие источники.

При изучении курса математического анализа студенты младших курсов обычно встречаются с трудностями, возникающими из-за отсутствия необходимой практики в решении задач, а позже — в связи с большим объемом информации.

Главная цель этой книги состоит в том, чтобы способствовать глубокому усвоению теории, развитию конкретного математического мышления студентов, привитию им навыков решения примеров и задач, пониманию их физической сущности.

В начале каждого параграфа в конспективной форме даны краткие сведения по теории. Для самостоятельного решения предлагается большое количество примеров и задач.

Эта книга поможет студенту овладеть методикой применения теоретического материала к решению конкретных задач, приобрести творческий подход к их решению.

Пособие будет полезным также преподавателям, которые проводят практические занятия по математическому анализу.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Киевского педагогического института Н. И. Шкилю, доцентам Киевского университета М. И. Ядренко, А. Я. Дороговцеву, В. Н. Нагорному, В. А. Панасовичу за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению содержания книги.

Критические замечания и пожелания просим направлять по адресу: *252054, Киев, 54, Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.*

Авторы

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Вещественные числа

1°. Множества. Математическое понятие множества элементов принимается в качестве интуитивного.

Запись $x \in E$ означает: «x является элементом множества E», а запись $x \notin E$ означает, что «x не является элементом множества E».

Если каждый элемент из F является элементом из E, то пишут $F \subset E$ или $E \supset F$.

2°. Метод математической индукции. Предположим, что установлено следующее: 1) из того, что утверждение Q предполагается правильным для какого-нибудь натурального a, следует его справедливость для натурального числа, следующего за a; 2) существует хотя бы одно натуральное число b, для которого утверждение Q выполняется.

Тогда утверждение Q справедливо для любого натурального числа, большего b или равного ему.

3°. Сечение. Множество A рациональных чисел называется *сечением,* если: 1) множеству A принадлежит хотя бы одно рациональное число, но не всякое рациональное число; 2) для $p \in A$ и $q < p$ (q — рациональное число) имеем $q \in A$; 3) в множестве A нет наибольшего числа.

Из определения сечения следует, что если $p \in A$ и $q \notin A$, то $p < q$. Элементы множества A называют *нижними числами сечения* A, а рациональные числа, не принадлежащие множеству A, называют *верхними числами сечения* A. Множество всех верхних чисел сечения обозначают через A'.

Если в множестве A' есть наименьшее число r, то сечение A называют *рациональным* и говорят, что оно определяет рациональное число r.

Если в множестве A' нет наименьшего числа, то говорят, что *сечение A определяет иррациональное число.*

Множество всех рациональных и иррациональных чисел называют *множеством вещественных или действительных чисел.*

4°. Абсолютная величина. Если x — вещественное число, то *абсолютной величиной* $|x|$ называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для любых вещественных x и y справедливо неравенство

$$|x|-|y| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

5°. Верхняя и нижняя грани. Пусть $X = \{x\}$ — ограниченное множество вещественных чисел. Число $m = \inf\{x\}$ называется *точной нижней гранью* множества X, если: 1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \geqslant m$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x' \in X$, что $x' < m + \varepsilon$. Аналогично число $M = \sup\{x\}$ называется *точной верхней гранью* множества X, если: 1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству $x \leqslant M$; 2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $x'' \in X$, что $x'' > M - \varepsilon$.

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то условимся говорить, что его точная верхняя (нижняя) грань есть $+\infty$ $(-\infty)$: $\sup\{x\} = +\infty$ $(\inf\{x\} = -\infty)$.

6°. Кванторы. В математических теоремах часто используются выражения «Для всех...» и «Существует... такое, что...». Их обозначают соответственно через $\forall$ и $\exists$ и называют кванторами.

1. Найти сумму

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$$

Решение. Применим метод математической индукции. Поскольку $S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$,

$$S_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

$$S_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4},$$

то можно предполагать, что

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

А так как

$$S_{n+1} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}} = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}$$

и равенство (1) справедливо при $n = 1$, то согласно индукции оно остается справедливым при всех n.

2. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

а) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Доказательство. а) При $n = 1$ равенство справедливо. Предполагая справедливость равенства при n, покажем справедливость его и при $n + 1$. Действительно,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

что и требовалось доказать.

б) При $n = 1$ справедливость равенства очевидна. Из предположения справедливости его при n следует

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2.$$

Учитывая равенство

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

получим

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2,$$

т. е. утверждение справедливо и при $n + 1$.

3. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (число сочетаний из n элементов по m), $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, причем полагают, что $0! = 1$.

Доказательство. При $n = 1$ имеем

$$(a+b) = \sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{1-m} b^m = \frac{1!}{0!\,1!} a + \frac{1!}{1!\,0!} b = a + b.$$

Остается показать, что из предположения справедливости утверждения для n следует, что

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m.$$

В самом деле,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^{m+1} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n+1-m} b^m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^{n+1-m} b^m = a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} (C_n^m + C_n^{m-1})\, a^{n+1-m} b^m + b^{n+1}.$$

Используя соотношения

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n\,!}{m\,!\,(n-m)\,!} + \frac{n\,!}{(m-1)\,!\,(n+1-m)\,!} = \frac{(n+1)\,!}{m\,!\,(n+1-m)\,!} =$$

$$= C_{n+1}^m, \quad C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1,$$

окончательно имеем

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m + b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m.$$

4. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2)\,\cdots\,(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, большие -1.

Доказательство. При $n = 1, 2$ неравенство очевидно. Пусть неравенство справедливо при n. Покажем справедливость его при $n+1$. Имеем (при $x_i > -1$)

$$(1+x_1)(1+x_2)\,\cdots\,(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_n) \times$$

$$\times (1+x_{n+1}) = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} +$$

$$+ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, x_{n+1} \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}.$$

Здесь использовано неравенство

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, x_{n+1} \geqslant 0,$$

справедливое при любых x_i одного знака.

5. Доказать, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad (n > 1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

Доказательство. Требуемое неравенство непосредственно вытекает из неравенства примера 4 при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$.

6. Доказать неравенства:

a) $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \tag{1}$$

где $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (среднее арифметическое из неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического из тех же чисел);

б) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$,

где $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (среднее геометрическое из положительных чисел не меньше среднего гармонического из тех же чисел);

в) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$,

где x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные вещественные числа (неравенство Коши — Буняковского).

В каких случаях в указанных неравенствах имеет место знак равенства?

Доказательство. а) При $n = 2$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} \geqslant 0.$$

Предположим, что неравенство а) справедливо. Тогда

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + x_{n+1}}{n+1}.$$

Полагая $x_1 x_2 \ldots x_n = a^{n(n+1)}$, $x_{n+1} = b^{n+1}$ и пользуясь последним неравенством, получим

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}} =$$

$$= \frac{na^{n+1} + b^{n+1}}{n+1} - a^n b = \frac{na^{n+1} + b^{n+1} - na^n b - a^n b}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}[na^n(a-b) - b(a^n - b^n)] = \frac{a-b}{n+1}[na^n - ba^{n-1} -$$

$$- b^2 a^{n-2} - \cdots - b^n] = \frac{a-b}{n+1}[a^n - ba^{n-1} + a^n - b^2 a^{n-2} +$$

$$+ \cdots + a^n - b^n] = \frac{(a-b)^2}{n+1}[a^{n-1} + a^{n-2}(a+b) +$$

$$+ a^{n-3}(a^2 + ab + b^2) + \cdots + (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})] \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство а) доказано. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. В самом деле, из последнего неравенства следует, что равенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}}$$

возможно тогда и только тогда, когда $a=b$, т. е. когда $x_1x_2 \ldots x_n = x_{n+1}^n$. Аналогично можно получить, что $x_1x_2 \ldots x_{n-1} = x_n^{n-1}$. Из этих равенств следует, что $x_n = x_{n+1}$. Таким же образом доказываются равенства $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

б) Пусть $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда, применяя неравенство а) к числам $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ получаем соотношение

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n},$$

из которого следует неравенство б). Знак равенства будет только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

в) Из очевидного неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (x_it + y_i)^2 \geqslant 0$$

получаем неотрицательный при всех значениях t квадратный трехчлен

$$t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0,$$

поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_it + y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. когда существует такое число $\lambda \neq 0$, что $y_i = \lambda x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, или когда все x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ или все y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю.

7. Доказать неравенства:

а) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n > 1;$ б) $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n, \; n > 1;$

в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Доказательство. Неравенства а) и б) являются следствиями неравенства а) предыдущей задачи при $x_k = k$ и $x_k = k^2$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соответственно.

Доказательство неравенства в) проведем методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Предполагая его справедливым при n, покажем, что оно справедливо и при $n+1$. В самом деле,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

8. Доказать неравенства:

$$\text{а) } 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, \qquad (n\geqslant 2);$$

$$\text{б) } n^{n+1}>(n+1)^n, \quad (n\geqslant 3);$$

$$\text{в) } \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k, \qquad (0\leqslant x_k\leqslant\pi; \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

$$\text{г) } (2n)!<2^{2n}(n!)^2, \quad (n>1).$$

Доказательство. а) При $n\geqslant 2$ имеем

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

б) При $n=3$ неравенство очевидно. Предполагая его справедливым при n, докажем его справедливым и при $n+1$, т. е. докажем, что

$$(n+1)^{n+2}>(n+2)^{n+1},$$

если

$$n^{n+1}>(n+1)^n.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}$, имеем

$$(n+1)^{n+2}>\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}.$$

Но так как

$$\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}>(n+2)^{n+1},$$

то требуемое доказано.

в) С помощью метода математической индукции убеждаемся в справедливости неравенства $\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k$, предположив, что исходное неравенство имеет место.

В самом деле, если $0\leqslant x\leqslant\pi$, то

$$\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right|=\left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\cos x_{n+1}+\cos\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\sin x_{n+1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\cdot|\cos x_{n+1}|+\left|\cos\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\sin x_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right|+\sin x_{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k+\sin x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k.$$

г) При $n = 2$ неравенство очевидно. Исходя из справедливости его для n, покажем справедливость для $n + 1$. В самом деле,

$$(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) =$$

$$= 2^{2n+2}[(n+1)!]^2 \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2)}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} < 2^{2n+2}[(n+1)!]^2.$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что

$$\frac{2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2)}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+4n+2} < 1.$$

9. Сечение A, определяющее число $\sqrt[3]{2}$, строится следующим образом: множество A нижних чисел сечения содержит все рациональные числа a такие, что $a^3 < 2$. Тогда множество A' верхних чисел сечения содержит все остальные рациональные числа. Доказать, что в множестве A нет наибольшего, а в множестве A' — наименьшего.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $a \in A$, тогда $a^3 < 2$. Покажем, что можно подобрать такое натуральное число n, что $a + \frac{1}{n} \in A$, т. е.

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

Отсюда следует, что $a^3 + \frac{3a^3}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2$, $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < < 2 - a^3$. Последнее неравенство выполняется тем более, если

$$\frac{3a^2+3a+1}{n} < 2 - a^3,$$

следовательно, искомое n должно удовлетворять неравенству

$$n > \frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}.$$

Аналогично доказывается и второе утверждение.

10. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти точную нижнюю и точную верхнюю грани этого множества.

Решение. Из условия задачи следует, что $0 < \frac{m}{n} < 1$. Пусть m и n $(0 < m < n)$ — любые натуральные числа. Существуют, очевидно, такие натуральные числа m' и n' $(0 < m' < n')$, что $0 < \frac{m'}{n'} < < \frac{m}{n}$ (например, $m' = m$, $n' > n$), т. е. в множестве $\left\{\frac{m}{n}\right\}$ $(0 < m < n)$ нет наименьшего элемента. Это множество не содержит и наибольшего элемента, поскольку для любых m и n $\left(\frac{m}{n} < 1\right)$ и любого натурального $q>0$ существует такое натуральное число p, что $p<n+q-m$ и $p>\frac{mq}{n}$, откуда следует, что $mn+mq<mn+np$, или

$$\frac{m}{n}<\frac{m+p}{n+q}<1.$$

Покажем, что $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\}=0$, а $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\}=1$.

Для произвольного $\varepsilon>0$ и натурального m найдется такое натуральное число $n>m$, что $n>\frac{m}{\varepsilon}$. Тогда $\frac{m}{n}<\varepsilon$. Отсюда и из неравенства $\frac{m}{n}>0$ следует, что $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\}=0$. Аналогично для произвольного $\varepsilon>0$ и натурального p найдется такое натуральное число m, что $m>\frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$. Отсюда $\frac{m}{p+m}>1-\varepsilon$, т. е. при $n=p+m$ имеем $\frac{m}{n}>1-\varepsilon$, а это вместе с неравенством $\frac{m}{n}<1$ означает, что $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\}=1$.

11. Пусть $\{-x\}$ — множество чисел, противоположных числам $x\in\{x\}$. Доказать:

а) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$; б) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

Доказательство. а) Если множество $\{x\}$ ограничено сверху, то множество $\{-x\}$ ограничено снизу, так как из $x\leqslant M$ следует, что $-x\geqslant -M$. Таким образом, из существования $\sup\{x\}$ вытекает существование $\inf\{-x\}$.

Пусть $\sup\{x\}=M^*$, т. е. $x\leqslant M^*$ для любого $x\in\{x\}$ и для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $x'\in\{x\}$, что $M^*-\varepsilon<x'\leqslant M^*$. Но тогда $-x\geqslant -M^*$ и $-M^*\leqslant -x'<-M^*+\varepsilon$, где $-x'\in\{-x\}$, откуда следует, что

$$\inf\{-x\}=-M^*=-\sup\{x\}.$$

б) Как и в случае а), устанавливаем существование $\inf\{x\}$ и $\sup\{-x\}$. Пусть $\inf\{x\}=m^*$, т. е. $x\geqslant m^*$ для любого $x\in\{x\}$ и для всякого $\varepsilon>0$ существует $x'\in\{x\}$, что $m^*\leqslant x'<m^*+\varepsilon$. Тогда $-x\leqslant -m^*$ и $-m^*-\varepsilon<-x'\leqslant -m^*$, $-x'\in\{-x\}$. Таким образом,

$$\sup\{-x\}=-m^*=-\inf\{x\}.$$

12. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм $x+y$, где $x\in\{x\}$ и $y\in\{y\}$. Доказать равенства:

а) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

б) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

Доказательство. Так как из $x\geqslant m$, $x\in\{x\}$ и $y\geqslant m_1$, $y\in\{x\}$ следует, что $x+y\geqslant m+m_1$, $(x+y)\in\{x+y\}$, то существование $\inf\{x\}=m^*$ и $\inf\{y\}=\overset{*}{m}_1$ влечет за собой существование $\inf\{x+y\}$. Ясно, что $x+y\geqslant m^*+\overset{*}{m}_1$. Далее, для произвольного $\varepsilon>0$ существует такой элемент $(x'+y')\in\{x+y\}$, что

$$m^*+\overset{*}{m}_1\leqslant x'+y'<m^*+\overset{*}{m}_1+\varepsilon,$$

так как существуют такие $x' \in \{x\}$ и $y' \in \{y\}$, что $m^* \leqslant x' < m^* + \frac{\varepsilon}{2}$ и $m_1^* \leqslant y' < m_1^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\inf \{x + y\} = x' + y' = \inf \{x\} + \inf \{y\}.$$

Равенство б) доказывается аналогично.

13. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Доказать равенства:

а) $\inf \{xy\} = \inf \{x\} \inf \{y\}$; б) $\sup \{xy\} = \sup \{x\} \sup \{y\}$.

Докажем равенство б). Так как из $x \leqslant M$, $x \in \{x\}$ и $y \leqslant M_1$, $y \in \{y\}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ следует, что $xy \leqslant MM_1$, то из существования $\sup \{x\} = M^*$ и $\sup \{y\} = M_1^*$ вытекает существование $\sup \{xy\}$. Из неравенств $M^* - \varepsilon_1 < x \leqslant M^*$, $M_1^* - \varepsilon_2 < y \leqslant M_1^*$ следует, что $M^*M_1^* - (\varepsilon_1 M_1^* + \varepsilon_2 M^* - \varepsilon_1\varepsilon_2) < xy \leqslant M^*M_1^*$. Так как величина $\varepsilon M_1^* + \varepsilon_2 M^* - \varepsilon_1\varepsilon_2$ может быть сколь угодно малой, то $\sup \{xy\} = M^*M_1^* = \sup \{x\} \sup \{y\}$.

Равенство а) доказывается аналогично.

14. Доказать неравенства:

а) $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$;

б) $|x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$.

Доказательство. Неравенство а) эквивалентно системе неравенств $-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$.

Известно, что $|x + y| \geqslant |x| - |y|$ и $|-y| = |y|$. Заменяя y на $-y$, получаем $|x - y| \geqslant |x| - |-y| = |x| - |y|$. Далее, $|x - y| = |y - x| \geqslant |y| - |x|$, откуда $-|x - y| \leqslant |x| - |y|$, т. е. оба неравенства системы доказаны.

Неравенство б) доказывается аналогично.

15. Показать, что множество $X = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\right\}$, где n принимает все целые положительные значения, имеет предельные точки 0 и 1 и что других предельных точек у него нет.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Из неравенств

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1,$$

справедливых для всех $n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$, вытекает, что точки 0 и 1 — предельные.

Так как при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ интервалы $(0, \varepsilon)$ и $(1 - \varepsilon, 1)$ содержат все элементы множества X с номерами $n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$, то отрезок $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ содержит лишь конечное число элементов множества X. Поэтому никакая точка из интервала $(0, 1)$ не может быть предельной точкой множества X.

§ 2. Теория последовательностей

1°. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $E > 0$ можно указать такое число $N = N(E)$, что при $n > N$ все элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| > E$.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ элементы α_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$.

2°. Предел последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число a, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое,что при всех $n > N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, что символически записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

3°. Признаки существования предела.

1. Если $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, $\forall n > n_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

3. Критерий Коши. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ при любом $p > 0$.

4°. Предельный переход в равенствах и неравенствах. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся. Тогда:

1) если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

5°. Число e. Последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ имеет конечный предел, который называют *числом e*:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,\ldots$$

6°. Бесконечный предел. Символическая запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ обозначает, что какое бы ни было $E > 0$, существует такое число $N = N(E)$, что $|x_n| > E$ при всех $n > N$.

7°. **Предельные точки последовательности.** Точка a бесконечной прямой называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к a.

У всякой ограниченной последовательности существует хотя бы одна предельная точка.

Наибольшая предельная точка $\bar{x}$ ограниченной последовательности $\{x_n\}$ называется *верхним пределом* этой последовательности

$$\bar{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$

а наименьшая ее предельная точка $\underline{x}$ — *нижним пределом*

$$\underline{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы ее верхний и нижний пределы $\bar{x}$ и $\underline{x}$ совпадали.

Если последовательность не ограничена сверху (снизу), то под наибольшей (наименьшей) ее предельной точкой будем понимать символ $+\infty$ $(-\infty)$.

16. Пусть $x_n = \frac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ такое число $N = N(\varepsilon)$, что

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N(\varepsilon).$$

Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

Доказательство. По определению предела для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

при $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
N	9	99	999	9999

17. Доказать, что $x_n (n = 1, 2, \dots)$ есть бесконечно малая (т. е. имеет предел, равный 0), указав для всякого $\varepsilon > 0$ такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если:

а) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$;

в) $x_n = \frac{1}{n!}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,001	0,0001	. . .
N				

Доказательство. а) Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ при } n > \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon).$$

б) Аналогично $\left|\frac{2n}{n^3+1}\right| < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon$ при $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} = N(\varepsilon)$.

в) Имеем

$$\left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство, получаем

$$n > 1 + \lg\frac{1}{\varepsilon} \cdot \lg^{-1} 2 = N(\varepsilon).$$

г) $|(-1)^n \cdot 0{,}999^n| = 0{,}999^n < \varepsilon$. Отсюда $n \lg 0{,}999 < \lg\varepsilon$ и, так как $\lg 0{,}999 < 0$, то

$$n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg 0{,}999} \approx 2330 \lg\frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon).$$

Заполнить таблицу предлагаем читателю.

18. Доказать, что последовательности:

а) $x_n = (-1)^n \cdot n$; б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; в) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n > 2)$ имеют бесконечный предел при $n \to \infty$ (т. е. являются бесконечно большими), определив для всякого E такое число $N = N(E)$, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1000	10 000
N				

Доказательство. а) Неравенство $|(-1)^n n| = n > E$ справедливо при $n > E = N(E)$, где $E > 0$ — произвольное.

б) Аналогично, решая неравенство $2^{\sqrt{n}} > E$, получаем

$$n > (\lg E)^2 \cdot (\lg 2)^{-2} = N(\varepsilon).$$

в) Решая неравенство $|\lg(\lg n)| = \lg(\lg n) > E \quad (n > 10)$, получаем $n > 10^{10^E} = N(E)$.

Заполнить таблицу предлагаем читателю.

19. Показать, что $x_n = n^{(-1)^n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \to \infty$.

Решение. Пусть $E > 0$ — произвольное число. Тогда при $n = 2k$ $(k = 1, 2, \dots)$

$$|x_{2k}| = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k > E, \text{ если } k > \frac{E}{2},$$

т. е. x_n не ограничена. Однако при $E > 1$ и $n = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \dots)$

$$|x_{2k-1}| = (2k-1)^{(-1)^{2k-1}} = \frac{1}{2k-1} < 1 \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

и не может превосходить число $E > 1$, т. е. не является бесконечно большой.

Предполагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, найти следующие пределы:

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} \qquad (|a| < 1, \quad |b| < 1).$

Решение. Находя суммы в числителе и знаменателе и используя теоремы о пределах, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}{\dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}} =$$

$$= \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1}}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} b^{n+1}} = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

Здесь воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$. Для доказательства последнего заметим, что из неравенства

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \frac{1 - |q|}{|q|}\right)^n = 1 +$$

$$+ n\frac{1 - |q|}{|q|} + \cdots + \left(\frac{1 - |q|}{|q|}\right)^n > n\frac{1 - |q|}{|q|}$$

следует неравенство $|q|^n = |q^n| < \dfrac{|q|}{1 - |q|} \cdot \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, справедливое при $n > |q|(1 - |q|)^{-1}\varepsilon^{-1}$ и для любого $\varepsilon > 0$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n - 1}{2^n}\right).$

Решение. Положим $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$

Тогда

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

и

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}} - 2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 3.$$

Здесь воспользовались тем, что $\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\dots+1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} < \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$, если $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, т. е. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ \dots\ \sqrt[2^n]{2})$.

Решение. Так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ \ldots\ \sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=$
$=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$ и при $n>2$ $2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left[1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right]^{2^n}>\left[1+\right.$
$\left.+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right]^n=1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)+\cdots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)$, т. е. $0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\frac{2}{n}$, то $2^{\frac{1}{2^n}}\to 1$ при $n\to\infty$ и предел нашего выражения равен 2.

Доказать следующие равенства:

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$

Доказательство. Равенство следует из неравенства

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\ \ldots\ \frac{2}{n}\leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

и из того, что $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ при $n\to\infty$ (см. пример 20).

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1).$

Доказательство. Пусть m — целое и $m\geqslant k$. Тогда

$$0<\frac{n^k}{a^n}\leqslant\frac{n^m}{a^n}=\left[\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right]^m=\left[\frac{n}{b^n}\right]^m,\text{ где } b=\sqrt[m]{a}>1.$$

Но

$$0<\frac{n}{b^n}=\frac{n}{[1+(b-1)]^n}=$$

$$=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\cdots+(b-1)^n}<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\to 0$$

при $n\to\infty$; тогда, применяя теорему о предельном переходе в произведении, получаем, что $\left(\frac{n}{b^n}\right)^m\to 0$ при $n\to\infty$, откуда следует требуемое.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

Доказательство. Равенство нулю предела следует из очевидного неравенства

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\ \ldots\ \frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\ \ldots\ \frac{|a|}{n}<$$

$$<\frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}<\varepsilon,$$

справедливого при любом $\varepsilon > 0$ и $m+1 > |a|$, если n достаточно велико.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, если $|q| < 1$.

Доказательство следует из того, что

$$|nq^n| = \frac{n}{\left|\frac{1}{q}\right|^n} = \frac{n}{b^n} \qquad (b > 1) \text{ (см. пример 25).}$$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Доказательство. При $a = 1$ равенство очевидно. Пусть $a > 1$. Тогда $\sqrt[n]{a} > 1$ и

$$a = [1 + (\sqrt[n]{a} - 1)]^n = 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) + \cdots + (\sqrt[n]{a} - 1)^n >$$
$$> n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

откуда получаем, что $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{a}{\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, т. е. $\sqrt[n]{a} \to 1$ при $n \to \infty$.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и, по доказанному, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$ при $n \to \infty$. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \qquad (a > 1)$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$ $(b > 1)$ (см. решение примера 25), то $\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$ при достаточно большом n. Положим $b = a^{\varepsilon}$, где $a > 1$, а $\varepsilon > 0$ — произвольное.
Тогда $\frac{1}{a^{\varepsilon n}} < \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1$ или $1 < n < a^{\varepsilon n}$.

Логарифмируя последнее неравенство, имеем

$$0 < \log_a n < \varepsilon n,$$

откуда

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

при достаточно большом n. Из последнего неравенства и следует утверждение.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

следует, что

$|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$ и при всех $n > 1 + 2\varepsilon^{-2}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Применим метод индукции. При $n = 1$ неравенство справедливо. Далее, если оно справедливо при n, то для $n + 1$ имеем

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Последнее неравенство справедливо, так как

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \times \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Теперь существование и равенство нулю предела вытекает из неравенства

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > \frac{3}{\varepsilon}$.

32. Доказать, что последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому они имеют общий предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Доказательство. Согласно неравенству примера 5 имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} >$$

$$> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = 1,$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n} <$$

$$< \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1,$$

т. е. $x_n \nearrow$, а $y_n \searrow$. Далее, $x_n < y_n$ и $0 < y_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n} <$
$< \frac{e}{n} \to 0$ при $n\to\infty$, откуда $(y_n - x_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

33. Доказать, что

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

Доказательство. Согласно примеру 32, имеем $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$.
Тогда $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times$
$\times \frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n} < \frac{1}{1000}$ при $n > 3000$.

34. Пусть p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Доказательство. Пусть $\{n_k\}$ — произвольная последовательность целых чисел, стремящаяся к $+\infty$. Тогда из условия

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon \text{ при } n > N(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

следует

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon \text{ при } n_k > N(\varepsilon),$$

т. е.

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Если последовательность произвольных чисел $\{p_k\}$ $(p_k > 1)$ стремится к $+\infty$, то существует такая последовательность целых чисел $\{n_k\}$, что $n_k \leqslant p_k < n_k + 1$ и $n_k \to +\infty$.
Так как левое и правое выражение очевидного неравенства

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\dfrac{1}{n_k+1}} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

стремятся к e, то $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_k}\right)^{p_k} = e$.

Если произвольная последовательность чисел $\{q_k\}$ $(-q_k > 1)$ стремится к $-\infty$, то, полагая $q_k = -\alpha_k$, получаем, что

$$\left(1+\frac{1}{q_k}\right)^{q_k} = \left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-\alpha_k} = \left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)^{\alpha_k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right) \to e$$

при $k\to\infty$.

35. Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!},$$

где $0 < \theta_n < 1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

Решение. Переходя к пределу в неравенстве

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} +$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!} \times$$
$$\times \frac{1}{n^n} > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

при $n \to \infty$ получим неравенство

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k,$$

справедливое при любом k. Так как в множестве $\{y_k\}$ нет наибольшего, то при $k = n$

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e,$$

т. е. знак равенства невозможен. С другой стороны,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Таким образом, $x_n < y_n < e$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$y_{m+n} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n\cdot n!}$$

при фиксированном n и $m \to \infty$, получаем

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Обозначим $0 < \theta_n = \dfrac{e - y_n}{\dfrac{1}{n\cdot n!}} < 1$. Отсюда получаем требуемое.

Неравенство

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n\cdot n!} < 10^{-5}$$

справедливо при $n \geqslant 8$. Отсюда

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$$

36. Доказать, что число e иррационально.

Доказательство. Предположим, что e — рациональное число.

Тогда $e = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Для числа n справедливо равенство

$$e = \frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}, \qquad 0 < \theta_n < 1.$$

Умножая это равенство на $n!$, получим

$$m(n-1)! - n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{\theta_n}{n},$$

т. е. слева — целое число, а справа — дробь. Полученное противоречие и доказывает иррациональность числа e.

37. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Доказательство. Левая часть неравенства справедлива при $n = 1$; далее, по индукции

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) =$$

$$= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

так как неравенство $(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n+1}{e}\right)^{-n-1} > 1$ эквивалентно неравенству $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ (справедливость последнего следует из примера 32).

Правая часть неравенства следует из того, что (см. пример 6)

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e\left(\frac{n}{2}\right)^n} = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

38. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, где n — любое натуральное число;

б) $1 + \alpha < e^\alpha$, где α — вещественное число, отличное от нуля.

Доказательство. а) Логарифмируя неравенство (см. пример 32)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

получаем

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

откуда следует неравенство а).

б) Покажем сначала, что

$$\frac{r}{1+r}<\ln(1+r)<r, \tag{1}$$

где r — любое рациональное число, отличное от нуля и большее -1. Пусть $r=\frac{m}{n}>0$. Тогда, в силу неравенства а), получаем

$$\ln(1+r)=\ln\left(1+\frac{m}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\,\frac{n+2}{n+1}\,\ldots\cdot\frac{n+m}{n+m-1}\right)=$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+m-1}\right)<$$

$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+m-1}<\frac{m}{n}=r,$$

$$\ln(1+r)>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}>\frac{m}{n+m}=\frac{\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}=$$

$$=\frac{r}{1+r},$$

откуда следует неравенство (1) для $r>0$.

Если же $-1<r_1<0$, то, полагая $-r_1=r$ $(0<r<1)$, имеем

$$-\ln(1-r)=\ln\frac{1}{1-r}=\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right),$$

откуда

$$r<\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right)<\frac{r}{1-r}$$

или

$$\frac{r_1}{1+r_1}=\frac{-r}{1-r}<-\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right)=\ln(1-r)=$$

$$=\ln(1+r_1)<-r=r_1,$$

$$\frac{r_1}{1+r_1}<\ln(1+r_1)<r_1.$$

Пусть α — произвольное вещественное число, большее -1, отличное от нуля. Тогда существует такое рациональное число r, что

$$\frac{r}{2}+\frac{r}{2+r}<\alpha<r$$

(например, любое рациональное число r, содержащееся между вещественными числами α и $\sqrt{\alpha^2+4}+\alpha-2$). Тогда

$$\ln(1+\alpha)<\ln(1+r)=\ln\left(\frac{r+2}{2}\cdot\frac{2+2r}{2+r}\right)=$$

$$=\ln\left(1+\frac{r}{2+r}\right)+\ln\left(1+\frac{r}{2}\right)<\frac{r}{2}+\frac{r}{2+r}<\alpha.$$

Следовательно, $\ln(1+\alpha)<\alpha\ (\alpha>-1,\ \alpha\neq 0)$ и $1+\alpha<e^{\alpha}\ (\alpha>-1,\ \alpha\neq 0)$. Если $\alpha<-1$, то неравенство $1+\alpha<e^{\alpha}$ очевидно, поэтому неравенство $1+\alpha<e^{\alpha}$ справедливо при всех $\alpha\neq 0$.

39. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a \qquad (a>0),$$

где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e=2{,}718\ldots$

Доказательство. Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ находим, что $1<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<1+\frac{1}{n-1}\ (n>1)$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1.$$

При $a>1$ имеем $y_n=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right)=z_n\left(e^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\ln a$, где $z_n=\frac{n}{\ln a}\to+\infty$ при $n\to\infty$. Обозначим $\alpha_n=[z_n]$ (целая часть), так что $\alpha_n\leqslant z_n<\alpha_n+1$ и $\frac{1}{\alpha_n+1}<\frac{1}{z_n}\leqslant\frac{1}{\alpha_n}$. Отсюда получаем неравенства

$$\ln a\cdot\alpha_n\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right)<y_n<\ln a\cdot(\alpha_n+1)\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right),$$

$$-\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right)+\ln a\cdot(\alpha_n+1)\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right)<$$

$$<y_n<\ln a\cdot\alpha_n\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right).$$

Так как последовательность $\left\{\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right\}$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $\left\{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right\}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1.$$

Применяя утверждение 2°, получаем

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\left[\ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right]=\ln a \quad (a>1).$$

Если же $0 < a < 1$, то $y_n = n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = n\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} - 1\right) = \frac{n(1 - b^{\frac{1}{n}})}{b^{\frac{1}{n}}} =$
$= -\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \cdot n(b^{\frac{1}{n}} - 1)$, где $b = \frac{1}{a} > 1$. А так как $b^{\frac{1}{n}} \to 1$ и $n(b^{\frac{1}{n}} - 1) \to \ln b$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\ln b = -\ln\frac{1}{a} = \ln a \qquad (0 < a < 1).$$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

40. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$

где p_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — целые неотрицательные числа, не превосходящие 9, начиная с p_1.

Доказательство. Последовательность неубывающая, так как

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geqslant 0, \text{ т. е. } x_{n+1} \geqslant x_n,$$

и ограничена сверху

$$x_n < p_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = p_0 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = p_0 + 1,$$

а поэтому имеет конечный предел.

41. $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$

Доказательство. Имеем $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$, следовательно, последовательность возрастает.

Ограниченность следует из неравенств

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) <$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} =$$
$$= 1,$$
$$x_n < e.$$

Таким образом, последовательность, согласно утверждению 2°, сходится.

42. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},\ \ldots,\ x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}.$

Доказательство. Заметим, что $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, и последовательность является возрастающей. Для доказательства существования предела остается показать ограниченность последовательности. Имеем $x_1<\sqrt{2}+1$. Тогда, если $x_n<\sqrt{2}+1$, то

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+\sqrt{2}+1}<\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$$

и ограниченность, согласно индукции, доказана.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

43. $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\dots+\frac{\sin n}{2^n}$.

Доказательство. Пусть задано $\forall\,\varepsilon>0$. Тогда $|x_{n+p}-x_n|=$ $=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\dots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leqslant\frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}}+$ $+\frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}}+\dots+\frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\dots+\frac{1}{2^{n+p}}+$ $+\dots=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ при $n>-\log_2\varepsilon$ и всех натуральных p.

44. $x_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\dots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon>0$ и при всех натуральных p имеем

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots+$$

$$+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\dots+$$

$$+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<$$

$$<\varepsilon,\ \forall\,n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N(\varepsilon).$$

45. $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное. Тогда $|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+$ $+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-$ $-\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n>\frac{1}{\varepsilon}$ и при всех натуральных p.

46. Говорят, что последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) имеет ограниченное изменение, если существует такое число c, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

Доказательство. Из условия вытекает, что последовательность

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится (как ограниченная и монотонно возрастающая). Далее, так как $\{y_n\}$ — сходящаяся последовательность, то

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| = |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, $\forall\, p > 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Очевидно, что последовательность

$$x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится; однако она не имеет ограниченного изменения, так как при любом $A > 0$ неравенство (см. пример 7)

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}| = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}\right) > \ln\sqrt{2n+1} > A$$

справедливо при $n > \frac{1}{2}(e^{2A} - 1)$.

47. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательностей:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$;

б) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное число из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

а) Поскольку

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

а при $p=n$

$$|x_{n+p}-x_n|>\frac{1}{2}>\varepsilon$$

для всех n, то последовательность расходится.

б) Расходимость последовательности следует из того, что

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{\ln(n+1)}+\frac{1}{\ln(n+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(n+p)}>\frac{p}{\ln(n+p)}>$$
$$>\frac{p}{n+p}=\frac{1}{2}\text{ при }p=n.$$

48. Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

Доказательство. Для определенности будем считать, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и $\{x_{n_k}\}$ — ее сходящаяся подпоследовательность, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. Тогда $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, K=K(\varepsilon)$ такое, что $\forall\,k>K$ в силу монотонности имеем

$$a-\varepsilon<x_{n_k}\leqslant x_{n_k+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{n_{k+1}}\leqslant x_{n_{k+1}+1}\leqslant\cdots<a+\varepsilon,$$

отсюда $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ при $\forall\,n>n_k$, где $k>K(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

49. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится, т. е. $|x_n-a|<\varepsilon$ при $n>N(\varepsilon)$. Тогда (см. пример 14, а)) $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$ при $n>$ $>N(\varepsilon)$. Отсюда и следует утверждение.

50. Если $x_n\to a$, то что можно сказать о пределе $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$?

Решение. Если $a\neq0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{a}{a}=1$. Пусть $a=0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$. Покажем, что $|l|\leqslant1$. Предположим, что $|l|>1$, и выберем такое число $\varepsilon>0$, что $|l|-\varepsilon>1$. Так как $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|>|l|-\varepsilon>1$ при $n>N(\varepsilon)$, то $|x_{n+1}|>|x_n|$ при $n>N(\varepsilon)$, т. е. последовательность $\{|x_n|\}$, а вместе с ней и $\{x_n\}$, не может стремиться к нулю. Противоречие доказывает наше утверждение.

Покажем на примерах, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ может существовать и принадлежать отрезку $[1,-1]$:

1) $x_n=\dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$;

2) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=-1$;

3) $x_n=nq^n\ (|q|<1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=q$.

Однако предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ может вовсе не существовать, например, для последовательности $x_n=\frac{1}{n}(q+(-1)^n)$ $(|q|\neq 1)$, а при $|q|=1$ сама последовательность $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ не определена.

51. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает либо своей точной верхней грани, либо своей точной нижней грани, либо той и другой. Привести примеры последовательностей всех трех типов.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тогда $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ при $n>N(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Если $x_k\leqslant a-\varepsilon$, $k=1, 2, \ldots, N$, то $x_m=\min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ будет точной нижней гранью. Если $x_k\geqslant a+\varepsilon$, $k=1, 2, \ldots, N$, то $x_l=\max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ будет точной верхней гранью. Если среди элементов $x_1, x_2, \ldots, x_N$ существуют числа, меньшие, чем $a-\varepsilon$, и большие, чем $a+\varepsilon$, то последовательность $\{x_n\}$ имеет наибольший и наименьший элементы, которые будут точной верхней и точной нижней гранями.

Приведем примеры последовательностей всех трех типов.

1) $x_n=\frac{n-1}{n}$, $\quad x_1=0=\inf\{x_n\}$;

2) $x_n=\frac{1}{n}$, $\quad x_1=1=\sup\{x_n\}$;

3) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $\quad x_1=-1=\inf\{x_n\}$, $\quad x_2=\frac{1}{2}=\sup\{x_n\}$.

52. Доказать, что числовая последовательность x_n $(n=1, 2, \ldots)$, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей точной нижней грани.

Доказательство. Пусть $x_n\to+\infty$ при $n\to\infty$ и x_l — любой элемент последовательности.

Возьмем любое число $A>x_l$. Так как $x_n\to+\infty$, то существует такое число $N(A)$, что при $n>N(A)$ справедливо неравенство $x_n>A$.

Обозначим $x_{n_0}=\min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Тогда очевидно, что $x_{n_0}=\inf\{x_n\}$.

Найти наибольший член последовательности x_n $(n=1, 2, \ldots)$, если:

53. $x_n=\frac{n^2}{2^n}$.

Решение. Условимся наибольший член последовательности $\{x_n\}$ обозначать символом $\max x_n$. Из неравенства

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2<1,$$

справедливого при $n > 2$, вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Поэтому наибольший член содержится среди элементов x_1, x_2, x_3. Находим, что

$$\max x_n = x_3 = \frac{9}{8}.$$

54. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$.

Решение. Имеем $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-10)^2+20\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\dfrac{(\sqrt{n}-10)^2}{\sqrt{n}}+20}$.

Отсюда $x_n \leqslant \dfrac{1}{20}$, причем знак равенства достигается при $n = 100$. Следовательно,

$$\max x_n = x_{100} = \frac{1}{20}.$$

55. $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

Решение. Так как $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1000}{n+1}$, то при $n > 999$ последовательность монотонно убывает, а при $n < 999$ — возрастает. Следовательно,

$$\max x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2{,}49 \cdot 10^{452}.$$

Для последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

56. $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

Решение. Последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому сходится. Наименьший член $x_1 = 0 = \inf\{x_n\}$. Верхний и нижний пределы совпадают и равны $\sup\{x_n\}$, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

57. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

Решение. Так как все элементы последовательности $\{x_n\}$ содержатся в последовательностях $x_{2n-1} = 2 + \dfrac{3}{2n-1}$, $x_{2n} = -2 - \dfrac{3}{2n}$ и $x_{2n} < x_{2n-1}$, причем последовательность $\{x_{2n-1}\}$ монотонно убывает, а последовательность $\{x_{2n}\}$ возрастает, то

$$x_1 = \sup\{x_n\} = 5, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 2,$$

$$x_2 = \inf\{x_n\} = -\frac{7}{2}, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = -2.$$

58. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

Решение. Имеем $x_{4n-2} < x_{2n-1} < x_{4n}$, причем $\{x_{4n-2}\}$ убывает, а $\{x_{4n}\}$ возрастает. Поэтому

$$\inf\{x_n\} = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{4n-2}{4n-1}\right) = 0,$$

$$\sup\{x_n\} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4n}{4n+1}\right) = 2.$$

59. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Решение. Так как

$$x_{4n-3} = 6,\ x_{4n-2} = -4,\ x_{4n-1} = 0,\ x_{4n} = 2 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

то

$$\inf\{x_n\} = \varliminf_{n\to\infty} x_n = -4, \quad \sup\{x_n\} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 6.$$

Найти $\varliminf_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$ если:

60. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

Решение. Так как $x_{3n-2} < x_{3n-1} < x_{3n}$ и последовательности $\{x_{3n-2}\}$, $\{x_{3n-1}\}$ и $\{x_{3n}\}$ сходятся, то

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(3n-2)^2}{2[1+(3n-2)^2]} = -\frac{1}{2},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)^2}{1+(3n)^2} = 1.$$

61. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$.

Решение. Выделяя из всех членов данной последовательности восемь подпоследовательностей

$$\{x_{8n-j}\} \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 7),$$

легко убедиться, что наименьший и наибольший частичный пределы имеют соответственно подпоследовательности

$$x_{8n-3} = -\left(1 + \frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x_{8n-6} = \left(1 + \frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1.$$

Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-3} = \lim_{n\to\infty}\left[-\left(1 + \frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -e - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-6} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1\right] = e + 1.$$

62. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$.

Решение. Имеем $x_{4n} < x_{4n-3} < x_{4n-1} < x_{4n-2}$, откуда $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{4n-1} = 1$.

Найти частичные пределы:

63. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$.

Решение. Из членов данной последовательности составим две сходящиеся подпоследовательности: $\bar{x}_n = \frac{1}{2^n}$ и $\bar{\bar{x}}_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Их пределы $\lim_{n\to\infty}\bar{x}_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\bar{\bar{x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n} = 1$ будут частичными пределами.

Так как все другие сходящиеся подпоследовательности необходимо входят в состав этих двух, то других частичных пределов нет.

64. $1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \quad 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$.

Решение. Члены данной последовательности составляют сходящиеся подпоследовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $x_{k_n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+n}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$, которые имеют соответственно пределы 0, $\frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

65. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$.

Решение. Очевидно, что все рациональные числа r $(0 < r < 1)$ являются членами данной последовательности. Пусть α — любое вещественное число, такое, что $0 \leqslant \alpha < 1$; тогда при достаточно большом натуральном m неравенство

$$\alpha + \frac{1}{n+m} < 1$$

справедливо при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Для каждого натурального числа n среди членов данной последовательности найдется такое рациональное число r_n, что

$$\alpha < r_n < \alpha + \frac{1}{n+m}.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$, т. е. α — частичный предел. Аналогично рассматривается случай, если $0 < \alpha \leqslant 1$.

66. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p.$$

Решение. Обозначим $x_{k_n} = a_k + \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, p$; $n = 1, 2, \ldots$. Так как последовательности x_{k_n} сходятся к числам a_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$, то искомой последовательностью может быть, например, последовательность

$$a_1 + 1,\ a_2 + 1,\ \ldots,\ a_p + 1,\ a_1 + \frac{1}{2},\ a_2 + \frac{1}{2},\ \ldots,\ a_p + \frac{1}{2},\ \ldots,$$

$$a_1 + \frac{1}{n},\ a_2 + \frac{1}{n},\ \ldots,\ a_p + \frac{1}{n},\ \ldots,$$

составленная из членов последовательностей $\{x_{k_n}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

67. Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной последовательности

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет данная последовательность?

Решение. Из членов последовательностей $x_n = a_n$, $x_{k_n} = a_k + \frac{1}{n+k}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots)$ составим последовательность

$$a_1,\ a_1 + \frac{1}{2},\ a_2,\ a_1 + \frac{1}{3},\ a_2 + \frac{1}{3},\ a_3,\ a_1 + \frac{1}{4},\ a_2 + \frac{1}{4},\ a_3 + \frac{1}{4},\ a_4,\ \ldots,$$

которая имеет своими частичными пределами: 1) пределы последовательностей $\{x_{k_n}\}$, т. е. члены последовательности $\{a_n\}$ и 2) частичные пределы последовательности $\{a_n\}$.

68. Построить пример последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

в) имеющей бесконечное множество частичных пределов;

г) имеющей в качестве своего частичного предела каждое вещественное число.

Решение. а) Например, $x_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

б) Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, стремящаяся к конечному пределу a, $\{y_n\}$ — бесконечно большая последовательность; тогда последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ является расходящейся и имеет единственный конечный частичный предел a.

в) Примеры 65 и 66.

г) Построим последовательность, содержащую все рациональные числа $\pm\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа:

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{1},$$

$$-\frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{n},\ -\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ -\frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ -\frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n-1},$$

$$-\frac{n}{n-1},\ \ldots,\ \frac{n}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{n}{1},\ -\frac{n}{1},\ \ldots.$$

Тот факт, что любое вещественное число является частичным пределом, доказывается аналогично решению примера 65.

69. Доказать, что последовательности x_n и $y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2,\ldots)$ имеют одни и те же частичные пределы.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ (см. пример 30), то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p_n]{p_n} = 1$, где $\{p_n\}$ — произвольная подпоследовательность ряда натуральных чисел.

Пусть α — частичный предел последовательности $\{x_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \alpha$. Тогда, применяя теорему о предельном переходе в произведении, находим

$$\lim_{n\to\infty} y_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_{p_n}\sqrt[p_n]{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_{p_n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[p_n]{p_n} = \alpha,$$

т. е. α — частичный предел последовательности $\{y_n\}$.

70. Пусть последовательность x_n $(n = 1, 2,\ldots)$ сходится, а последовательность y_n $(n = 1, 2,\ldots)$ расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$?

Привести соответствующие примеры (для случая б)).

Решение. а) Последовательность $\{x_n + y_n\}$ расходится. Если бы она сходилась, то сходилась бы и разность последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x_n + y_n\}$. Но это невозможно в силу того, что $\{x_n - (x_n + y_n)\} = -\{y_n\}$, а $\{y_n\}$ — расходится.

б) Последовательность может как сходиться, так и расходиться, например:

1) последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ сходится, а последовательность $y_n = (-1)^n$ расходится, однако их произведение $x_n y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ образует сходящуюся последовательность;

2) последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$ сходится, а $y_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ — расходится; их произведение $x_n y_n = \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}$ также расходится.

71. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Привести пример, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

Доказательство. а) Заметим сначала, что если из последовательности $\{x_n\}$ выделить некоторую подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$. Так как нижний предел последовательности является ее предельной точкой, то

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}), \quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}.$$

В силу нашего замечания имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} + \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Далее, так как $\{x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\}$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $\{x_{r_n} + y_{r_n}\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}).$$

А так как, кроме того, последовательность $\{x_{m_{r_n}}\}$ сходится, то и последовательность $\{y_{m_{r_n}}\}$ также сходится, так что

$$\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$$

и полученное неравенство можно переписать в виде

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}) = \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n).$$

Левая часть неравенства а) доказана.

Учитывая это и тот факт, что

$$\varliminf_{n\to\infty} (-y_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

получаем

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) + \underline{\lim}_{n\to\infty} (-y_n) \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} [(x_n + y_n) + (-y_n)] = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Отсюда вытекает правая часть неравенства а).

Неравенство б) доказывается аналогично.

Построим пример, когда в данных соотношениях имеют место строгие неравенства. Пусть

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2}, \quad y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2 \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

и

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = -1, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -1, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 1.$$

72. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Доказать:

а) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

б) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

Привести пример, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

Доказательство. Докажем случай а) (случай б) доказывается аналогично).

Если $x_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ или $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, то соотношение а) очевидно. Остается рассмотреть случай, когда $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n > 0$. Тогда $x_n > 0$, начиная с некоторого номера.

Пользуясь замечанием примера 71 и обозначениями

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} y_{r_n}), \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}},$$

имеем

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{r_n} \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{r_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Так как $\{x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}\}$ — подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_{r_n} y_{r_n}\}$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}).$$

А так как последовательность $\{x_{m_{r_n}}\}$ сходится к отличному от нуля пределу, то подпоследовательность $\{y_{m_{r_n}}\}$ также сходится, т. е. $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$.

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}) = \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n).$$

Таким образом, левая часть неравенства а) доказана. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то правая часть неравенства а) очевидна, ибо в таком случае $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, а поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$. Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n > 0$. Тогда, согласно доказанному и тому, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n}$, получаем неравенство

$$\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{y_n} (x_n y_n)\right] = \varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

из которого следует правая часть неравенства а).

Приведем пример, когда в данных соотношениях имеют место строгие неравенства. Пусть

$$x_n = 2 + (-1)^n, \quad y_n = 2 - (-1)^n + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Тогда

$$x_n y_n = 3 + \frac{2 + (-1)^n}{2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

и

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 3, \quad \varliminf_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \frac{7}{2},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \frac{3}{2}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) = \frac{9}{2}.$$

73. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, имеем:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. а) Имеем (см. пример 71)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Так как $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$, то в предыдущих соотношениях возможен только знак равенства.

Аналогично, пользуясь неравенствами примера 72 б), доказываем равенство б).

74. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), какова бы ни была последовательность y_n ($n = 1, 2, \ldots$) имеет место по меньшей мере одно из неравенств:

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

или

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n y_n) = \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \quad (x_n \geqslant 0)$,

то последовательность x_n — сходящаяся.

Доказательство. Пусть условие а) выполнено. Так как $\{y_n\}$ любая последовательность, то пусть $y_n = -x_n$. Тогда из условия а) следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n - x_n) = 0,$$

откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует. При выполнении условия б) полагаем $y_n = -1$. Тогда из б) вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, и мы снова убеждаемся в существовании предела последовательности $\{x_n\}$.

75. Доказать, что если $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = 1,$$

то последовательность $\{x_n\}$ — сходящаяся.

Доказательство. Из условия примера и того, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n}$, вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, т. е. $\{x_n\}$ — сходящаяся.

76. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) ограничена и

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижними и верхними пределами:

$$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \text{ и } L = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n,$$

т. е. любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

Доказательство. Покажем, что любая точка a, принадлежащая интервалу (l, L), является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, т. е. покажем, что любая ε-окрестность точки a содержит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — такое произвольное фиксированное число, что ε-окрестности точек l, a и L не имеют общих точек. Согласно условию, существует такое число $N(\varepsilon)$, что $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$.

Так как l — частичный предел, то в ε-окрестности точки l найдется элемент x_{p_1} с индексом p_1 большим, чем $N(\varepsilon)$. По той же причине в ε-окрестности точки L существует элемент x_{q_1} с индексом q_1 большим, чем p_1. А так как расстояние между соседними элементами при $n > N(\varepsilon)$ меньше 2ε, то среди натуральных чисел n, для которых $p_1 < n < q_1$, существует хотя бы одно такое число r_1, что элемент x_{r_1} принадлежит ε-окрестности точки a.

Далее, существует элемент x_{p_2} с индексом p_2 большим, чем q_1, и такой, что x_{p_2} принадлежит ε-окрестности точки l. Следовательно, среди номеров n, для которых $q_1 < n < q_2$, найдется такой номер r_2, что элемент x_{r_2} принадлежит ε-окрестности точки a. Продолжая этот процесс до бесконечности, убеждаемся в существовании бесконечного числа элементов последовательности $\{x_{r_n}\}$, принадлежащих ε-окрестности точки a. Следовательно, a — предельная точка, а так как a — произвольная точка интервала (l, L), то требуемое утверждение доказано.

77. Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \qquad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ существует.

Доказательство (см. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы анализа. М., Гостехиздат, 1956, с. 38). Имеем

$$0 \leqslant x_n \leqslant x_1 + x_1 + \cdots + x_1 = nx_1,$$

$$0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

следовательно, $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ ограничена и существует конечная нижняя грань $\alpha = \inf\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, тогда существует такой номер m, что $\alpha \leqslant \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$.

Всякое целое число n может быть представлено в виде $n = qm + r$, где r равно одному из чисел: 0, 1, 2, ..., $m - 1$. Полагая для большего единообразия $x_0 = 0$, имеем

$$x_n = x_{qm+r} \leqslant x_m + x_m + \cdots + x_m + x_r = qx_m + x_r,$$

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} \leqslant \frac{qx_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m} \cdot \frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{n},$$

$$\alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n}.$$

Так как $0 \leqslant r \leqslant m + 1$, то x_r ограничено и существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$

$$0 \leqslant \frac{x_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А тогда

$$\alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$.

78. Доказать теорему Теплица: пусть 1) $P_{nk} \geqslant 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$ при каждом фиксированном k; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда последовательность $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}x_k \; (n = 1, 2, \ldots)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

Доказательство. Из условия 4) вытекает существование такого числа $N = N(\varepsilon)$, что неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполняется для всех $n > N(\varepsilon)$; далее, из этого же условия вытекает существование такого числа $M > 0$, что

$$|x_n| \leqslant M, \quad |x_n - a| \leqslant 2M$$

для всех n. Наконец, из условия 3) следует существование такого числа $n_0 = n_0(\varepsilon) > N$, что

$$P_{nk} < \frac{\varepsilon}{4NM} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

для всех $n > n_0$.

Пользуясь этими неравенствами и условиями 1) — 2) теоремы, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{nk}a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x_k - a)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - a| = P_{n1}|x_1 - a| + P_{n2}|x_2 - a| + \cdots$$

$$\cdots + P_{nN}|x_N - a| + P_{n\,N+1}|x_{N+1} - a| + \cdots + P_{nn}|x_n - a| \leqslant$$

$$\leqslant N \cdot \frac{\varepsilon}{4N \cdot M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}(P_{n\,N+1} + \cdots + P_{nn}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n > n_0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}x_k = a$.

79. а) Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то последовательность средних арифметических

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

также сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

б) Доказать, что если последовательность $\{y_n\}$ сходится и $y_n > 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, то последовательность средних гармонических

$$\gamma_n = \frac{n}{\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \cdots + \dfrac{1}{y_n}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

также сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

в) Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$,

где γ_n — среднее гармоническое, а ξ_n — среднее арифметическое из чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Доказательство. а) Если положить $P_{nk} = \frac{1}{n}$ $(k = 1,\ 2, \ldots, n,$ $n = 1,\ 2, \ldots)$, то для P_{nk} и x_n будут выполнены все условия примера 78, причем $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}x_k = \xi_n$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

б) Пусть

$$P_{nk} = \frac{\dfrac{1}{y_k}}{\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \cdots + \dfrac{1}{y_n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),\ x_n = y_n\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда все условия теоремы 78 будут выполнены, причем $t_n = \gamma_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

в) 1) Покажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}=0$. А это эквивалентно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty$. Применяя пример 78 и полагая там

$$P_{nk}=\frac{1}{n}\qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n),\quad x_n=\frac{1}{y_n}\qquad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

получаем, что $t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}x_k=\frac{1}{\gamma_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=0$.

2) Утверждение, что $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$, следует из неравенства (см. пример 6) $\gamma_n\leqslant\xi_n$ и из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty$.

80. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Доказательство. Имеем (см. неравенства а) и б) примера 6)

$$\gamma_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\,\ldots\,x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\xi_n.$$

А поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ (см. пример 79), то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\,\ldots\,x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

81. Доказать, что если $x_n>0$ ($n=1,\,2,\,\ldots$), то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

Доказательство следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\,\cdots\,\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

(см. пример 80).

82. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{x_n},$$

где $x_n=\frac{n^n}{n!}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e$, то на основании примера 81 получаем требуемое утверждение.

83. Доказать теорему Штольца: если

а) $y_{n+1}>y_n\,(n=1,\,2,\,\ldots)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$;

в) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ (a — конечное). Тогда, если считать, что $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ и

$$P_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad X_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то мы получим выполнение условий теоремы Теплица (пример 78) для P_{nk} и X_n, причем $t_n = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, то повторяем приведенные выше рассуждения для последовательности $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$, предварительно убедившись, что $x_{n+1} > x_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

84. Доказать, что если p — натуральное число, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p + 3^p + \cdots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

Для доказательства применим теорему Штольца (пример 83). Докажем пункт б) (пункты а) и в) доказываются аналогично).

б) Если положить $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}$, $y_n = (p+1)n^p$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \dfrac{p(p-1)}{2}n^{p-2} + \cdots + 1\right]}{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \dfrac{p(p-1)}{2}n^{p-2} + \cdots + 1 - n^p\right]} +\right.$$

$$\left. + \frac{-n^{p+1} - (p+1)n^p - \dfrac{(p+1)p}{2}n^{p-1} - \cdots - 1 + n^{p+1}}{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \cdots + \dfrac{p(p-1)}{2}n^{p-2} + \cdots + 1 - n^p\right]}\right\}.$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях n. Затем разделим числитель и знаменатель на n^{p-1} и обозначим через $o\left(\frac{1}{n}\right)$ сумму всех членов со степенями, не выше — 1; получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(p+1)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{p(p+1)+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

85. Доказать, что последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

сходится. Таким образом, имеет место формула

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

где $C=0{,}577216\ldots$ — так называемая постоянная Эйлера и $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Так как $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ (см. пример 38), то последовательность $\{x_n\}$ является монотонно убывающей. Кроме того, данная последовательность ограничена снизу:

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n=$$
$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}>0.$$

Поэтому существует конечный предел C, а тогда справедливо представление

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=C+\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

86. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

Решение. Пусть $z_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. Тогда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=z_{2n}-z_n=$$
$$=\ln 2n+\varepsilon_{2n}-\ln n-\varepsilon_n=\ln 2+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)$$

(см. пример 85) и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

87. Последовательность чисел x_n ($n = 1, 2, \ldots$) определяется формулами

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решение. Имеем

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{2},$$

поэтому

$$x_2 - x_1 = b-a,\quad x_3 - x_2 = -\frac{x_2-x_1}{2} = -\frac{b-a}{2},$$

$$x_4 - x_3 = -\frac{x_3-x_2}{2} = \frac{b-a}{4},\ \ldots,$$

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Подставляя эти выражения в очевидное равенство

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}),$$

имеем

$$x_n = a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}} =$$

$$= a + \frac{2(b-a)}{2} + \frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[a + \frac{2(b-a)}{3} + \frac{b-a}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right] = \frac{a+2b}{3}.$$

88. Пусть x_n ($n = 1, 2, \ldots$) — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Доказательство. Так как $x_0 > 0$ и $x_n + \frac{1}{x_n} \geqslant 2$, то последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) ограничена снизу числом 1. А из неравенства $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant x_n$, справедливого для $x_n \geqslant 1$, вытекает, что данная последовательность монотонно убывает. Следовательно, существует конечный предел a, причем $a \geqslant 1$. Переходя к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right),$$

находим, что $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$. Отсюда $a^2 = 1$ или $a = \pm 1$. Но так как $x_n \geqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $a = 1$.

89. Доказать, что последовательности x_n и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, определяющиеся формулами

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(арифметико-геометрическое среднее чисел a и b).

Доказательство. Из условия примера следует, что $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
Используя известное неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \qquad (a \geqslant 0, \ b \geqslant 0),$$

получаем

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}.$$

А так как $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n^2} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant y_n$, то ввиду того, что $x_n \leqslant y_n \leqslant y_1$, $y_n \geqslant x_n \geqslant x_1$, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в силу утверждения 3°, 1) имеют конечные пределы A и B соответственно. Переходя к пределу в равенстве

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

получаем, что $A = B$. Общее значение этих пределов называется средним арифметико-геометрическим и обозначается символом $\mu(a, b)$.

Найти пределы:

90. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Решение. Поскольку

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

то, записывая произведения в виде

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots$$

$$\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

91. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$

Решение. Имеем

$$1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}=\frac{1}{3}.$$

92. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}.$

Решение. Замечая, что

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$$

$$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 34}{6\cdot 21}\cdots\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n-1)n}=\frac{2}{3}.$$

§ 3. Понятие функции

1°. Понятие функции. Пусть X и Y — два множества вещественных чисел. Если каждому $x\in X$ по некоторому закону (правилу) ставится в соответствие единственное число $y=f(x)\in Y$, то говорят, что на множестве X определена однозначная функция $y=f(x)$, область значений которой расположена в множестве Y. Множество X называют *областью определения* функции $f(x)$, а переменная x называется *аргументом*. Множество X может быть: интервалом (a, b): $a<x<b$, *отрезком* (сегментом) $[a, b]$: $a\leqslant x\leqslant b$, *полуотрезком* $[a, b)$: $a\leqslant x<b$ или $(a, b]$: $a<x\leqslant b$, *полупрямой* $[a, +\infty)$: $a\leqslant x<+\infty$ или $(-\infty, b]$: $-\infty<x\leqslant b$, всей *бесконечной прямой* $(-\infty, +\infty)$: $-\infty<x<+\infty$ и т. д. Множество X может представлять собой систему интервалов или отрезков или их комбинацию, а также состоять из дискретных точек.

2°. Монотонные функции. Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* (невозрастающей) на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из X, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$. Неубывающие и невозрастающие функции объединяются общим названием: *монотонные функции*.

Если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то функция $y = f(x)$ называется *строго монотонно возрастающей* (убывающей).

3°. Обратная функция. Пусть функция $y = f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и множеством значений этой функции является сегмент $[\alpha, \beta]$. Пусть, далее, каждому $y \in [\alpha, \beta]$ соответствует единственное значение $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$. Тогда на сегменте $[\alpha, \beta]$ можно определить функцию $x = \overset{-1}{f}(y)$, ставя в соответствие каждому $y \in [\alpha, \beta]$ то значение $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$. Функция $x = \overset{-1}{f}(y)$ называется *обратной* для функции $y = f(x)$.

Вместо сегментов можно рассматривать конечные или бесконечные интервалы.

Функции $y = f(x)$ и $x = \overset{-1}{f}(y)$ называются *взаимно обратными*. Они обладают следующими свойствами:

$$f(\overset{-1}{f}(y)) = y, \quad \overset{-1}{f}(f(x)) = x.$$

Если функция $y = f(x)$ монотонна в строгом смысле на $[a, b]$, то на сегменте $[\alpha, \beta]$ существует обратная функция $x = \overset{-1}{f}(y)$, также строго монотонная в том же смысле.

Определить область допустимых действительных значений x:

93. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Решение. Так как первый сомножитель $x - 2$ имеет смысл при любых значениях x, то область определения данного выражения состоит из тех значений x, для которых справедливо неравенство $\dfrac{x+1}{1-x} \geqslant 0$; решив его, находим, что $-1 \leqslant x < 1$.

94. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

Решение. Выражение имеет смысл при условии, что $\sin\sqrt{x} \geqslant 0$, т. е. если

$$2k\pi \leqslant \sqrt{x} \leqslant \pi + 2k\pi, \ (x \geqslant 0) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда

$$4k^2\pi^2 \leqslant x \leqslant \pi^2(1+2k)^2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

95. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру $\cos x^2 \geqslant 0$, откуда находим

$$0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{\pi}{2}(4k-1) \leqslant x^2 \leqslant \frac{\pi}{2}(4k+1) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так что

$$|x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ или } \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

96. $y = \lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

Решение. Область существования определяется неравенством $\sin\frac{\pi}{x} > 0$, которое справедливо при условии, что

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi(2k+1) \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Если $k=0$, то $0 < \frac{1}{x} < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Если $k > 0$, то $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ $\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots)$.

Если же $k < 0$, то $\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k+1}$ $\qquad (k=-1,\ -2,\ \ldots)$.

Следовательно, $1 < x < +\infty$,

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k+1} \qquad (k=-1,\ -2,\ \ldots).$$

97. а) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$; б) $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

Решение. а) Функция определена, если $x \geqslant 0$ и $\pi x \neq k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), т. е. если $k < x < k+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

б) Выражение $x + |x|$ имеет смысл всегда, следовательно, произведение будет определено, если радикал имеет смысл, т. е. если $x \sin^2 \pi x \geqslant 0$. Решая последнее неравенство, находим, что $x \geqslant 0$.

98. а) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$; б) $y = \arccos(2\sin x)$; в) $y = \lg[\cos(\lg x)]$.

Решение. а) Арксинус имеет смысл, если

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x} \leqslant 1 \qquad (x \neq -1).$$

Если $x < -1$, то решений нет, если же $x > -1$, то $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$.

б) Очевидно, должно быть $|2\sin x| \leqslant 1$, т. е. $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$. Решая последнее неравенство, находим область определения функции $|x - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

в) Внешний логарифм существует, если $\cos \lg x > 0$. Косинус положителен при

$$\frac{\pi}{2}(4k-1) < \lg x < \frac{\pi}{2}(4k+1) \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Наконец, логарифм существует в указанных пределах, если

$$10^{\frac{\pi}{2}(4k-1)} < x < 10^{\frac{\pi}{2}(4k+1)} \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

99. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos (2^x)$.

Решение. Котангенс существует при $\pi x \neq k\pi$, т. е. при $x \neq k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Арккосинус имеет смысл, если $0 < 2^x \leqslant 1$, откуда $-\infty < x \leqslant 0$. Следовательно, $-\infty < x < 0$ и $x \neq -1, -2, \ldots$

100. $y = (2x)!$

Решение. Выражение справа имеет смысл, если $2x = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, поэтому область определения есть множество

$$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\right\}.$$

101. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$.

Решение. Корни имеют смысл при условии, что $\sin 2x \geqslant 0$ и $\sin 3x \geqslant 0$. Тогда $2k\pi \leqslant 2x \leqslant \pi + 2k\pi$ и $2k\pi \leqslant 3x \leqslant \pi + 2k\pi$, или $k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $\frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Совмещая эти системы неравенств, находим область определения

$$2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Определить область существования и множество значений следующих функций:

102. $y = \lg (1 - 2\cos x)$.

Решение. Логарифм имеет смысл, если $1 - 2\cos x > 0$. Решая это неравенство, находим

$$X: 2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Так как $0 < 1 - 2\cos x \leqslant 3$, а логарифм — монотонно возрастающая функция на интервале $(0, 3]$, то $Y: -\infty < y \leqslant \lg 3$.

103. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение. Очевидно, что $-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$ при $-\infty < x < +\infty$, поэтому $X: -\infty < x < +\infty$; $Y: 0 \leqslant y \leqslant \pi$.

104. $y = (-1)^x$.

Р е ш е н и е. Область определения функции состоит только из рациональных чисел. Так как $(-1)^x = \pm 1$, то действительный корень этого уравнения существует только при нечетном показателе корня, т. е. выражение $(-1)^x$ имеет смысл, если $x = \frac{p}{2q+1}$, где p и q — целые числа. При этом $y = \pm 1$.

105. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси Ox равномерно распределена масса, равная 2 *г*, а в точках этой оси $x = 2$ и $x = 3$ находятся сосредоточенные массы по 1 *г* в каждой. Составить аналитическое выражение функции $m = m\ (x)$ $(-\infty < x < \infty)$, численно равной массе, находящейся на интервале $(-\infty, x)$, и построить график этой функции.

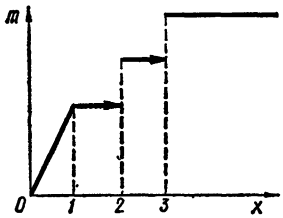

Рис. 1

Р е ш е н и е. На интервале $-\infty < x < 0$ масса отсутствует, поэтому $m\ (x) = 0$, если $-\infty < x < 0$.

На сегменте $[0,\ 1]$ масса распределена равномерно, поэтому масса сегмента $[0,\ x]$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, пропорциональна длине этого сегмента, т. е. $m\ (x) = kx$. Если $x = 1$, то $m = 2$, отсюда $k = 2$, так что $m\ (x) = 2x$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$. На интервале $(1,\ 2)$ масса отсутствует, поэтому $m\ (x)$ на этом интервале сохраняет постоянное значение, равное $m\ (1) = 2$. В точке $x = 2$ масса увеличивается на 1 *г* и сохраняет это значение на полусегменте $[2,\ 3)$. В точке $x = 3$ масса снова увеличивается на 1 *г* и сохраняет это значение на всем бесконечном полусегменте $[3,\ \infty)$.

Следовательно,

$$m\,(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } -\infty < x < 0; \\ 2x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2, \text{ если } 1 < x < 2; \\ 3, \text{ если } 2 \leqslant x < 3; \\ 4, \text{ если } 3 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 1.

На какое множество E_y отображает множество E_x функция $y = f\ (x)$:

106. $y = x^2$, $E_x = \{-1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Р е ш е н и е. Так как $y = x^2 \geqslant 0$ при $x \in E_x$ и наибольшее значение функция y достигает при $x = 2$, то

$$E_y = \{0 \leqslant y \leqslant 4\}.$$

107. $y = \lg x$, $E_x = \{10 < x < 1000\}$.

Р е ш е н и е. В силу монотонности логарифмической функции

$$E_y = \{1 < y < 3\}.$$

108. Доказать, что если для линейной функции $f\ (x) = ax + b$ значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) образуют также арифметическую прогрессию.

Доказательство. Пусть $x_n = a_0 + d(n-1)$, где a_0 — первый член, а d — разность прогрессии. Тогда

$$y_n = a[a_0 + d(n-1)] + b = (aa_0 + b) + da(n-1);$$

так как $y_{n+1} - y_n = da$ ($n = 1, 2, \ldots$), т. е. разность последовательных значений функции равна постоянной, то значения функции y_n образуют арифметическую прогрессию.

109. Пусть $f(x) + f(y) = f(z)$.

Определить z, если:

а) $f(x) = ax$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ($|x| < 1$);

б) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; г) $f(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение. а) Из уравнения $ax + ay = az$ находим, что $z = x + y$ ($a \neq 0$).

б) Аналогично из условия $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ находим

$$z = \frac{xy}{x+y}, \quad x \neq y$$

в) Согласно условию $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z$ имеем $z = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$, а так как $|x| < 1$, то

$$z = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

г) Потенцируя равенство

$$\log\frac{1+x}{1-x} + \log\frac{1+y}{1-y} = \log\frac{1+z}{1-z},$$

находим, что

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z},$$

откуда

$$z = \frac{x+y}{1+xy}.$$

110. Пусть

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ раз}}.$$

Найти $f_n(x)$, если

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Находим, что

$$f_2(x) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Предположим, что $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Тогда

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}},$$

так что согласно методу математической индукции имеем

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

111. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \qquad (x > 0).$$

Решение. Пусть $z = \frac{1}{x}$. Тогда $x = \frac{1}{z}$ и, так как $z > 0$, то

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sqrt{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z} + \frac{\sqrt{1+z^2}}{|z|} = \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}.$$

Заменяя z на x, получим

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и ее область существования, если:

112. $y = 2x + 3$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение. Если x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ то y монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому существует единственная обратная функция. Находим, что

$$x = \frac{1}{2}(y-3) \qquad (-\infty < y < +\infty).$$

113. $y = x^2$ при а) $-\infty < x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x < +\infty$.

Решение. а) На полусегменте $-\infty < x \leqslant 0$ функция y монотонно убывает от $+\infty$ до 0, а поэтому на $0 \leqslant y < +\infty$ существует единственная обратная функция. Решая равенство относительно x, находим

$$x = -\sqrt{y} \qquad (0 \leqslant y < +\infty).$$

Перед радикалом знак (—), так как x изменяется на отрицательной полуоси.

б) Аналогично предыдущему

$$x = +\sqrt{y} \qquad (0 \leqslant y < +\infty).$$

114. $y = \frac{1-x}{1+x}$ $(x \neq -1)$.

Решение. Так как на интервале $-\infty < x < -1$ функция монотонно убывает от -1 до $-\infty$, а на интервале $-1 < x < +\infty$

монотонно убывает от $+\infty$ до -1, то на всей оси, кроме $y=-1$, существует единственная обратная функция. Находим, что

$$x=\frac{1-y}{1+y} \qquad (y\neq -1).$$

115. $y=\sqrt{1-x^2}$ при *а*) $-1\leqslant x\leqslant 0$; б) $0\leqslant x\leqslant 1$.

Решение. а) На сегменте $-1\leqslant x\leqslant 0$ функция монотонно возрастает от 0 до 1. Поэтому существует единственная обратная функция. Решая равенство относительно x, находим

$$x=-\sqrt{1-y^2} \qquad (0\leqslant y\leqslant 1).$$

б) Аналогично предыдущему случаю

$$x=+\sqrt{1-y^2} \qquad (0\leqslant y\leqslant 1).$$

116. $y=\operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Решение. Так как на интервале $-\infty<x<+\infty$ функция $\operatorname{sh} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, то на интервале $-\infty<y<+\infty$ существует единственная обратная функция. Имеем

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), \quad e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

откуда

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

Беря в последнем равенстве знак $(+)$ (так как $e^x>0$) и логарифмируя, получаем

$$x=\operatorname{Arsh} y=\ln(y+\sqrt{y^2+1}) \qquad (-\infty<y<+\infty).$$

117. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Доказательство. Обозначим

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}, \quad \psi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2};$$

очевидно, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на интервале $(-l, l)$. Из равенств

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\psi(x)$$

следует, что функция $\varphi(x)$ нечетная, а $\psi(x)$ — четная. А так как $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, то требуемое утверждение доказано.

118. Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший их период, если:

а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $f(x) = \sin^2 x$; д) $f(x) = \sin(x^2)$;

е) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; ж) $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$; з) $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}\,x)$.

Примечание. Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$ (период функции — в широком смысле слова), что $f(x + T) = f(x)$ при $x \in E$.

Решение. а) Имеем

$$f(x+T) = A\cos\lambda(x+T) + B\sin\lambda(x+T) =$$
$$= A\cos\lambda x\cos\lambda T - A\sin\lambda x\sin\lambda T + B\sin\lambda x\cos\lambda T +$$
$$+ B\sin\lambda T\cos\lambda x = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = f(x),$$

если $\cos\lambda T = 1$, т. е. если $\lambda T = 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ — наименьший период.

б) Период $\sin x$ равен 2π, $\sin 2x$ имеет период π, а период $\sin 3x$ равен $\frac{2\pi}{3}$.

Общее наименьшее кратное, т. е. число 2π, будет наименьшим периодом функции $f(x)$.

в) Первое слагаемое имеет период 2π, а второе 3π. Общее наименьшее кратное 6π будет наименьшим периодом функции $f(x)$.

г) Так как $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, а $\cos 2x$ — периодическая функция с периодом π, то $\sin^2 x$ также имеет период π.

д) $\sin(x^2)$ функция непериодическая, так как расстояние между последовательными ее нулями стремится к нулю:

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

е) Функция определена при $k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Найдем число T такое, чтобы для всех x из области определения имело место равенство

$$f(x+T) = \sqrt{\operatorname{tg}(x+T)} = \sqrt{\operatorname{tg} x} = f(x)$$

Так как оба радикала неотрицательны, то последнее равенство эквивалентно равенству

$$\operatorname{tg}(x+T) = \operatorname{tg} x$$

(для всех x из области определения функции). Отсюда следует, что $T = \pi$. То, что π — наименьший период, очевидно.

ж) $\operatorname{tg}\sqrt{x}$ обращается в нуль в точках $x = k^2\pi^2$ $(k = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Расстояние между последовательными нулями $(k+1)^2\pi^2$ и $k^2\pi^2$ стремится к $+\infty$ и, следовательно, функция непериодическая.

з) Так как числа 1 и $\sqrt{2}$ несоизмеримы, т. е не существует общего наименьшего кратного для периодов 2π и $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, то функция $f(x)$ непериодическая.

119. Доказать, что для функции Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

Доказательство. Пусть T — произвольное рациональное число. Согласно условию имеем:

$$\chi(x+T)=\begin{cases}1, & \text{если } x+T \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x+T \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Поскольку T — рациональное число, то сумма $x+T$ рациональна при рациональном x и иррациональна при иррациональном x. Следовательно,

$$\chi(x+T)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

и $\chi(x+T)=\chi(x)$, что и требовалось доказать.

120. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на общем множестве и периоды их T_1 и T_2 соизмеримы. Пусть

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n},$$

где m и n — взаимно простые числа и $T=nT_1=mT_2$. Тогда число T будет периодом суммы $\varphi(x)+\psi(x)$ и произведения $\varphi(x)\cdot\psi(x)$. В самом деле,

$$\varphi(x+T)+\psi(x+T)=\varphi(x+nT_1)+\psi(x+mT_2)=\varphi(x)+\psi(x),$$

$$\varphi(x+T)\psi(x+T)=\varphi(x+nT_1)\psi(x+mT_2)=\varphi(x)\psi(x).$$

121. Функция $f(x)$ называется антипериодической, если

$$f(x+T)=-f(x)\qquad (T>0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

Доказательство. Согласно условию, имеем

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=-f(x+T)=-(-f(x))=f(x).$$

Следовательно, $f(x)$ периодическая функция с периодом $2T$.

122. Доказать, что если для функции $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ выполнено равенство $f(x+T)=kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x)=a^x\varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T.

Доказательство. Положим $k=a^T$. Тогда

$$f(x+T)=a^Tf(x).$$

Любая функция $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ представима в виде $f(x)=a^x\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — некоторая функция. Согласно условию имеем

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=a^Ta^x\varphi(x).$$

После сокращения на a^{x+T} $(a^{x+T}>0)$, получим

$$\varphi(x+T)=\varphi(x),$$

откуда и следует утверждение.

§ 4. Предел функции

1°. Ограниченность функции. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, *называется ограниченной* на этом множестве, если существуют числа m и M, такие, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad (x \in X).$$

Число $m_0=\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ называется *точной нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0=\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ — *точной верхней гранью* функции $f(x)$ на множестве X. Разность M_0-m_0 называется *колебанием* функции $f(x)$ на множестве X.

2°. Предел функции. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X с предельной точкой a. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что*

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

как только $0<|x-a|<\delta$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ *или* $f(x)\to A$ *при* $x\to a$.

Есть и такое эквивалентное определение предела функции:

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества X, сходящейся к точке a $(x_n\neq a)$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

Имеют место два замечательных предела:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Критерий Коши. *Конечный предел* функции $f(x)$ в точке $x=a$ существует тогда и только тогда, если $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всякой пары значений x' и x'' из области определения функции, удовлетворяющих неравенствам $|x'-a|<\delta$, $|x''-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

3°. Односторонние пределы. *Число A' называется пределом слева функции $f(x)$ в точке a*:

$$A'=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0),$$

если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *такое, что* $|A'-f(x)|<\varepsilon$ *при* $0<a-x<\delta(\varepsilon)$.

Аналогично *число* A'' *называется пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* a: $A'' = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, *если* $|A'' - f(x)| < \varepsilon$ *при* $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$.

Для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4°. Бесконечный предел. Условная запись

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

означает, что для любого $E > 0$ справедливо неравенство $|f(x)| > E$, если $0 < |x - a| < \delta(E)$.

5°. Символ Ландау. Для двух функций $f(x)$ и $g(x) > 0$, определенных в области D, символ $f(x) = O(g(x))$ означает, что существует такая постоянная $K > 0$, что $|f(x)| \leqslant K \cdot g(x)$ для всех $x \in D$.

6°. Классификация бесконечно малых функций. Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$.

Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, то всегда можно записать $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции.

а) Если $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ ($C = \text{const}$, $C \neq 0$), то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми одного порядка малости* и пишут $\alpha = O^*(\beta)$, $\beta = O^*(\alpha)$.

б) Если $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$; функцию $\beta(x)$ называют в этом случае *бесконечно малой более низкого порядка малости*, чем $\alpha(x)$.

в) Если $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha)$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными бесконечно малыми* и пишут $\alpha \sim \beta$.

Для того чтобы $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

г) Если предел отношения $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *несравнимыми*.

7°. Шкала бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, скорость стремления к нулю которой принята за единицу. Бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $A_1\alpha$, $A_2\alpha^2$, ..., $A_n\alpha^n$, где $A_j = \text{const}$, $A_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) называются, соответственно, *бесконечно малыми первого, второго, ..., n-го порядка*. Часто в качестве основной бесконечно малой $\alpha(x)$ берут $\alpha(x) = x - x_0$.

8°. Некоторые асимптотические формулы. При $x \to 0$ справедливы формулы $\sin x = x + o(x)$, $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Если бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $f(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\alpha(x) = A(x - x_0)^k$, где $A = \text{const}$, $A \neq 0$, $k > 0$, т. е. $f(x) = A(x - x_0)^k + o[(x - x_0)^k]$, то функцию $\alpha(x)$ называют главным членом функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

9°. Принцип отбрасывания бесконечно малых. Состоит этот принцип в замене при вычислении пределов бесконечно малых функций эквивалентными им. Пусть $\alpha_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции, причем среди них функция $\alpha_s(x)$ имеет более низкий порядок малости, чем все остальные. Тогда бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $\gamma(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(x)$ эквивалентна функции $\alpha_s(x)$. Действительно, в силу условия $\alpha_j(x) = o(\alpha_s(x))$ ($j = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k$) имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\gamma(x)}{\alpha_s(x)} = 1$. Пусть $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция и требуется вычислить предел отношения $\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$; очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\gamma(x)}{\alpha_s(x)} \cdot \frac{\alpha_s(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_s(x)}{\beta(x)}$, так как $\gamma \sim \alpha_s$. Таким образом, при вычислении пределов бесконечно малые функции можно заменять их главными членами.

10°. Частичный предел. Если для некоторой последовательности $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0$) справедливо равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = B$, то число B (или символ ∞) называется *частичным пределом* (соответственно конечным или бесконечным) функции $f(x)$ в точке x_0. Наибольший и наименьший из этих частичных пределов обозначаются через $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ и называются соответственно *верхним* и *нижним* пределами функции $f(x)$ в точке x_0. Равенство $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ необходимо и достаточно для существования предела (соответственно конечного или бесконечного) функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Бесконечно большие функции сравниваются аналогично тому, как это делалось для бесконечно малых функций.

123. Показать, что функция, определяемая условиями:

а) $f(x) = n$, если $x = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые целые числа, $n > 0$;

б) $f(x) = 0$, если x — иррационально, конечна, но не ограничена в каждой точке x (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

Решение. Пусть $x = \frac{p}{q}$ — произвольное рациональное число. Тогда $r_k = \frac{kp+1}{kq} \to \frac{p}{q}$ при $k \to \infty$, т. е. попадает в любую окрестность точки $x = \frac{p}{q}$. А так как $f(r_k) = kq \to \infty$ при $k \to \infty$, то функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки x.

Пусть, далее, $x = \alpha$, где α — иррациональное. Тогда существует последовательность рациональных чисел $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = \alpha$. При этом $\lim\limits_{i\to\infty} q_i = +\infty$. Поскольку $f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = q_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, а точки последовательности $\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}$ попадают в любую окрестность точки α, то функция не ограничена.

124. Если функция $f(x)$ определена и локально ограничена в каждой точке: а) интервала, б) сегмента, то является ли эта функция ограниченной на данном интервале или соответственно сегмента? Привести соответствующие примеры.

Решение. а) Вообще говоря, нет. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ ограничена в окрестности любой точки интервала $0 < x < 1$, но не является ограниченной на этом интервале, так как $f(x_n) \to +\infty$ при $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, а $0 < x_n < 1$ при $n = 2, 3, \ldots$.

б) Функция ограничена. Для доказательства предположим противное: пусть функция не ограничена. Тогда для любого натурального числа n существует $x_n \in [a, b]$, где $[a, b]$ — сегмент, указанный в условии задачи, такое, что

$$f(x_n) > n.$$

А так как $a \leqslant x_n \leqslant b$ (т. е. $\{x_n\}$ ограничена), то существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c \in [a, b].$$

По условию $f(x)$ локально ограничена в окрестности любой точки, т. е. существуют такие $\delta > 0$ и $E > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant E, \quad x \in (c - \delta, c + \delta).$$

С другой стороны, существует такое число N, что $k_n > E$ при $n > N$ и $x_{k_n} \in (c - \delta, c + \delta)$, а тогда $f(x_{k_n}) > k_n > E$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

125. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

ограничена в интервале $-\infty < x < \infty$.

Доказательство. Ясно, что $f(x) > 0$, т. е. функция ограничена снизу. Далее, из неравенства $(1 - x^2)^2 \geqslant 0$ следует, что $\frac{x^2}{1 + x^4} \leqslant \leqslant \frac{1}{2}$, а поскольку $1 + x^4 \geqslant 1$, то $\frac{1 + x^2}{1 + x^4} = \frac{1}{1 + x^4} + \frac{x^2}{1 + x^4} \leqslant 1 + + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $0 < f(x) \leqslant \frac{3}{2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

126. Показать, что функция

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x=0$, однако не является бесконечно большой при $x\to 0$.

Доказательство. Пусть $x_n=\frac{2}{n\pi}$. Очевидно, что при $n\to\infty$ значения x_n попадают в любую окрестность точки $x=0$. Требуемое утверждение вытекает из того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_{2n})|=\infty$, а $f(x_{2n-1})=0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

127. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$$

в интервале $0<x<\varepsilon$.

Решение. Так как $0\leqslant\sin^2\frac{\pi}{x}\leqslant 1$, а функция $\ln x$ монотонно возрастающая, то

$$f(x)\leqslant\max\{0,\ln\varepsilon\},$$

т. е. $f(x)$ ограничена сверху.

Далее, положим $x_n=\frac{2}{2n+1}$. Тогда, начиная с некоторого номера n_0, все x_n попадают в интервал $(0,\varepsilon)$. При этом $f(x_n)=\ln\frac{2}{2n+1}=$ $=-\ln\left[1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]>-\left(n+\frac{1}{2}\right)\to-\infty$ при $n\to\infty$, т. е. $f(x)$ не ограничена снизу.

128. Показать, что функция

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

в области $0\leqslant x<\infty$ имеет нижнюю грань $m=0$ и верхнюю грань $M=1$.

Доказательство. Очевидно, что $0\leqslant\frac{x}{1+x}$, $0\leqslant x<\infty$. Пусть ε — произвольное и $0<\varepsilon<1$. Тогда $f(x)=\frac{x}{1+x}<\varepsilon$ при $0<x<$ $<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Следовательно, $\inf\limits_{0\leqslant x<\infty}\{f(x)\}=0$.

Далее, очевидно, что $\frac{x}{1+x}<1$, $0\leqslant x<\infty$. С другой стороны для указанного ранее ε

$$f(x)=\frac{x}{1+x}>1-\varepsilon\quad\text{при}\quad x>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

т. е. $\sup\limits_{0\leqslant x<\infty}\{f(x)\}=1$.

129. Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее точная нижняя и точная верхняя грани на этом сегменте?

Решение. Так как $f(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, то $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$ $\forall x\in[a, b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное и такое, что $f(a) + \varepsilon < f(b)$. Тогда существует $x' \in [a, b]$, такое, что

$$f(a) \leqslant f(x') < f(a) + \varepsilon$$

(например, $x' = a$) т. е. $\inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} = f(a)$.

Аналогично, если $f(b) - \varepsilon < f(b)$, то существует $x'' \in [a, b]$ такое, что $f(b) - \varepsilon < f(x'') \leqslant f(b)$ (например $x'' = b$).

Следовательно,

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} = f(b).$$

130. Определить колебание функции $f(x) = x^2$ на интервалах: а) $(1;\ 3)$; б) $(1{,}9;\ 2{,}1)$; в) $(1{,}99;\ 2{,}01)$; г) $(1{,}999;\ 2{,}001)$.

Решение. На каждом из интервалов функция $f(x) = x^2$ монотонно возрастает, поэтому существуют конечные пределы в концах интервалов. Доопределяя функцию $f(x)$ в концах интервалов ее предельными значениями и пользуясь предыдущим примером, получим:

а) $M_0 - m_0 = f(3-0) - f(1+0) = 9 - 1 = 8$;

б) $M_0 - m_0 = f(2{,}1 - 0) - f(1{,}9 + 0) = 4{,}41 - 3{,}61 = 0{,}8$;

в) $M_0 - m_0 = f(2{,}01 - 0) - f(1{,}99 + 0) = 4{,}0401 - 3{,}9601 = 0{,}08$;

г) $M_0 - m_0 = f(2{,}001 - 0) - f(1{,}999 + 0) = 4{,}004001 - 3{,}996001 = 0{,}008$.

131. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке (a, b).

Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, определенные на (a, b), то

а) $m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$; б) $M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2]$.

Доказательство. Докажем неравенство а) (неравенство б) доказывается аналогично). Обозначим $m_1 = \inf\limits_{a<x<b} \{f_1(x)\}$; $m_2 = \inf\limits_{a<x<b} \{f_2(x)\}$. Тогда $f_1(x) \geqslant m_1$ и $f_2(x) \geqslant m_2$ $(x \in (a, b))$. Складывая последние неравенства, получаем $f_1(x) + f_2(x) \geqslant m_1 + m_2$, $x \in (a, b)$, откуда $m[f_1 + f_2] \geqslant m_1 + m_2 = m[f_1] + m[f_2]$.

132. Показать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Требуемое утверждение следует из того, что последовательность $x_n = \frac{2}{\pi(1 + 2n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при $n \to \infty$ стремится к нулю, а $f(x_n) = (-1)^n$ вовсе не имеет предела.

133. С помощью «$\varepsilon - \delta$» — рассуждений доказать, что $\lim x^2 = 4$. Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда

$$|x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leqslant |x-2|^2 + 4|x-2| \leqslant \varepsilon,$$

как только

$$0 < |x-2| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}.$$

Последнее неравенство тем более будет выполняться, если

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+\varepsilon}} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+4\varepsilon+\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} = \delta(\varepsilon) > |x-2|.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{10^n}$. Тогда $\delta\left(\frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{4 \cdot 10^n + 2}$ и

$$\delta(10^{-1}) = \frac{1}{42}; \ \delta(10^{-2}) = \frac{1}{402}; \ \delta(10^{-3}) = \frac{1}{4002}; \ \delta(10^{-4}) = \frac{1}{40002}.$$

134. На языке «E — δ» доказать, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1000	10 000	...
δ					

Решение. Пусть $E > 0$ — произвольно. Тогда

$$\frac{1}{(x-1)^2} > E,$$

как только $(x-1)^2 < \frac{1}{E}$ или $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}} = \delta(E)$. Отсюда находим, что

$$\delta(10) = \frac{1}{\sqrt{10}}; \ \delta(100) = \frac{1}{10}; \ \delta(1000) = \frac{1}{10\sqrt{10}}; \ \delta(10\,000) = \frac{1}{100}.$$

135. Пусть

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

где a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) — вещественные числа.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $a_0 \neq 0$. При достаточно больших $|x|$ имеем

$$|P(x)| = |x^n| \left| a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} \right| \geqslant |x|^n \cdot \frac{|a_0|}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^n \cdot \frac{|a_0|}{2} = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

136. Пусть

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$

где $a_0\neq 0$ и $b_0\neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n=m;\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n>m$. Тогда

$$|R(x)|=|x|^{n-m}\left|\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}}\right|>|x|^{n-m}\left|\frac{a_0}{2b_0}\right|$$

при достаточно больших $|x|$. В силу того, что

$$\lim_{x\to\infty}|x|^{n-m}\left|\frac{a_0}{2b_0}\right|=\infty,\quad \text{имеем}\quad \lim_{x\to\infty}R(x)=\infty.$$

Если $n=m$, то

$$R(x)=\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_n}{x^n}}\to\frac{a_0}{b_0}\quad\text{при}\quad x\to\infty.$$

Наконец, если $n<m$, то при достаточно больших $|x|$ имеем

$$|R(x)|<\frac{1}{|x|^{m-n}}\left|\frac{2a_0}{b_0}\right|,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$.

137. Пусть $x\to 0$. Доказать следующие равенства:

а) $x\sin\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$; в) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$;

б) $\ln x=o(x^{-\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$; г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=O(1)$.

Доказательство. Записанные равенства следуют из того, что

а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=1$;

б) $\lim\limits_{x\to+0}x^{-\varepsilon}\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{t^{\varepsilon}}=0\quad\left(t=\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $(1+x)^n=1+nx+C_n^2x^2+\cdots+x^n=1+nx+(C_n^2x+\cdots+$
$+x^{n-1})x=1+nx+\alpha(x)x$,

где $\alpha(x) = C_n^2 x + \cdots + x^{n-1} \to 0$ при $x \to 0$;

г) $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right| < \frac{\pi}{2}$.

138. Пусть $x \to 0$. Выделить главный член вида Cx^n (C — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной x следующих функций:

а) $2x - 3x^2 + x^5$; в) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$;

б) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; г) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

Решение. а) Из того, что $2x - 3x^2 + x^5 = 2x + (-3x + x^4)x = 2x + \alpha(x)x$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$, следует, что $2x - 3x^2 + x^5 = 2x + o(x)$, т. е. $Cx^n = 2x$ $(n = 1)$.

б) Из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$ следует, что $Cx = x$ $(n = 1)$, т. е. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$.

в) Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-2x}-(1-x)}{x^2} + \frac{1-x-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2},$$

то $Cx^n = \frac{1}{2}x^2$ $(n = 2)$.

г) Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$, поэтому $Cx^3 = \frac{1}{2}x^3$ $(n = 3)$.

139. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида Cx^n и определить порядок роста относительно бесконечно большой x следующих функций:

а) $\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$; б) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

Решение. а) Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^{-1}} + x^{-\frac{1}{6}}\right) = 1,$$

то

$$Cx^n = x^{\frac{2}{3}} \quad \left(n = \frac{2}{3}\right).$$

б) Имеем

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}}\sqrt{x^{-4}+\sqrt{x^{-1}+1}} \sim x^{\frac{1}{8}},$$

поэтому $Cx^n = x^{\frac{1}{8}}$ $\left(n = \frac{1}{8}\right)$.

Решить примеры (при решении некоторых из них заменяем бесконечно малые функции эквивалентными им):

140. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m, n — натуральные числа).

Решение. а) Разлагая по формуле бинома Ньютона, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(C_n^2m^2-C_m^2n^2)\,x^2+o\,(x^2)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(C_n^2m^2-C_m^2n^2+\frac{o\,(x^2)}{x^2}\right)=C_n^2m^2-C_m^2n^2=\frac{mn\,(n-m)}{2}.$$

б) Полагая $x=1+t$ ($t\to 0$ при $x\to 1$) и пользуясь принципом отбрасывания бесконечно малых, находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^m-1}{(1+t)^n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{mt+o\,(t)}{nt+o\,(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{mt}{nt}=\frac{m}{n}.$$

в) Пусть $x=1+t$. Тогда $t\to 0$ при $x\to 1$. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{(1+t)^n-1}-\frac{m}{(1+t)^m-1}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{nt+C_n^2t^2+o\,(t^2)}-\frac{m}{mt+C_m^2t^2+o\,(t^2)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(nC_m^2-mC_n^2)\,t^2+o\,(t^2)}{mnt^2+o\,(t^2)}=\frac{nC_m^2-mC_n^2}{mn}=\frac{m-n}{2}.$$

141. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)\,a}{n}\right)^2\right]$.

Решение. Используя результаты примера 2, а), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[nx^2+\frac{2ax}{n}(1+2+\cdots+(n-1))+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[nx^2+\frac{2ax}{n}\cdot\frac{n\,(n-1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right]=x^2+ax+\frac{a^2}{3}.$$

142. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

Решение. Имеем

$$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=4\,(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{2n\,(n+1)\,(2n+1)}{3},$$

$$1^2+2^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n\,(2n+1)\,(4n+1)}{3}$$

(см. пример 2, а)). Вычитая из второго равенства первое, получим

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-$$

$$-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4n^2-1)}{2n(n+1)(2n+1)}=1.$$

143. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

Решение. Имеем

$$1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=$$

$$=(3\cdot 1-2)^3+(3\cdot 2-2)^3+(3\cdot 3-2)^3+\cdots+(3n-2)^3=$$

$$=27(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-54(1^2+2^2+\cdots+n^2)+$$

$$+36(1+2+\cdots+n)-8n=27\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-$$

$$-54\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+36\frac{n(n+1)}{2}-8n,$$

$$[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=\frac{n^2(3n-1)^2}{4}.$$

Так как в числителе и знаменателе высшая степень n равна 4, то предел дроби равен отношению коэффициентов при n^4, т. е. 3.

Найти пределы:

144. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}$.

Решение. Предполагая, что $x_0>0$, положим $x=x_0+t$. Ясно, что $t\to 0$ при $x\to x_0$. Считая $|t|<x_0$, имеем

$$\sqrt[n]{x_0}\left(1-\frac{|t|}{x_0}\right)<\sqrt[n]{x_0+t}=\sqrt[n]{x_0}\sqrt[n]{1+\frac{t}{x_0}}<\sqrt[n]{x_0}\left(1+\frac{|t|}{x_0}\right),$$

откуда

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\lim_{t\to 0}\sqrt[n]{x_0+t}=\sqrt[n]{x_0}.$$

145. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

146. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

147. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решение. Очевидно,

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(9+2x-25)\,(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)\,(\sqrt{9+2x}+5)}=$$

$$=2\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5}=\frac{12}{5}.$$

Примечание. При решении примеров 145—147 использованы результаты примера 144.

148. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n — целое число).

Решение. Положим $\sqrt[n]{1+x}-1=t$. Тогда $x=(1+t)^n-1$. Считая, что $|x|<1$, имеем

$$1-|x|<\sqrt[n]{1+x}<1+|x|,$$

откуда $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, т. е. $t\to 1$ при $x\to 0$. А тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt+o(t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt}=\frac{1}{n}.$$

149. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}+\dfrac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}.$$

Используя то, что

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\frac{1}{6},\quad \lim_{x\to 7}\frac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}=-\frac{1}{27},$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\frac{1}{32},$$

получаем

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}}=\frac{112}{27}.$$

150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

Решение. Положим $\sqrt[5]{1+5x}-1=t$. Ясно, что $t\to 0$, если $x\to 0$. Тогда $x=\frac{1}{5}[(1+t)^5-1]$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}[(1+t)^5-1]^2}{t-\frac{1}{5}[(1+t)^5-1]}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}(5t+o(t))^2}{t-\frac{1}{5}(5t+10t^2+o(t^2))}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+o(t^2)}{-2t^2+o(t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{-2t^2}=-\frac{1}{2}$$

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m и n — целые числа).

Решение. Пользуясь результатом примера 148, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}\left[\sqrt[n]{1+\alpha x}-1\right]+\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+\beta x}\cdot\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}+\beta\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{\beta x}=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{m}.$$

152. Пусть $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ и m — целое число. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

Доказательство. Так как $P(x) \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)} \cdot \frac{P(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)} \cdot \lim_{x\to 0} (a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}) = \frac{a_1}{m}$$

(см. пример 148).

Найти пределы:

153. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m и n — целые числа).

Решение. Положим $x = (1+t)^{mn}$. Тогда $t \to 0$ при $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)^m - 1} = \frac{n}{m}$$

(см. пример 140, б)).

154. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Решение. Полагая $1 - x = t$ ($t \to 0$ при $x \to 1$), получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{1-t}}{t} \; \frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t} \ldots \frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

(воспользовались решением примера 148).

Решить примеры (в примерах 155—158 избавляемся от радикалов в числителе и переходим к выражениям с очевидными предельными значениями):

155. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \frac{2x(\sqrt{x^2+2x} - x - 1)}{\sqrt{x^2+2x} + x + 2\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x} + x + 2\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

156. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$.

Решение. Прибавляя и вычитая x, получим

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3-3x^2} - x) + \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2-2x}) = 1 + 1 = 2.$$

157. $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ \dots\ (x+a_n)} - x]$.

Решение. Воспользуемся тождеством

$$y - z = \frac{y^n - z^n}{y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + z^{n-1}},$$

куда подставим

$$y = \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ \dots\ (x+a_n)}, \quad z = x.$$

Тогда рассматриваемое выражение представится в виде

$$\frac{(x+a_1)\ \dots\ (x+a_n) - x^n}{(\sqrt[n]{\cdots})^{n-1} + x(\sqrt[n]{\cdots})^{n-2} + \dots + x^{n-1}} =$$

$$= \frac{(a_1 + \dots + a_n) + \dfrac{a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n}{x} + \dots}{\left(\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{a_1}{x}\right)\dots\left(1+\dfrac{a_n}{x}\right)}\right)^{n-1} + \dots + 1}.$$

При $x \to +\infty$ подкоренное выражение стремится к единице, поэтому сам корень (см. пример 144) имеет пределом $\sqrt[n]{1} = 1$. Таким образом, каждое из n слагаемых знаменателя стремится к единице, а предел всей дроби будет

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

158. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2-1})}\right]^n + \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n = 0 + 2^n = 2^n.$$

159. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ (n — натуральное число).

Решение. Возводя в n-ю степень и приводя подобные члены, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\left[nx(\sqrt{1+x^2})^{n-1}+o(x)\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}2\left[n(\sqrt{1+x^2})^{n-1}+\frac{o(x)}{x}\right]=2n.$$

Найти пределы:

160. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Решение. Положим $x=\pi+t$ $(t\to 0)$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m\pi+mt)}{\sin(n\pi+nt)}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{mt}\cdot\frac{nt}{\sin nt}=$$
$$=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}.$$

161. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to 0$.

162. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Решение. Из неравенства $|1-\cos x|=2\sin^2\frac{x}{2}<|x|$ вытекает, что

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1\quad\text{и}\quad\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}x=x+o(x)$ при $x\to 0$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 5x}{5x}-3\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}=2.$$

164. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

Решение. С помощью первого замечательного предела имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin px + 2\sin^2\frac{px}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{p\dfrac{\sin px}{px} + \dfrac{p^2x}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{px}{2}}{\frac{px}{2}}\right)^2} = \frac{1}{p}.$$

165. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$;

в) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ $\left(a \neq \dfrac{2n-1}{2}\pi;\quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

Доказательство. а) Имеем

$$0 \leqslant |\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant |x-a|, \quad \lim_{x\to a}\sin x = \sin a.$$

б) Аналогично

$$0 \leqslant |\cos x - \cos a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right| \leqslant |x-a|$$

и $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

в) $$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a,$$

если $\cos a \neq 0$, т. е. если $a \neq \dfrac{2n-1}{2}\pi$, $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Найти пределы:

166. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Решение. Очевидно,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\cos a=\cos a.$$

(воспользовались тем, что $\cos x\to\cos b$ при $x\to b$).

167. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$.

Решение. Пользуясь формулой сложения котангенсов, находим

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{\sin x\cdot\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[-\frac{\sin(a-x)}{a-x}\right]\cdot\frac{1}{\sin a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 a}\quad(a\neq k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

168. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

Решение. Приведя числитель к произведению, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[-2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot2\sin\frac{x}{2}\cdot2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos(a+x)\right)=-\cos a.$$

169. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$.

Решение. Аналогично предыдущему

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[(\operatorname{ctg}(a+2x)-\operatorname{ctg}(a+x))-(\operatorname{ctg}(a+x)-\operatorname{ctg}a)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{-\sin x}{\sin(a+2x)\sin(a+x)}+\frac{\sin x}{\sin(a+x)\sin a}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin(a+x)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{2\cos(a+x)}{\sin a\cdot\sin(a+2x)}\right] =$$

$$= \frac{2\cos a}{\sin^3 a}, \quad a \neq k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

170. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x + 1)(2\sin x - 1)}{(\sin x - 1)(2\sin x - 1)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

171. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

Решение. Разлагая числитель на множители, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) \frac{-1}{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = -24.$$

172. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

Решение. После очевидных преобразований находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg}^2 a\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}(\operatorname{tg}^4 a - 1) = \operatorname{tg}^4 a - 1 = -\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}.$$

173. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

Решение. Уничтожая иррациональность в знаменателе, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}};$$

если $x\to 0$, то $1+x\sin x\to 1$, а тогда (см. пример 144) $\sqrt{1+x\sin x}\to\sqrt{1}=1$. Аналогично, $\sqrt{\cos x}\to 1$ при $x\to 0$. Далее, $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2}$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{4}{3}.$$

174. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Решение. Вычтем и прибавим в числителе единицу; тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}.$$

Здесь воспользовались тем, что $\sqrt[n]{\cos x}\to 1$ при $x\to 0$, а это следует из примеров 165 и 144.

175. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

Решение. Действительно,

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\varepsilon$$

$$\text{при } x>\frac{1}{4\varepsilon^2}=E(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать.

Докажем следующие утверждения:

А) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0)$;

Б) $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$;

В) $\lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^{v(x)} = a^b$ при условии, что существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a \ (a > 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$.

Доказательство. А) Достаточно рассмотреть случай $a > 1$. Имеем

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1|.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Тогда при $|x - x_0| < \frac{1}{n_0}$ имеем

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x-x_0} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}},$$

т. е. $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \frac{1}{n_0}$.

Б) Имеем

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n-1} < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n}$$

при $n > 1$.

Таким образом, при $n > 1$

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, не превосходящее $\frac{1}{2}$. Тогда существует такое n_0, что

$$-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon.$$

Если взять

$$-\frac{1}{n_0} < \frac{x - x_0}{x_0} < \frac{1}{n_0},$$

то для разности $\ln x - \ln x_0 = \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)$ получим следующую оценку:

$$-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(\quad + \frac{x - x_0}{x_0}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon$$

или $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < x_0 \varepsilon$.

В) Согласно условию и пункту Б)

$$v(x)\ln u(x) \to b\ln a \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

А тогда на основании А) имеем

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b = \left\{\lim_{x\to x_0} u(x)\right\}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}.$$

Найти пределы:

176. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

Решение. Согласно утверждениям А) — В) имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}}.$$

Так как $\ln\dfrac{x+2}{2x+1} < 0$ при достаточно больших x, а $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$, то искомый предел равен 0.

Примечание. Решение примеров 177—182, 191, 198, 199, 200, 209 основано на простом приеме раскрытия неопределенности 1^∞.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$. Тогда на основании утверждения В) получаем

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0}\left\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}.$$

177. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Решение. В нашем случае $u = \dfrac{x^2+1}{x^2-2}$; $v = x^2$; $(u-1)v = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3.$$

178. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение. Аналогично предыдущему пишем

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2} = e.$$

179. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Решение. Очевидно,

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\sin\pi x\,\operatorname{ctg}\pi x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x} = e^{-1}.$$

180. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)}} = e^0 = 1.$$

181. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Решение. На основании примечания о раскрытии неопределенности вида 1^∞ при вычислении предела показательно-степенного выражения u^v имеем

$$(u-1)v = \frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\quad\frac{1}{\sin^3 x};$$

$$\lim_{x\to0}(u-1)v = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}\quad\frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\left|1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right|(1+x+o(x))(x^2+o(x^2))} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

(воспользовались асимптотическим представлением функций в окрестности точки $x=0$). Таким образом,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

182. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

Решение. Так как $\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x} = \frac{1}{x}+1+o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)x} = e.$$

183. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. На основании утверждения В) имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

Таким образом, $\ln(1+x) = x+o(x)$ при $x\to0$.

184. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

Решение. Вынося за скобки в числителе и знаменателе старшие степени x и пользуясь утверждением Б), находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}=\frac{1}{5}.$$

185. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}\qquad (x>0).$

Решение. На основании свойств логарифмов и утверждения Б) получим

$$\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{\log e}{x^2}\cdot\lim_{h\to0}\ln\left[\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]=-\frac{\log e}{x^2}.$$

186. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}.$

Решение. Пользуясь очевидными преобразованиями, получаем, что

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos ax)^{\frac{1}{\cos ax-1}}}{\ln(\cos bx)^{\frac{1}{\cos bx-1}}}\cdot\frac{\frac{\cos ax-1}{a^2x^2}}{\frac{\cos bx-1}{b^2x^2}}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right]=\frac{a^2}{b^2}.$$

187. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}$ (μ — вещественное).

Решение. а) Пусть $a^x-1=t$. Тогда $t\to0$ при $x\to0$, поэтому

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\ln a.$$

Таким образом, $a^x=1+x\ln a+o(x)$ при $x\to0$ $(e^x=1+x+o(x))$.

б) Очевидно, $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=$ $=\mu$, так как $\mu\ln(1+x)\to0$ при $x\to0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (на основании утверждения Б); примеров 187, а); 183). Таким образом, $(1+x)^\mu=1+\mu x+o(x)$ при $x\to0$.

188. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^\mu x}{x^2}$ (μ — вещественное).

Решение. Используя результат предыдущего примера, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^\mu x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{[1+(\cos x-1)]^\mu-1}{\cos x-1}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\mu}{2}.$$

189. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}$ $(\alpha\neq 0)$.

Решение. а) Имеем

$$\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-\frac{1-(\cos^2 x)^{\sqrt{2}}}{x^2}.$$

На основании примеров 187, а) и 188 находим, что искомый предел равен $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

б) После очевидных преобразований получим

$$\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\,\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^{a-1}\,\frac{\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a-1}{\dfrac{x-a}{a}}.$$

Предел первого слагаемого (см. пример 187, а)) равен $a^a\ln a$. Предел второго слагаемого (см. пример 187, б)) равен a^a. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

в) Имеем

$$\frac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}=\frac{(e^{\alpha x^2}-1)\cos^{2\alpha}x+\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}=$$

$$=\frac{e^{\alpha x^2}-1}{\alpha x^2}\,\alpha\cos^{2\alpha}x-\frac{1-\cos^{2\alpha}x}{x^2}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x^2}-1}{\alpha x^2}\,\alpha\cos^{2\alpha}x=\alpha$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2\alpha}x}{x^2}=\alpha,$$

то предел всего выражения равен нулю.

190. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

Решение. Представим функцию $\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=\varphi(x)$ в виде суммы двух слагаемых: $\varphi(x)=\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$. Очевидно,

$$\varphi_1(x)=\frac{e^{a\ln x}\,(e^{(x-a)\ln x}-1)}{(x-a)\ln x}\cdot\ln x.$$

Так как при $x \to a$ $e^{a \ln x} \to a^a$, $\dfrac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{(x-a)\ln x} \to 1$, $\ln x \to \ln a$, то $\lim\limits_{x \to a} \varphi_1(x) = a^a \ln a$. Далее,

$$\lim_{x \to a} \varphi_2(x) = \lim_{x \to a} \frac{a^a\left[\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^a - 1\right]}{\frac{x-a}{a} \cdot a} =$$

$$= a^a \lim_{x \to a} \frac{\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\frac{x-a}{a}} \cdot \frac{1}{a} = a^a.$$

Окончательно получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \ln a + a^a = a^a \cdot \ln(ae).$$

191. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

Решение. Ищем предел показательно-степенного выражения u^v; имеем (при $x \to 0$)

$$(u-1)v = \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{1 + \sin x \cos \beta x} \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} x^2 + o(x^2)\right]\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3}{1 + (x + o(x))\left(1 - \frac{\beta^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)(x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)},$$

следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} x^2}{x^2}} = e^{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}}.$$

192. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi[(x^\alpha - 1) + 1]}{\sin \pi[(x^\beta - 1) + 1]} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi(x^\alpha - 1)}{\sin \pi(x^\beta - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\pi(x^\alpha - 1)}{\pi(x^\beta - 1)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{(1+t)^\beta - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha t + o(t)}{\beta t + o(t)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(воспользовались результатом решения примера 187, б)).

193. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln[\cos(\pi 2^x)]}$.

Решение. Полагая $\sin^2(\pi 2^x) = t$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln|\cos(\pi 2^x)|} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\ln(1-t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{-\frac{t}{2}+o(t)} = -2$$

(воспользовались формулой $\ln(1-t) = -t + o(t)$).

194. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ $\quad (a>0)$.

Решение. Полагая $x - a = t$ и пользуясь результатом примера 187, б), получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{t\to 0} a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(1+\frac{t}{a}\right)^\alpha - 1}{\left(1+\frac{t}{a}\right)^\beta - 1} =$$

$$= a^{\alpha-\beta}\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{t}{a}+o(t)}{\beta\cdot\frac{t}{a}+o(t)} = \frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}.$$

195. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^a}{h^2}$ $\quad (a>0)$.

Решение. Используя результат примера 187, а), находим

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2} = \lim_{h\to 0} a^{x-h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2 = a^x\ln^2 a.$$

196. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

Решение. Используя второй замечательный предел, после очевидных преобразований находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right]^{-b}\cdot\left[\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right]^{-a} = e^{-a-b}.$$

197. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right)$ $\quad (x>0)$.

Решение. Имеем (см. 187, а))

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\(x>0)}} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}}\,\frac{x^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}}\,\frac{n^2}{n^2+n} = \ln x.$$

198. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $\quad (a>0,\ b>0)$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\ln(ab)} = \sqrt{ab}.$$

199. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

Решение. Обозначим $f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}$. Очевидно, $f(x)\to 1$ при $x\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left[a\frac{a^x-1}{x}+b\frac{b^x-1}{x}+c\frac{c^x-1}{x}\right] =$$

$$= \frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c} = \ln\left[(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}\right],$$

то искомый предел равен $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

200. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}},$$

где $f(x)=\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 0}a^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}b^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}b^x=1$ (см. утверждение А)). Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}{x(a^x+b^x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}x+\frac{b^{x^2}-1}{x^2}x-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

то искомый предел равен $e^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

201. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

Решение. Поскольку (см. пример 187, а))

$$a^{x^2} - b^{x^2} = x^2 \ln \frac{a}{b} + o(x^2),$$

$$(a^x - b^x)^2 = \left[x \ln \frac{a}{b} + o(x)\right]^2 = x^2 \ln^2 \frac{a}{b} + o(x^2),$$

то

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \ln \frac{a}{b} + o(x^2)}{x^2 \ln^2 \frac{a}{b} + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \ln \frac{a}{b}}{x^2 \ln^2 \frac{a}{b}} = \left[\ln \frac{a}{b}\right]^{-1}.$$

202. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \qquad (a > 0).$

Решение.

$$\lim_{x \to a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} = \lim_{x \to a} \frac{a^{a^x - x^a} - 1}{a^x - x^a} \cdot a^{x^a}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to a} (a^x - x^a) = 0$ (это следует из примера 189), а $\lim\limits_{x \to a} x^a = \lim\limits_{x \to a} e^{a \ln x} = e^{a \ln a} = a^a$ (см. утверждение В)) и $\lim\limits_{x \to a} a^{x^a} = a^{a^a}$ (см. утверждение А)), то

$$\lim_{x \to a} \frac{a^{a^x - x^a} - 1}{a^x - x^a} \cdot a^{x^a} = a^{a^a} \ln a.$$

203. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right).$

Решение. Пользуясь асимптотической формулой примера 183, находим

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [x \ln 2 + \ln(1 + 2^{-x})] \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [x \ln 2 + 2^{-x} + o(2^{-x})] \left(\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 3 \ln 2 = \ln 8.$$

204. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \qquad (a > 1,\ k > 0).$$

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$ (см. пример 25), то одновременно будет и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^k}{a^n} = 0.$$

Следовательно, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon.$$

Пусть $x > N + 1$; положим $n = [x]$ (целая часть x). Тогда $n > N$ и $n \leqslant x < n + 1$; так что

$$0 < \frac{x^k}{a^x} < \frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon.$$

Это и доказывает наше утверждение.

205. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0 \qquad (a > 1,\ \varepsilon > 0).$$

Доказательство. Положим $x^\varepsilon = t$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t}.$$

В силу равенства (см. пример 29) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a (n+1)}{n} = 0.$$

Пусть $\varepsilon_1 > 0$ — произвольное. Тогда существует такое натуральное число N, что при $n > N$

$$0 < \frac{\log_a (n+1)}{n} < \varepsilon_1.$$

Для $t > N + 1$ положим $n = [t]$. Тогда $n > N$ и $n \leqslant t < n + 1$, так что

$$0 < \frac{\log_a t}{t} < \frac{\log_a (n+1)}{n} < \varepsilon_1,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t} = 0$, а тем самым и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0$.

Найти пределы:

206. $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$.

Решение. Исходя из свойств логарифмов, утверждения Б) и второго замечательного предела, получим

$$\lim_{x\to+\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2}\cdot x^x}{(x+1)^{2(x+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \ln \left[\frac{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot(x+2)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot(x+1)}\right] = 0.$$

207. $\lim\limits_{x\to+0} \left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right] \qquad (a > 1).$

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}=\lim_{x\to+0}\frac{1+\frac{\ln a}{\ln x}}{1-\frac{\ln a}{\ln x}}=1.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln a^2\ln(x\ln a)}{\ln\frac{x}{a}}\cdot\ln\left[\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)^{\frac{1}{\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1}}\right]=\ln a^2.$$

Здесь использовано равенство

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(x\ln a)}{\ln\frac{x}{a}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(x\ln a)}{\ln(x\ln a)-\ln(a\ln a)}=1.$$

208. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Решение. Так как функции $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ и $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$ стремятся к единице при $x\to+\infty$, то в силу формул

$$\ln f=\ln[1+(f-1)]=f-1+o(f-1),$$
$$\ln\varphi=\varphi-1+o(\varphi-1)\qquad(x\to+\infty)$$

имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f-1}{(\varphi-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{8}.$$

209. $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)\cdot\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\left[\frac{x}{x+1}+o(x)\right]\cdot\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}2\left(\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{(x^2+1)o(x)}{x}\right)}=e^2$$

(так как $e^{\frac{x}{x+1}} = 1 + \frac{x}{x+1} + o(x)$ при $x \to 0$, на основании 187, а)).

210. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha} x)(1-\sin^{\beta} x)}}$ $\quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

Решение. Положим $\sin x = 1 - t$. Тогда $t \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha} x)(1-\sin^{\beta} x)}} = \lim_{t\to 0} \frac{1-(1-t)^{\alpha+\beta}}{\sqrt{[1-(1-t)^{\alpha}][1-(1-t)^{\beta}]}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\alpha+\beta)t + o(t)}{\sqrt{[\alpha t + o(t)][\beta t + o(t)]}} = \lim_{t\to 0} \frac{(\alpha+\beta)t + o(t)}{\sqrt{\alpha\beta t^2 + o(t^2)}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha+\beta+\frac{o(t)}{t}}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{1+\frac{o(x^2)}{\alpha\beta t^2}}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

(воспользовались результатом решения примера 187, б)).

Решить примеры (при решении примеров 211—215 используются формулы

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

а также формулы гиперболической тригонометрии):

211. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x}$.

Решение. На основании примера 187, а) имеем

$$\text{а) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1.$$

На основании а) находим

$$\text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Используя результат решения а) и утверждения А), получим:

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1.$$

212. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$.

Решение. Пользуясь результатом решения примера 211, а), а также утверждением Б), имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln\left[(\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{\operatorname{ch} 3x-1}}\right]}\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} 3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln\left[(\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{\operatorname{ch} 3x-1}}\right]}\left(\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}{\operatorname{sh}^2\frac{3x}{2}}\right)\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.$$

213. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x}$.

Решение. Из утверждения А) следует, что $\lim\limits_{t\to t_0}\operatorname{ch} t=\operatorname{ch} t_0$, поэтому после очевидных преобразований получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}{\operatorname{ch} x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}{\operatorname{ch} x}\cdot 2\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=2\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

214. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch} x)$.

Решение. На основании утверждения Б) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch} x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2}{1+e^{-2x}}=\ln 2.$$

215. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$.

Решение. Используя результаты 187, а) и 211, б), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{\sin 2x}-1}{2x}\cdot 2-\frac{e^{\sin x}-1}{x}}{\frac{\operatorname{th} x}{x}}=1.$$

216. Доказать, что

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} x_0.$$

Доказательство. Пусть $x_0>0$ и $x>0$. Положим $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} x_0=t$. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ имеем $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} x_0|=|t|\leqslant|\operatorname{tg} t|=\left|\dfrac{x-x_0}{1+xx_0}\right|<|x-x_0|<\varepsilon$, как только $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. Таким образом, соотношение доказано для $x_0>0$.

Если $x_0 < 0$, то доказательство сводится к уже рассмотренному случаю, поскольку $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$. Справедливость требуемого соотношения при $x_0 = 0$ вытекает из очевидного неравенства

$$0 \leqslant |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| = |\operatorname{arctg} x| < |x|.$$

217. Доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0.$$

Доказательство. Пользуясь тождеством

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

справедливым при всех значениях x, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0 = \operatorname{arcctg} x_0.$$

218. Доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad (-1 \leqslant x_0 \leqslant 1).$$

Доказательство. Заметим, что если $0 \leqslant x < 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, а если $0 < x \leqslant 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$. Поэтому для $x \in [0, 1)$ имеем

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \lim_{x \to x_0} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} = \arcsin x_0.$$

В точке $x_0 = 1$ имеем (см. пример 217)

$$\lim_{x \to 1-0} \arcsin x = \lim_{x \to 1-0} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1.$$

Случай $-1 \leqslant x_0 \leqslant 0$ сводится к уже рассмотренному, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. А поскольку для точки $x_0 = 0$ левое и правое предельные значения равны нулю, то доказательство завершено.

219. Доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad (-1 \leqslant x_0 \leqslant 1).$$

Доказательство. Требуемое соотношение следует из предыдущего примера и тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

220. Доказать, что

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$; б) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$; г) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

Доказательство. а) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Тогда из неравенства

$$x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = E(\varepsilon)$$

вытекает, что $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, т. е.

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon, \quad \forall x > E(\varepsilon).$$

б) Имеем $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

в) Используя то, что $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

г) Аналогично

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

221. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x} \quad (a \neq 0).$

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = 1,$$

то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{ax} \cdot a = a.$$

222. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \quad (a \neq 0).$

Решение. Из того, что $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$, следует, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} ax)} \cdot a = a.$$

223. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}.$

Решение. Поскольку $\lim\limits_{h\to 0} [\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x] = 0$, то

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(1+x^2+hx)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

224. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right).$

Решение. Имеем $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \to 0$ при $x \to \infty$, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \frac{1 - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

225. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.

Решение. Избавляясь от радикалов в числителе, получаем

а) $$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}\right)|x|} = -1.$$

б) $$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}} = 1.$$

226. а) $\lim\limits_{x\to1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$.

Решение. а) Положим $\frac{1}{1-x} = \operatorname{tg} t$. Тогда $\operatorname{tg} t \to +\infty$ при $x \to 1-0$, а так как $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, то $t = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to 1-0$.

б) При прежней замене $\operatorname{tg} t \to -\infty$, если $x \to 1+0$. Отсюда следует, что $t = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} \to -\frac{\pi}{2}$ при $x \to 1+0$.

227. а) $\lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; б) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Решение. а) Если $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $e^{\frac{1}{x}} \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$.

б) Если же $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \to 0$, т. е. искомый предел равен 0.

Найти:

228. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

Решение. Так как $0<\left|x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}\right|\leqslant|x|$ при всех x из области существования, то

$$\lim_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}=0.$$

229. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

Решение. Положим $x=\frac{1}{y}$. Поскольку $y=[y]+r$, где $0\leqslant\leqslant r<1$, то

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{y\to\infty}\frac{y-r}{y}=1.$$

230. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Решение. Записав последовательность $y_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ в виде $y_n=\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n+n))$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin((\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)+n\pi)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

231. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

Решение. Аналогично примеру 230 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2((\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)+n\pi)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n}-n))=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=1.$$

232. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n\text{ раз}}$.

Решение. Пусть $\sin x\geqslant 0$ (при $\sin x<0$ поступаем аналогично). Если $a_n=\underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n\text{ раз}}$, то

$$0\leqslant a_n=\sin a_{n-1}\leqslant a_{n-1}\leqslant 1.$$

Отсюда следует монотонность и ограниченность, а значит, и сходимость последовательности $\{a_n\}$. Обозначая $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и переходя к пределу в равенстве

$$a_n=\sin a_{n-1},$$

получаем уравнение $l=\sin l$, из которого находим, что $l=0$.

233. Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A}\psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ при $x = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа и $\varphi(x) = 0$ при x иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$, причем $x \to 0$.

Решение. Из условия примера следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что

$$|\psi(u) - B| < \varepsilon, \tag{1}$$

как только

$$0 < |u - A| < \sigma, \tag{2}$$

т. е. неравенство (1) выполняется для всех значений u из σ-окрестности точки A, исключая саму точку A.

Далее, согласно условию задачи, для произвольного $\sigma > 0$, в том числе и для σ из неравенства (2), существует такое $\delta_1(\sigma(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), \tag{3}$$

функция $u = \varphi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x) - A| < \sigma, \tag{4}$$

причем не исключается случай, когда $\varphi(x) = A$.

Но при $u = \varphi(x) = A$ функция $\psi(u) = \psi(\varphi(x))$ может быть вовсе не определена или же определена, но ее значение $\psi(A) \neq \lim\limits_{u\to A}\psi(u)$. В обоих случаях неравенство (3) не обеспечивает выполнение неравенства (1). Для того чтобы из условий $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to A}\psi(x) = B$ вытекало равенство $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x)) = B$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$A = \varphi(a) \quad \text{и} \quad B = \psi(A).$$

В предложенном примере второе из этих равенств не выполняется.

234. Пусть для всех $x \in (x_0, x_0 + 1]$, где x_0 — фиксировано, выполнены условия:

1) $P_{nk}(x) \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x) \equiv 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk}(x) = 0$ при каждом фиксированном k;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = l$.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = l$, где $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\, u_k(x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Из условия 4) следует существование такого числа $N = N(\varepsilon, x) > 0$, что

$|u_n(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Из этого же условия следует существование такого числа $M > 0$, что

$$|u_n(x)| \leqslant M, \quad |u_n(x) - l| \leqslant 2M, \quad \forall n.$$

Из условия 3) вытекает существование такого числа $n_0 = n_0(\varepsilon, x) > N$, что

$$P_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{4NM} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad \forall n > n_0.$$

Из этих неравенств и условий 1), 2) теоремы следует неравенство

$$|t_n - l| = \left| \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) u_k(x) - l \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x) |u_k(x) - l| = P_{n1}(x) |u_1(x) - l| +$$

$$+ P_{n2}(x) |u_2(x) - l| + \cdots + P_{nN}(x) |u_N(x) - l| +$$

$$+ P_{n\,N+1} |u_{N+1}(x) - l| + \cdots + P_{nn}(x) |u_n(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4NM} N2M +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} (P_{n\,N+1}(x) + \cdots + P_{nn}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = l$.

235. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b), то

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geqslant c > 0)$,

предполагая, что пределы в правых частях равенства существуют.

в) Доказать, что если $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ и $f(x)$ ограничена снизу на каждом конечном интервале (a, b), то $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Доказательство. а) Для доказательства применим пример 234, полагая при этом, что

$$P_{n1}(x) = \frac{x+1}{x+n}, \quad P_{nk}(x) = \frac{1}{x+n} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

$$0 < x_0 < x \leqslant x_0 + 1, \quad x_0 > a,$$

$$u_1(x) = \frac{f(x+1)}{x+1}, \ u_n(x) = f(x+n) - f(x+n-1) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Тогда $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x) u_k(x) = \frac{f(x+n)}{x+n}$.

Все условия теоремы выполнены, поэтому

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x+n)}{x+n} = \lim_{n \to \infty} [f(x+n) - f(x+n-1)] = l.$$

Поскольку l не зависит от x, то из последнего равенства следует, что
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=l.$$

б) Поскольку $f(x)\geqslant c>0$, то определена функция $F(x)=\ln f(x)$. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=l$. Тогда, пользуясь теоремой пункта а) и возможностью предельного перехода в показателе степени, получаем требуемое:
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=e.$$

в) Для произвольного $E>0$ существует такое число $x_0>0$, что при $x>x_0$
$$f(x+1)-f(x)>2E.$$
Отсюда следует, что $f(x+n)-f(x)>2nE$ и
$$\frac{f(x+n)}{x+n}>\frac{f(x)+2nE}{x+n}.$$
Поскольку $f(x)\geqslant c>0$ при $x_0<x\leqslant x_0+1$, то существует такое число n_0, что
$$\frac{f(x+n)}{x+n}>E$$
при $\forall n>n_0$, т. е. если $t=x+n$, $x_0<x\leqslant x_0+1$, $n>n_0$, то
$$\frac{f(t)}{t}>E,$$
что эквивалентно требуемому утверждению.

236. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x>a$; 2) ограничена в каждой области $a<x<b$; 3) существует конечный или бесконечный
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^m}=l,$$
то
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{m+1}}=\frac{l}{m+1}.$$

Доказательство. Пусть l — конечное. Тогда из условия теоремы следует, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}=\frac{l}{m+1}.$$
Применяя пример 234, полагая при этом, что
$$P_{n1}(x)=\frac{(x+1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}},\quad P_{nk}(x)=\frac{(x+k)^{m+1}-(x+k-1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}}$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n),\quad 0 < x_0 < x \leqslant x_0 + 1,\quad x_0 > a,$$

$$u_1(x) = \frac{f(x+1)}{(x+1)^{m+1}},\quad u_n(x) = \frac{f(x+n) - f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}}$$

$$(n = 2,\ 3,\ \ldots),$$

получим $t_n = \dfrac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}}$.

Все условия примера 234 выполняются, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}} = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \frac{l}{m+1},$$

а поскольку предел $\dfrac{l}{m+1}$ не зависит от x, то последнее равенство эквивалентно тому, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

Пусть $l = +\infty$. Тогда из условия следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}}{f(x+n) - f(x+n-1)} = 0,$$

а поскольку последовательность

$$\{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}\}_{n=1}^{\infty},$$

монотонно возрастая, стремится к $+\infty$, то таким свойством обладает и последовательность

$$\{f(x+n) - f(x+n-1)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Положив

$$P_{n1}(x) = \frac{f(x+1)}{f(x+n)},\quad P_{nk}(x) = \frac{f(x+k) - f(x+k-1)}{f(x+n)}$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

$$0 < x_0 < x \leqslant x_0 + 1,\quad x_0 > a,$$

$$u_1(x) = \frac{(x+1)^{m+1}}{f(x+1)},\quad u_n(x) = \frac{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}}{f(x+n) - f(x+n-1)}$$

$$(n = 2,\ 3,\ \ldots)$$

и применив пример 234, получим, что

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\, u_k(x) = \frac{(x+n)^{m+1}}{f(x+n)} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

237. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

Доказательство. а) Пусть $x \neq 0$ (при $x = 0$ равенство очевидно). Получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x.$$

б) Имеем (при $x > 0$)

$$X_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$
$$+ \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$
$$< 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = Y_n.$$

Пусть $n > k$. Тогда из неравенства

$$X_n > 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$ получаем

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} = Y_k.$$

А так как Y_k монотонно возрастает, то при любом n справедливо неравенство

$$X_n < Y_n < e^x$$

в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = e^x$; при $x > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = e^x.$$

Пусть теперь x произвольное по знаку. Тогда, рассматривая разность

$$Y_n - X_n = \frac{x^2}{2!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{x^3}{3!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right] +$$
$$+ \cdots + \frac{x^k}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] +$$
$$+ \cdots + x^n \quad \frac{1}{n!} - \frac{1}{n^n}\Big)$$

и учитывая неравенство

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{k(k-1)}{2n} \qquad (k < n),$$

которое легко доказать методом индукции, получаем оценку

$$|Y_n - X_n| \leqslant \frac{|x|^2}{2!}\cdot\frac{2\cdot 1}{2n} + \frac{|x|^3}{3!}\cdot\frac{3\cdot 2}{2n} + \cdots +$$

$$+\frac{|x|^k}{k!}\cdot\frac{k(k-1)}{2n}+\dots+\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2n}+$$

$$+|x|^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n^n}\right)=\frac{|x|^2}{2n}\left(1+|x|+\frac{|x|^2}{2!}+\dots+\frac{|x|^k}{k!}+\right.$$

$$\left.+\dots+\frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!}\right)+|x|^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n^n}\right).$$

Пусть $E>0$ произвольное. Тогда для $|x|\leqslant E$ имеем

$$\overline{Y}_{n+3}=1+|x|+\frac{|x|^2}{2!}+\dots+\frac{|x|^k}{k!}+\dots+\frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!}<e^{|x|}<e^E,$$

а для разности Y_n-X_n справедлива оценка

$$|Y_n-X_n|<\frac{E^2}{2n}e^E+E^n\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{n^n}\right].$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}[Y_n-X_n]=0$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}Y_n=\lim_{n\to\infty}X_n=e^x.$$

238. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi.$$

Доказательство. Имеем (см. пример 35) $e=1+1+\frac{1}{2!}+$ $+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$ $(0<\theta_n<1)$, причем

$$\theta_n=\frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}}=n\cdot n![e-y_n]=n\cdot n!\left[1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}-y_n\right]=n\cdot n!\left[\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right]=$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\to 1\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Пользуясь этим, получаем

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi n!\,y_n+\frac{2\pi\theta_n}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}\cdot 2\pi\theta_n=2\pi.$$

Построить графики функций:

239. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x>0)$.

Решение. Если $0<x\leqslant 1$, то $1<\sqrt[n]{1+x^n}\leqslant\sqrt[n]{2}$ и, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=1$. Если же $1<x<+\infty$, то $\sqrt[n]{1+x^n}=$ $=x\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}$ и $\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}\to 1$ при $n\to\infty$; поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=x.$$

Таким образом,

$$y=\begin{cases}1, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & \text{если} \quad 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Построить график предоставляем читателю.

240. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0).$

Решение. Имеем

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3},\ \text{если}\ 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}<x\sqrt[n]{3},$$

$$\text{если}\ 1<x<2;$$

$$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}<\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{2},$$

$$\text{если}\ 2\leqslant x<\infty.$$

А так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, то окончательно имеем

$$y=\begin{cases}1, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & \text{если} \quad 1<x<2;\\ \frac{x^2}{2}, & \text{если} \quad 2\leqslant x<\infty.\end{cases}$$

Построить график предлагаем читателю.

241. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\mathrm{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}+1}\quad(x\geqslant 0).$

Решение. Так как $0\leqslant\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{4}<1$ при $0\leqslant x<1$ и $4k-1<$ $<x<4k+1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}=0$ и $y=\sqrt{x}$. Если $\mathrm{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}>1$ $(4k-3<x<4k-2,\ 4k-2<x<4k-1,\ k=1,\ 2,\ldots)$,

то

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}}}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}}}=x.$$

Наконец, если $\operatorname{tg}^{2n}\frac{\pi x}{4}=1$ $(x=2k-1,\ k=1, 2, \ldots)$, то $y=\frac{1}{2}(x+$ $+\sqrt{x})$.

Теперь легко построить график функции, что мы и предлагаем читателю.

242. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sgn}[\sin^2(n!\,\pi x)]$.

Решение. Если $x=\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые целые числа, то $n!\,x=n!\frac{p}{q}$ — целое число при $n>q$ и, следовательно, для всех $n>q$

$$\sin^2(n!\,\pi x)=0,$$

т. е. $y=0$, если x — рациональное.

Если же x — иррационально, то, так как $n!x\neq$ целому числу, заключаем, что

$$\sin^2(n!\,\pi x)>0,$$

а поэтому $y=\operatorname{sgn}[\sin^2(n!\pi x)]=1$ для иррациональных x.

243. Построить кривую

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

Решение. Так как $0<\frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,\ |y|^n)}\leqslant 2$, если $|x|\leqslant 1, |y|\leqslant$ $\leqslant 1$ и $|x|+|y|\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,\ |y|^n)}}=1$ (см. пример 28) и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=\lim_{n\to\infty}\max(|x|,\ |y|)\sqrt[n]{\frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,\ |y|^n)}}=$$
$$=\max(|x|,\ |y|),$$

т. е. $\max(|x|,\ |y|)=1$ и графиком служит контур квадрата с вершинами в точках $(\pm 1,\ \pm 1)$. Последнее следует из того, что точки $A\ (\pm 1, |y|), |y|\leqslant 1, B\ (|x|, \pm 1), |x|<1$ принадлежат графику.

244. Асимптотой (наклонной) для кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ называется прямая $y=kx+b$, для которой

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0. \tag{1}$$

Используя это определение, вывести необходимые и достаточные условия существования асимптоты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть прямая $y = kx + b$ является асимптотой при $x \to +\infty$ для функции $y = f(x)$. Тогда из определения асимптоты следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b}{x} = k \tag{2}$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{3}$$

Достаточность. Покажем, что равенства (2) и (3) являются и достаточными условиями. В самом деле, находя из (2) число k и подставляя его в (3), получим b. Но тогда из (3) следует (1), т. е. равенства (2) — (3) являются достаточными условиями.

Аналогично рассматривается случай, когда $x \to -\infty$.

Найти следующие пределы:

245. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

Р е ш е н и е. Обозначим $y_n = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$. Тогда (см. пример 237, б)) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^x$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = \lim_{n\to\infty}[y_{2n} - y_n] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} y_{2n} - \lim_{n\to\infty} y_n = e^x - e^x = 0.$$

246. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})]$, если $|x| < 1$.

Р е ш е н и е. Умножая и деля выражение в квадратной скобке на $(1 - x)$, получим

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

247. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\dots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Р е ш е н и е. Умножая и деля на $2^n \sin\dfrac{x}{2^n}$ числитель и знаменатель выражения, предел которого ищем, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\dots\cos\frac{x}{2^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\dots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

248. Пусть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

где $\psi(x)>0$ и $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1, 2, \ldots)$ при $n\to\infty$, т. е. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ при $m=1, 2, \ldots$ и $n>N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$ и $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$, то для $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\, N=N(\varepsilon)$ такой, что

$$1-\varepsilon<\frac{\varphi(\alpha_{mn})}{\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon \qquad (m=1, 2, \ldots, n),$$

откуда в силу условия $\psi(x)>0$ имеем

$$1-\varepsilon<\frac{\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})}{\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})}<1+\varepsilon.$$

Исходя из этого неравенства, а также из условия существования предела в правой части равенства (1), заключаем, что предел числителя существует и равен пределу знаменателя.

Пользуясь утверждением предыдущего примера, найти:

249. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1}{\frac{k}{3n^2}}=1$ (см. пример 148), а $\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}.$$

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}$.

Решение.

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{ka}{n^2}}{\frac{ka}{n^2}}=1$ и $\frac{ka}{n^2}\rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$, поэтому имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an(n+1)}{2n^2}=\frac{a}{2}.$$

251. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{a^2}}-1\right)\quad (a>1).$

Решение. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{k}{n^2}}-1}{\frac{k}{n^2}\ln a}=1$ (см. пример 188), $\dfrac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$ $n\to\infty$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\ln a}{n^2}=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\ln a.$$

252. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right).$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}{\frac{k}{n^2}}=1 \text{ и } \frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0 \quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

253. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}.$

Решение. Легко убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)}{-\frac{k^2a^2}{2n^3}}=1 \quad\text{и}\quad \frac{k^2a^2}{2n^3}\rightrightarrows 0 \quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{2n^3}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{2\cdot 6\cdot n^3}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

В примерах 252 и 253 переходим к пределу в показателе степени на основании утверждения А).

254. Последовательность x_n задана равенствами

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ \ldots$$
$$(a > 0).$$

Найти $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Решение. Заметим, что $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Применяя метод математической индукции, убеждаемся, что последовательность $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, например числом

$$A > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}\ .$$

Следовательно, по известной теореме имеем

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l \geqslant 0,$$

причем $l = \sqrt{a + l}$, откуда находим, что

$$l = \frac{\sqrt{4a + 1} - 1}{2}\ .$$

255. Последовательность y_n определяется с помощью последовательности x_n соотношениями:

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $|\alpha| < 1$. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

Решение.

$$x_1 = y_1 + \alpha y_0;$$
$$x_2 = y_2 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = y_n + \alpha y_{n-1} + \alpha^2 y_{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1} y_1 + \alpha^n y_0.$$

Вычитая из последнего равенства очевидное тождество

$$\frac{b}{1-\alpha} = b + \alpha b + \alpha^2 b + \cdots + \alpha^{n-1} b + \alpha^n b + \frac{b\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\ ,$$

получим

$$x_n - \frac{b}{1-\alpha} = (y_n - b) + \alpha(y_{n-1} - b) + \alpha^2(y_{n-2} - b) + \\ + \cdots + \alpha^n(y_0 - b) - \frac{b\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\ ,$$

откуда с учетом неравенства $|1 - \alpha| > 1 - |\alpha|$ имеем

$$\left| x_n - \frac{b}{1-\alpha} \right| \leqslant |y_n - b| + |\alpha|\,|y_{n-1} - b| + |\alpha|^2 |y_{n-2} - b| + \cdots + \\ + \alpha^n |y_0 - b| + \frac{|b|\,|\alpha|^{n+1}}{1 - |\alpha|}\ .$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}(1 - |\alpha|).$$

Далее, из условия $|\alpha| < 1$ следует, что $\exists N$: $\forall\, n > N$ выполняется неравенство $|\alpha|^{n+1-n_0} < \dfrac{\varepsilon}{n_0 6M}$, где M — верхняя граница $\{|y_i|\}_{i=1}^{\infty}$ и $|\alpha|^{n+1} < \dfrac{\varepsilon(1-|\alpha|)}{3|b|}$.

Следовательно,

$$\left|x_n - \frac{b}{1-\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{3}(1-|\alpha|)(1 + |\alpha| + \cdots + |\alpha|^{n-n_0}) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{n_0 6M} \cdot 2M \cdot n_0 + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{при} \quad \forall\, n > N,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{b}{1-\alpha}$.

256. Последовательность определяется следующим образом:

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решение. Рассмотрим разность между x_n и корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$. Имеем

$$x - x_1 = \frac{x_0 - x}{(1+x)(1+x_0)}, \quad x - x_2 = -\frac{x_0 - x}{(1+x)^2(1+x_0)(1+x_1)}, \ldots,$$

$$x - x_n = \frac{(-1)^{n-1}(x_0 - x)}{(1+x)^n (1+x_0)(1+x_1)\ldots(1+x_{n-1})}.$$

Так как $0 < x_n < 1$ (в чем легко убедиться), то

$$|x - x_n| \leqslant \frac{|x_0 - x|}{|x+1|^n}.$$

Корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$ будут числа $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ и, так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$, то отрицательный корень отбрасываем. В последнее неравенство подставим $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; получаем

$$\left|x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \leqslant \frac{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|^n} < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N = N(\varepsilon),$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

257. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $-\frac{1}{8} < y_2 < \frac{1}{2}$. Если предположить, что $-\frac{1}{8} < y_n < \frac{1}{2}$, то $-\frac{1}{8} < y_{n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_n^2}{2} < \frac{1}{2}$, т. е. $-\frac{1}{8} < y_n < \frac{1}{2}$ при всех $n > 2$. Рассмотрим разности между x_n и корнями уравнения $y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}$:

$$y - y_1 = -\frac{y^2}{2};$$

$$y - y_2 = -\frac{1}{2}(y^2 - y_1^2) = -\frac{1}{2}(y - y_1)(y + y_1) = \frac{1}{2^2}y^2(y + y_1); \quad (1)$$

. . . .

$$y - y_n = \frac{(-1)^n}{2^n}y^2(y + y_1)(y + y_2)\ \ldots\ (y + y_{n-1}).$$

Только один из корней уравнения, а именно $y = \sqrt{1+x} - 1$, находится в тех же пределах, что и члены последовательности $\{y_n\}$, причем

$$|y + y_n| \leqslant |\sqrt{1+x} - 1| + |y_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{2} \leqslant 1.$$

Поэтому из (1) следует, что $|y - y_n| < \frac{1}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1$.

258. Последовательность функций $y_n = y_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Решение. Имеем $y_2 > y_1 = \frac{x}{2}$ и $y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$. Следовательно, если $y_n > y_{n-1}$, то $y_{n+1} > y_n$, т. е. последовательность монотонно возрастает.

Далее, легко показать, что $\{y_n\}$ ограничена сверху числом 1. Поэтому последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел l. Переходя к пределу в равенстве $y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}$, находим $l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2}$. Отсюда $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. А так как предел не может превышать единицу, то $l = 1 - \sqrt{1-x}$.

259. Пусть $x > 0$ и $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что если $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, то последовательность y_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условию

$$y_1 = y_0(2 - xy_0) > 0, \quad 2 - xy_0 > 0, \quad 1 - xy_0 > -1.$$

А так как $y_0 > 0$, $x > 0$, то $1 - xy_0 < 1$, следовательно, $|1 - xy_0| < 1$.

Имеем

$$\frac{1}{x} - y_1 = \frac{1}{x} - 2y_0 + xy_0^2;$$

$$1 - xy_1 = 1 - 2xy_0 + x^2y_0^2 = (1 - xy_0)^2;$$

$$1 - xy_2 = (1 - xy_1)^2 = (1 - xy_0)^{2^2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1 - xy_n) = (1 - xy_0)^{2^n}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} (1 - xy_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - xy_0)^{2^n} = 0,$$

так как $|1 - xy_0| < 1$, а так как $x > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

260. Для нахождения $y = \sqrt{x}$, где $x > 0$, применяется следующий процесс: $y_0 > 0$ — произвольно,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \quad (n \geqslant 1),$$

получаем

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_0 - \sqrt{x}}{y_0 + \sqrt{x}}\right)^{2^n}$$

и, так как $\left|\frac{y_0-\sqrt{x}}{y_0+\sqrt{x}}\right|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0-\sqrt{x}}{y_0+\sqrt{x}}\right)^{2^n}=0.$$

Тогда для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists N\colon \forall n>N$

$$\left|\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}\right|=\frac{1}{\left|1+\dfrac{2\sqrt{x}}{y_n-\sqrt{x}}\right|}<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}+\varepsilon}$$

или

$$\frac{2\sqrt{x}}{\varepsilon}+1<\left|1+\frac{2\sqrt{x}}{y_n-\sqrt{x}}\right|\leqslant 1+\frac{2\sqrt{x}}{|y_n-\sqrt{x}|},\quad |y_n-\sqrt{x}|<\varepsilon$$

для $\forall\, n>N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{x}$.

261. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x-\xi|\leqslant h$ $(h>0)$, то число

$$\omega_0[f]=\lim_{h\to 0}\omega_h[f]$$

называется колебанием функции $f(x)$ в точке ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x=0$, если:

а) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

в) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$; г) $f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

ж) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Согласно определению колебания функции в точке имеем:

а) $\omega_h[f]=\sup\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\sin\frac{1}{x}\right\}-\inf\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\sin\frac{1}{x}\right\}=1-(-1)=2;$

$\omega_0[f]=\lim\limits_{h\to 0}\omega_h[f]=\lim\limits_{h\to 0}2=2;$

б) $\omega_h[f]=\sup\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\}-$

$-\inf\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\}\geqslant\sup\limits_{\frac{1}{|k|\pi}\leqslant|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\}=k^2\pi^2,$

где k — целые числа, такие, что $|k|\pi\geqslant\frac{1}{h}$.

Поэтому $\omega_h[f]=+\infty,\quad \omega_0[f]=+\infty;$

в) $0 \leqslant \omega_h[f] = \sup\limits_{|x| \leqslant h}\left\{x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)\right\} -$

$- \inf\limits_{|x| \leqslant h}\left\{x + \left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)\right\} \leqslant 3h - (-3h) = 6h,$

$\omega_h[f] = 0, \quad \omega_0[f] = 0$

г) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x| \leqslant h}\left\{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} - \inf\limits_{|x| \leqslant h}\left\{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2} -$

$-\left(-\frac{1}{2}\right) = 1; \quad \omega_0[f] = \lim\limits_{h \to 0}\omega_h[f] = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1;$

д) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x| \leqslant h}\left\{\frac{|\sin x|}{x}\right\} - \inf\limits_{|x| \leqslant h}\left\{\frac{|\sin x|}{x}\right\} = \lim\limits_{h \to 0}\left[\frac{|\sin h|}{h} -\right.$

$\left.-\left(-\frac{|\sin h|}{h}\right)\right] = 2; \quad \omega_0[f] = \lim\limits_{h \to 0}\omega_h[f] = 2;$

е) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x| \leqslant h}\left\{\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right\} - \inf\limits_{|x| \leqslant h}\left\{\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right\} =$

$= \lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{h}}} - \frac{1}{1 + e^{+\frac{1}{h}}}\right) = 1 + 0 = 1 = \omega_0[f];$

ж) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x| \leqslant h}\left\{(1 + |x|)^{\frac{1}{x}}\right\} - \inf\limits_{|x| \leqslant h}\left\{(1 + |x|)^{\frac{1}{x}}\right\} =$

$= \lim\limits_{h \to +0}\left[(1 + h)^{\frac{1}{h}} - (1 + h)^{-\frac{1}{h}}\right] = \lim\limits_{h \to 0}\left[(1 + h)^{\frac{1}{h}} - \frac{1}{(1 + h)^{\frac{1}{h}}}\right] =$

$= e - \frac{1}{e} = \frac{e - e^{-1}}{2} \cdot 2 = 2\operatorname{sh} 1 = \omega_0[f].$

262. Определить $l = \underline{\lim\limits_{x \to 0}} f(x)$ и $L = \overline{\lim\limits_{x \to 0}} f(x)$, если:

а) $f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2)\cos\frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

Решение. а) Так как $\inf\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 0$ при $x = x_n = -\frac{1}{n\pi}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, а $\lim\limits_{n \to \infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \inf\left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} = -1$, то

$l = \underline{\lim\limits_{x \to 0}}\left[\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{n \to \infty}\left[\sin^2 n\pi + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(-n\pi)\right] = -1.$

Аналогично, $\sup\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\}=1$ при $x=x_n=\frac{2}{\pi(1+2n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$, а $\lim\limits_{n\to\pi}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n}=\sup\left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\}=1$, то $L=\varlimsup\limits_{x\to 0}\left[\sin^2\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi}+\right.$ $\left.+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin^2\frac{\pi(1+2n)}{2}+\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi(1+2n)}{n}\right]=1+1=2.$

б) Имеем $\inf\left\{\cos\frac{1}{x}\right\}=-1$ при $x=x_n=-\frac{1}{(2n-1)\pi}$ $(n=$ $=1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=-1$, а $\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2)=2$, так что

$$l=\varliminf_{x\to 0}(2-x^2)\cos\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cos(2n-1)\pi\right]=-2.$$

Аналогично находим, что $L=\varlimsup\limits_{x\to 0}(2-x^2)\cos\frac{1}{x}=+2.$

в) Покажем, что $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\ln(1+\alpha)<\alpha$. Действительно, для рациональных $\alpha=r=\frac{m}{n}$ с учетом неравенств $\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<$ $<\frac{1}{k}$ имеем $\ln(1+r)=\ln\left(1+\frac{m}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{m+n-1}\right)+\ln\left(1+\right.$ $\left.+\frac{1}{n+m-2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ и

$$\frac{r}{r+1}=\frac{m}{m+n}<\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+m-1}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(1+r)<$$
$$<\frac{1}{n+m-1}+\frac{1}{n+m-2}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{m}{n}=r.$$

Если же α — иррационально, то $\exists r_n$: $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\alpha$. Тогда, переходя к пределу в уже доказанном неравенстве (с учетом монотонности функции $\ln(1+t)$)

$$\frac{r_n}{r_n+1}<\ln(1+r_n)<r_n,$$

получим требуемое неравенство.

Далее, пусть $0<t\leqslant\frac{1}{\ln 2}-1$. Тогда

$$2=e^{\ln 2}<e^{\frac{1}{t+1}}<(1+t)^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}<e.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sup_{0<t\leqslant 1}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e,\quad \inf_{0<t\leqslant 1}(1+t)^{\frac{1}{t}}=2.$$

А так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin^2\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{n}}}=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\cos^2(n\pi))^{\frac{1}{\cos^2 n\pi}}=\lim_{n\to\infty}(1+1)=2,$$

то

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}}=e;$$

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}}=2.$$

§ 5. Графическое изображение функции

1°. График функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X. Множество пар $(x, f(x))$, где $x\in X$, называется графиком функции $y=f(x)$.

Для построения графика функции $y=f(x)$ на координатную плоскость наносят систему точек $(x_i, f(x_i))$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и соединяют их линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

2°. Асимптоты графика функции. Говорят, что прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$. Говорят, что прямая $y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x\to-\infty$.

Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$.

Если функция $f(x)$ представима в виде $f(x)=g(x)+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0$), то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *асимптотически равны* при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

3°. Выпуклые функции. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Будем говорить, что график функции $y=f(x)$ на интервале (a, b) имеет выпуклость, направленную вниз (соответственно вверх), если для всех x_1 и x_2 из интервала (a, b) и любого α, $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ имеет место неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

(соответственно неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) \times \times f(x_2)$).

4°. Для получения более точного графика функции нужно исследовать ее: 1) определить область существования функции, нули функции, четность или нечетность, оси симметрии; 2) определить интервалы знакопостоянства и монотонности функции; 3) найти асимптоты графика функции; 4) изучить поведение функции при неограниченном приближении аргумента к граничным точкам области существования.

Построить графики целых рациональных функций:

263. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

Построение. Область определения $X = (-\infty, \infty)$; нули функции: $x = \pm 1$; $x = -2$; $y > 0$, если $-\infty < x < -2$; $-1 < x < 1$, $y < 0$, если $-2 < x < -1$; $1 < x < +\infty$. Используя таблицу значений функции

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	$1{,}5$
y	8	0	$-0{,}625$	0	$1{,}125$	2	0	$-4{,}375$

строим ее график (рис. 2).

264. $y = x^2 - x^4$.

Построение. Область определения: $X = (-\infty, \infty)$, нули функции: $x = \pm 1$; $x = 0$; функция четная. Из равенства $y = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ следует, что наибольшее значение функции равно $\frac{1}{4}$ при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Составляя таблицу

x	-2	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
y	-12	0	$\frac{1}{4}$	0

и учитывая симметрию, строим график функции (рис. 3).

265. $y = x(a - x)^2 (a + x)^3 \quad (a > 0)$.

Построение. Сначала строим графики функций:

$$y = x, \quad y = (a - x)^2 \quad \text{и} \quad y = (a + x)^3.$$

Затем перемножаем соответствующие ординаты. Используя значение функции в двух точках $y\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{9a^6}{64}$, $y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{27a^6}{64}$, строим требуемый график (рис. 4).

Построить графики дробных рациональных функций:

266. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Построение. Область определения: $-\infty<x<-1$, $-1<x<1$, $1<x<+\infty$. Функция четная. Если $|x|<1$, то $y>0$; если $-\infty<x<-1$, $1<x<+\infty$, то $y<0$.

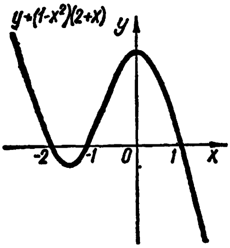

Рис. 2

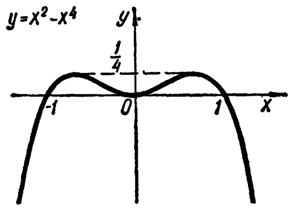

Рис. 3

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$, то $y=0$—асимптота графика функции. Пользуясь этими данными и таблицей значений функции,

x	0	$\frac{1}{2}$	$x\to 1-0$	$x\to 1+0$	2	3	$x\to+\infty$
y	1	$\frac{4}{3}$	$y\to+\infty$	$y\to-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$y\to-0$

строим ее график (рис. 5).

267. $y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

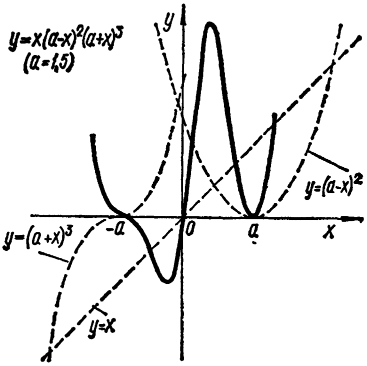

Рис. 4

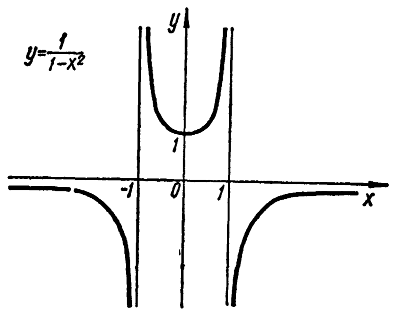

Рис. 5

Построение. X: $-\infty<x<-2$, $-2<x<1$, $1<x<+\infty$. Нули функции: $x=-1$, $x=2$. Для определения интервалов знакопостоянства функции решим неравенства

$$y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\lesseqgtr 0$$

Если $-\infty<x<-2$, то $y>0$.

Аналогично при $-2<x<-1$ $y<0$; при $-1<x<1$ $y>0$; при $1<x<2$ $y<0$; наконец, если $2<x<+\infty$, то $y>0$. Далее, заметим, что $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$, $\lim\limits_{x\to-2\pm0} y=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to1\pm0} y=\pm\infty$. Следовательно, $y=1$ горизонтальная, а $x=-2$ и $x=1$ — вертикальные асимптоты.

Составляя таблицу значений функции

x	-5	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4
y	$\frac{14}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{27}{7}$	$-\frac{7}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{9}$

строим ее график (рис. 6).

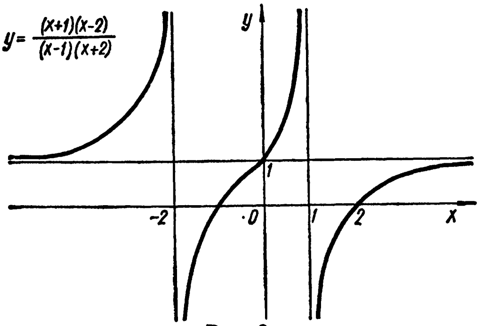

Рис. 6

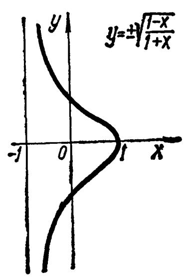

Рис. 7

Построить графики иррациональных функций:

268. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Построение. Функция определена, если $\frac{1-x}{1+x}\geqslant 0$, т. е., если $-1<x\leqslant 1$. График функции симметричен относительно оси Ox, причем $y\to\pm\infty$, если $x\to-1+0$, так что $x=-1$ — асимптота.

Учитывая эти данные и значения функции в нескольких точках

x	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	$\pm\sqrt{7}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$	±1	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$	0

строим график функции (рис. 7).

269. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

Построение. Очевидно, что функция определена при $|x|\leqslant 10$ и симметрична относительно осей координат.

Из равенства $y=\pm\sqrt{2500-(x^2-50)^2}$ находим, что наименьшее значение функции равно -50 при $x=\pm\sqrt{50}$, а наибольшее $+50$ при тех же значениях аргумента.

Используя таблицу

x	0	2	4	6	$\sqrt{50}$	8	10
y	0	$2\sqrt{96}\approx$ $\approx 19{,}6$	$4\sqrt{84}\approx$ $\approx 36{,}6$	48	50	48	0

строим график функции (рис. 8).

270. $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}$ (циссоида).

Построение. Из неравенства $\dfrac{x}{10-x}\geqslant 0$ находим область определения X: $0\leqslant x<10$. График функции симметричен относительно оси Ox.

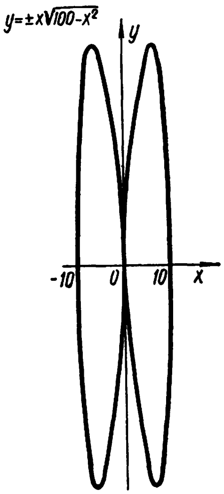

Рис. 8

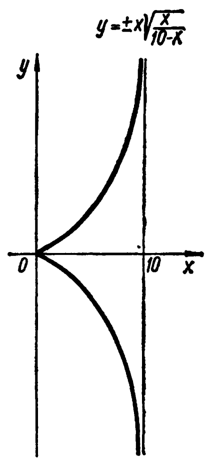

Рис. 9

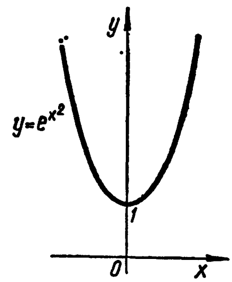

Рис. 10

Далее, $y(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 10-0} y=\pm\infty$; $kx-x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}>0$ при $0<x<\dfrac{10k^2}{k^2+1}$, где $k>0$ — произвольное. Следовательно, в окрестности начала координат график входит в любой угол со сторонами $y=kx$ и $y=0$, т. е. при $x=0$ касается оси Ox. Пользуясь этими данными и значениями функций

x	0	2	4	6	8
y	0	± 1	$\pm 4\sqrt{\frac{2}{3}}\approx\pm 3{,}26$	$\pm 6\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm 7{,}34$	± 16

строим ее график (рис. 9).

271. Построить график сложной показательной функции $y = e^{y_1}$, если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = -x^2$; в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

Построение. а) Функция $y = e^{x^2}$ определена при всех значениях x; четная ($y(x) = y(-x)$), монотонно убывающая при $x < 0$ и монотонно возрастающая при $x > 0$. Следовательно, наименьшее значение функции равно 1 при $x = 0$. Исходя из этих данных и таблицы значений функции

x	0	1	2
y	1	e	e^4

строим ее график (рис. 10).

б) Функция $y = e^{-x^2}$ определена при $-\infty < x < +\infty$; четная и монотонно убывает при удалении x от начала координат. Заметим,

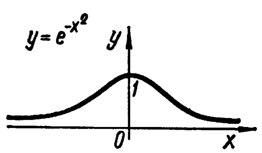

Рис. 11

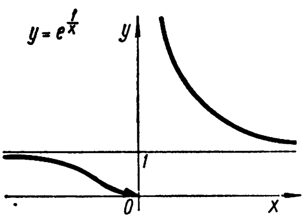

Рис. 12

что $y > 0$ при всех x и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$, т. е. $y = 0$ — асимптота при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (рис. 11).

в) Функция $y = e^{\frac{1}{x}}$ определена при $-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$. Если $x_1 < x_2$, то $e^{\frac{1}{x_1}} < e^{\frac{1}{x_2}}$, следовательно, функция монотонно убывает. Из соотношений

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \qquad \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

следует, что $y = 1$ — асимптота при $x \to \pm\infty$, а $x = 0$ — асимптота при $x \to +0$ (рис. 12).

г) Функция $y = e^{\frac{1}{x^2}}$ определена при $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$; четная. Из соотношений $\lim\limits_{x\to\pm 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$

следует, что $y=0$ и $x=0$ — асимптоты соответственно при $x\to\pm\infty$ и $x\to\pm 0$. Непосредственно из свойств показательной функций следует, что функция монотонно убывает при $|x|\to\infty$ при $y>1$ для всех x. Уточняя значение функции в нескольких точках, строим ее график (рис. 13).

д) Для функции $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ X: $-\infty<x<0$, $0<x<+\infty$. Функция четная и $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$. Вычисляя значение функции в нескольких точках, строим ее график (рис. 14).

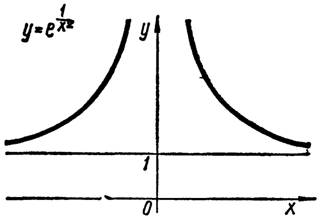

Рис. 13

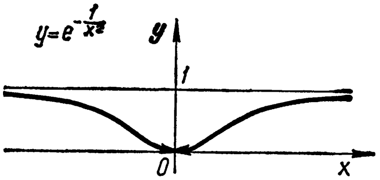

Рис. 14

е) Функция $y=e^{\frac{2x}{1-x^2}}$ определена при всех значениях x, кроме $x=\pm 1$. Далее,

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{2x}{1-x^2}}=1,\qquad \lim_{x\to-1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}}=0,$$

т. е. $y=1$ — асимптота при $x\to\infty$; $x=-1$ — при $x\to-1-0$ и $x=1$ — при $x\to 1-0$. Так как функция $\frac{2x}{1-x^2}$ монотонно возрастающая, то таким свойством обладает и данная функция. Пользуясь этими данными, строим эскиз графика функции (рис. 15).

272. Построить график сложной логарифмической функции $y=\ln y_1$, если:

а) $y_1=1+x^2$; б) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

в) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1=\frac{1}{x^2}$; д) $y_1=1+e^x$.

Построение. а) Функция $y=\ln(1+x^2)$ определена при всех значениях x, четная и монотонно возрастающая при $|x|\to\infty$. Из неравенства $kx-\ln(1+x^2)=kx-x^2\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}>kx-x^2e>0$, справедливого при $0<x<\frac{k}{e}$ и любом $k>0$ следует, что график касается оси Ox в начале координат. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}[\ln(1+x^2)-2\ln|x|]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+x^2}{x^2}=0,$$

т. е. функции $\ln(1+x^2)$ и $2\ln|x|$ асимптотически равны при $|x| \to \infty$. Пользуясь этими данными, строим график функции (рис. 16).

б) Область определения функции

$$y = \ln[(x-1)(x-2)^2(x-3)^3]$$

находим, решая неравенство

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 > 0.$$

Если $-\infty < x < 1$ и $3 < x < +\infty$, то выражение $(x-1)(x-2)^2 \times (x-3)^3$ — положительно, а при $1 < x < 3$ отрицательно. Следовательно, X: $-\infty < x < 1$ и $3 < x < +\infty$. Из равенств

$$\lim_{x \to 1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \to 3+0} y = -\infty$$

следует, что прямые $x = 1$ и $x = 3$ — асимптоты при $x \to 1-0$ и $x \to 3+0$ соответственно (рис. 17).

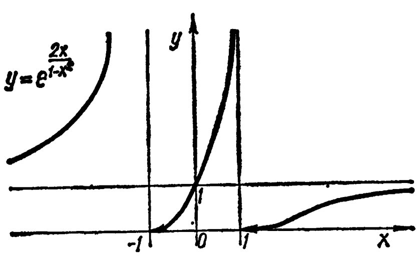

Рис. 15

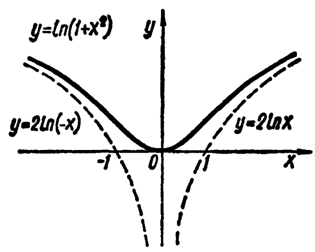

Рис. 16

в) Из неравенства $\frac{1-x}{1+x} > 0$ вытекает, что функция $y = \ln\frac{1-x}{1+x}$ определена при $|x| < 1$. Поскольку $y_1 = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ монотонно убывает на интервале $-1 < x < 1$, то таким свойством обладает и функция y.
Имеем

$$\lim_{x \to 1-0} \ln\frac{1-x}{1+x} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \ln\frac{1-x}{1+x} = +\infty,$$

следовательно, $x = 1$ — вертикальная асимптота при $x \to 1-0$, а $x = -1$ — асимптота при $x \to -1+0$. Исходя из этих данных и из того, что $y(0) = 0$, строим график (рис. 18).

г) Если $y_1 = \frac{1}{x^2}$, то $y = -2\ln|x|$, откуда видно, что функция y четная и что $\lim_{x \to 0}(-2\ln|x|) = +\infty$. Следовательно, $x = 0$ — вертикальная асимптота при $x \to \pm 0$. Считая, что график функции $y_1 = \ln x$ известен, легко построить график данной функции (рис. 19).

д) Если x возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, то функция $y_1 = 1 + e^x$ возрастает от 1 до $+\infty$. Следовательно, функция $y = \ln(1+e^x)$

определена и монотонно возрастает при всех значениях x. Из соотношений

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [\ln(1+e^x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1+e^x}{e^x} = 0$$

следует, что $y = 0$ — асимптота при $x \to -\infty$, а $y = x$ при $x \to +\infty$. Теперь легко построить эскиз графика (рис. 20).

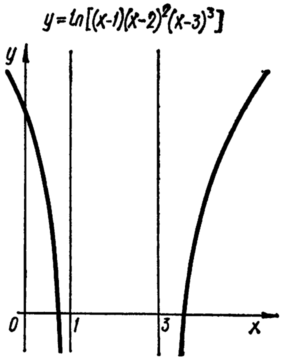

Рис. 17

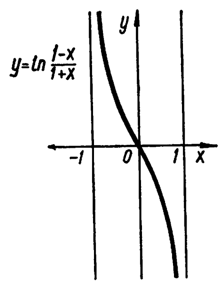

Рис. 18

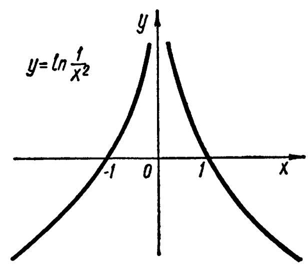

Рис. 19

Построить графики тригонометрических функций:

273. $y = \sin^2 x$.

Построение. Замечая, что $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ и что период функции y равен π, легко построить ее график (рис. 21).

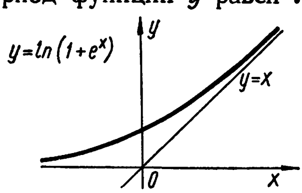

Рис. 20

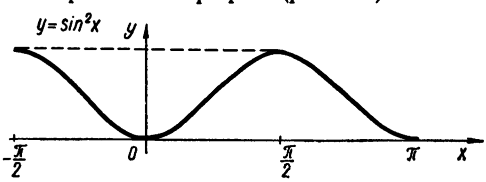

Рис. 21

274. $y = \sin^3 x$.

Построение. При каждом фиксированном значении x возводим ординату графика функции $y = \sin x$ в куб; получим ординату графика функции $y = \sin^3 x$ (рис. 22).

275. $y = \sin x \sin 3x$.

Построение. Используя то, что $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, получаем

$$y = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x = 4\left[\frac{9}{64} - \left(\sin^2 x - \frac{3}{8}\right)^2\right].$$

Легко видеть, что

$$-1 \leqslant 4\left[\frac{9}{64} - \left(\sin^2 x - \frac{3}{8}\right)^2\right] \leqslant \frac{9}{16},$$

причем нижняя граница достигается, если $\sin^2 x = 1$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а верхняя, если $\sin^2 x = \frac{3}{8}$, т. е. при $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Теперь строим график

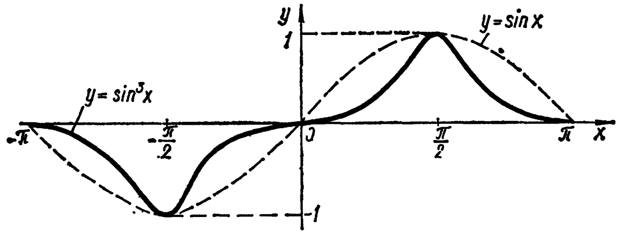

Рис. 22

функций $y = \sin x$ и $y = \sin 3x$, а потом, с учетом только что полученных данных, строим график произведения (рис. 23).

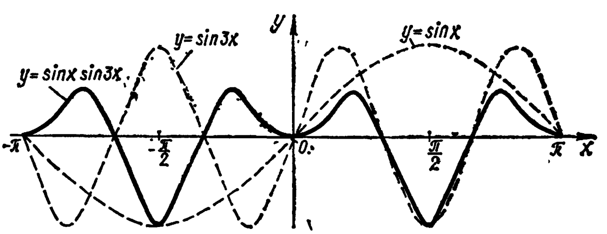

Рис. 23

276. $y = \sin x^2$.

Построение. Функция четная. Из равенства $\sin x^2 = 0$ находим нули функции $x = \pm \sqrt{k\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Из того, что

$$\lim_{k\to\infty} (\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} = 0,$$

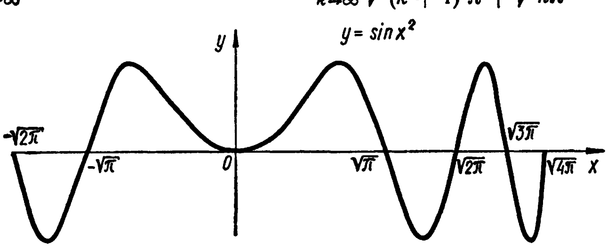

Рис. 24

следует, что расстояние между последующими нулями стремится к нулю с возрастанием k. Пользуясь этим и тем, что $|y| \leqslant 1$, строим график (рис. 24).

277. $y = x \cos \frac{\pi}{x}$.

Построение. Функция определена при $0 < |x| < +\infty$. Если положить $y(0) = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{\pi}{x} = 0$, то получим функцию, определенную при всех значениях x. Так как $-\left(x \cos \frac{\pi}{x}\right) = -x \cos \frac{\pi}{-x}$, то функция y нечетная. Нули функции:

$$x = 0, \quad x = \frac{2}{1 + 2k}$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Имеем

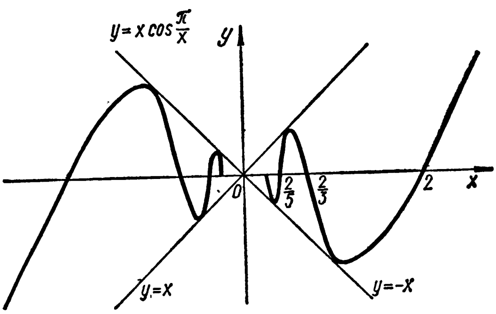

Рис. 25

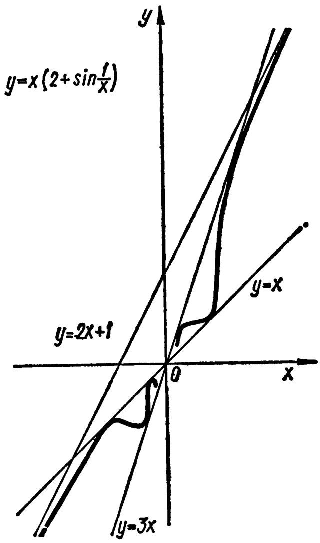

Рис. 26

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cos \frac{\pi}{x}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(x \cos \frac{\pi}{x} - x\right) = 0,$$

следовательно, $y = x$ — асимптота графика функции при $x \to \infty$. Если предварительно построить график функций $y = x$ и $y = \cos \frac{\pi}{x}$, то потом, с учетом полученной выше информации, строим график предложенной функции (рис. 25).

278. $y = x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$.

Построение. Заметим, что при $x > 0$

$$x \leqslant x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) \leqslant 3x,$$

причем знаки равенств достигаются: слева — при $x = \frac{2}{(4k+3)\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, справа — при $x = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Если же $x < 0$, то

$$3x \leqslant x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) \leqslant x,$$

а знаки равенств достигаются соответственно слева и справа при

$$x=-\frac{2}{(4k+3)\pi} \text{ и } x=-\frac{2}{(4k+1)\pi} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=2,\quad \lim_{x\to\infty}\left[x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)-2x\right]=1,$$

т. е. $y=2x+1$ — асимптота графика функции при $x\to\infty$. Используя эту информацию, строим эскиз графика (рис. 26).

279. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.

Построение. Функция определена при $-1\leqslant x<0,0<$ $<x\leqslant+1$.
График функции симметричен относительно осей координат, поэтому достаточно построить график функции

$$y=+\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x},$$
$$0<x\leqslant 1.$$

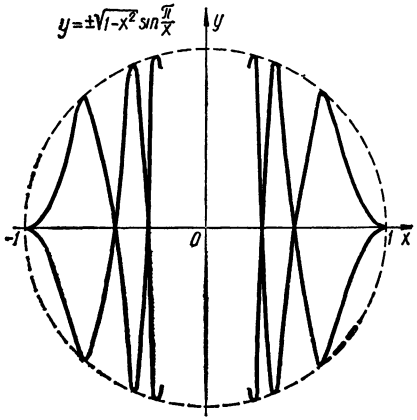

Рис. 27

Очевидно, что

$$-\sqrt{1-x^2}\leqslant\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}\leqslant\sqrt{1-x^2},\qquad 0<x\leqslant 1,$$

причем знаки равенств слева и справа достигаются соответственно в точках $x=\frac{2}{4k+3}$ и $x=\frac{2}{4k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. Кроме того, из последних неравенств следует, что график функции содержится в круге единичного радиуса с центром в начале координат. Исходя из этих данных, строим график функции (рис. 27).

Построить графики обратных круговых функций:

280. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

Построение. Функция определена, если $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$, т. е., если $|x|\geqslant 1$. Из равенства $y(-x)=-y(x)$ следует, что функция нечетная, а из определения арксинуса следует ограниченность функции $-\frac{\pi}{2}\leqslant$ $\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, причем $y(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$. Далее, $y\to 0$ при $x\to\infty$, следовательно, $y=0$ — асимптота графика функции при $x\to\infty$.

Наконец, заметим, что данная функция монотонно убывает в области определения (рис. 28).

281. $y = \arccos\frac{1}{x}$.

Построение. Функция определена при $|x| \geqslant 1$ и монотонно возрастает в области определения. Если $|x|$ неограниченно возрастает, то $\arccos\frac{1}{x}$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, так что $y = \frac{\pi}{2}$ — асимптота при $x \to \infty$ (рис. 29).

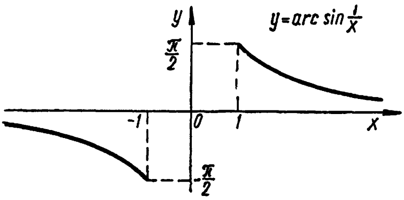

Рис. 28

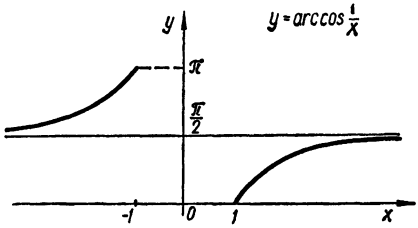

Рис. 29

282. $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

Построение. Функция определена при всех $x \neq 0$ и монотонно возрастает. Если $|x| \to +\infty$, то $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} \to 0$. Если же $x \to -0$, то $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} \to \pi - 0$ и $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} \to +0$ при $x \to +0$ (рис. 30).

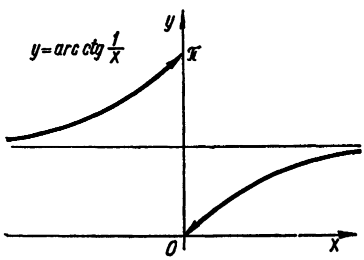

Рис. 30

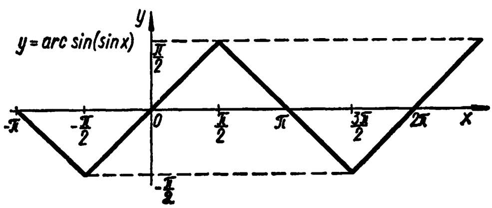

Рис. 31

283. $y = \arcsin(\sin x)$.

Построение. Так как

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x),$$

то функция периодическая с периодом 2π. Из определения арксинуса следует, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Далее, $\sin y = \sin x$, т. е. $y = x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $y = \pi - x$ при $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ (рис. 31).

284. $y = \arcsin(\cos x)$.

Построение. Функция периодическая с периодом 2π и $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\sin y = \cos x, \quad \sin y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0,$$

откуда

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ и } y = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Учитывая, что $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем $y = -x + \frac{\pi}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $-\pi \leqslant x < 0$ (рис. 32).

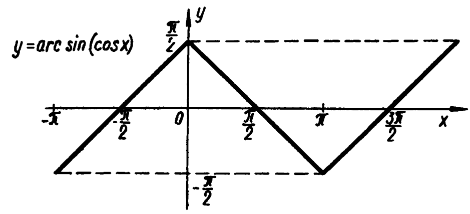

Рис. 32

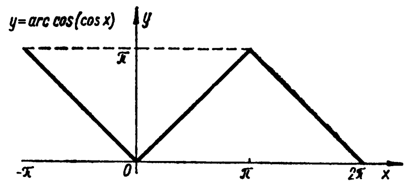

Рис. 33

285. $y = \arccos(\cos x)$.

Построение. Функция периодическая с периодом 2π и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Имеем $\cos y = \cos x$, откуда $y = x + 2k\pi$ или $y = -x + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Так как $0 \leqslant y \leqslant \pi$, то $k = 0$ и $y = x$, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $y = -x$, если $-\pi \leqslant x < 0$. Учитывая периодичность, строим график (рис. 33).

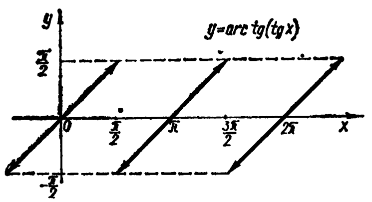

Рис. 34

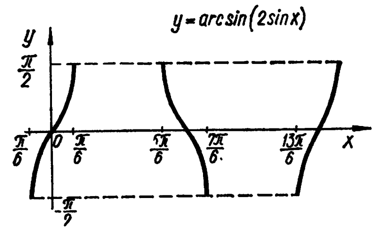

Рис. 35

286. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Построение. Так как функция периодическая с периодом π и $|y| < \frac{\pi}{2}$, то из определения арктангенса следует, что $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$, т. е., что $y = x$ при $|x| < \frac{\pi}{2}$. Теперь, учитывая периодичность, легко построить график (рис. 34).

287. $y = \arcsin(2 \sin x)$.

Построение. Функция определена, если $|2 \sin x| \leqslant 1$, т. е., если $k\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Легко проверить, что функция нечетная и периодическая с периодом 2π. Пользуясь этими данными, строим график (рис. 35).

5 4-2403

288. Построить график функции $y = \arcsin y_1$, если:

а) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$; в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;

б) $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$; г) $y_1 = e^x$.

Построение. а) $y = \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

Функция определена при условии, что $-1 \leqslant 1 - \frac{x}{2} \leqslant 1$, т. е. если $0 \leqslant x \leqslant 4$. Если x изменяется от 0 до 4, то y убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$, причем $y = 0$ при $x = 2$ (рис. 36).

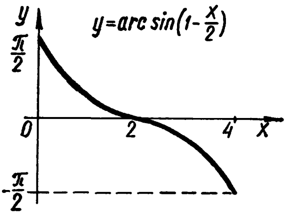

Рис. 36

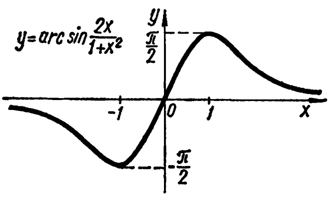

Рис. 37

б) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

Убеждаемся, что функция нечетная и определена при всех значениях x; с возрастанием x от 0 до 1 функция возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Если же x возрастает от 1 до $+\infty$, то функция убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, так что $y = 0$ является асимптотой при $x \to \infty$.

Принимая во внимание нечетность функции, строим ее график (рис. 37).

в) $y = \arcsin\frac{1-x}{1+x}$. Решая неравенство $-1 \leqslant \frac{1-x}{1+x} \leqslant 1$, находим, что функция определена, если $0 \leqslant x < \infty$. При изменении x от 0 до ∞ функция монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$, т. е. $y = -\frac{\pi}{2}$ — асимптота графика при $x \to +\infty$ (рис. 38).

г) $y = \arcsin e^x$. Функция определена при $-\infty < x \leqslant 0$ и в этом промежутке возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $y = 0$ — асимптота графика функции при $x \to -\infty$ (рис. 39).

289. Построить график функции $y = \operatorname{arctg} y_1$, если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; в) $y_1 = \ln x$; г) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

П о с т р о е н и е. а) $y = \operatorname{arctg} x^2$. Функция определена при $|x| < \infty$, четная и монотонно возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$ при изменении x от 0 до $+\infty$. Прямая $y = \frac{\pi}{2}$ является асимптотой графика при $x \to \infty$ (рис. 40).

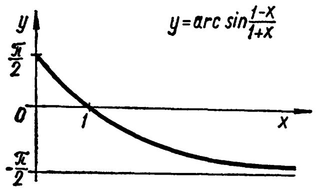

Рис. 38

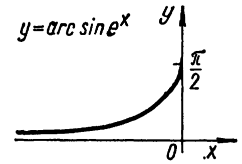

Рис. 39

б) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2}$. Функция четная и определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Если x возрастает от 0 до $+\infty$, то y монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, т. е. $y = 0$ — асимптота при $x \to \infty$ (рис. 41).

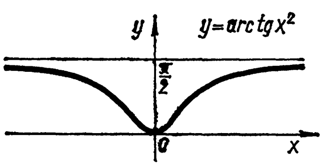

Рис. 40

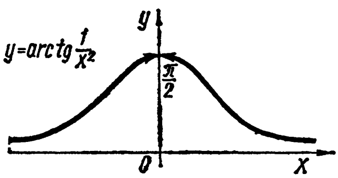

Рис. 41

в) $y = \operatorname{arctg} (\ln x)$. Функция определена если $-\infty < \ln x < +\infty$, т. е. при $0 < x < +\infty$. Далее, y — монотонно возрастает на $(0, +\infty)$. Имеем

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} (\ln x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} (\ln x) = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{2}$ — асимптота при $x \to +\infty$ (рис. 42).

г) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sin x}$. Функция определена при $k\pi < x < (k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, нечетная и периодическая с периодом 2π. На промежутке $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{4}$, а на промежутке $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ — монотонно возрастает от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Учитывая нечетность и периодичность функции, строим ее график (рис. 43).

290. Определить, относительно каких вертикальных осей симметричны графики функций:

а) $y = ax^2 + bx + c$; в) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ $(0 < a < b)$;

б) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$; г) $y = a + b \cos x$.

Решение. График функции $y = f(x)$ симметричен относительно вертикальной оси $x = x_0$, если $f(x_0 - x) \equiv f(x_0 + x)$ для всех x из области определения функции $f(x)$.

а) Из условия симметрии получаем

$$-2axx_0 - bx \equiv 2axx_0 + bx,$$

откуда $x_0 = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$ — ось симметрии.

б) Запишем условие симметрии

$$\frac{1}{(x_0 - x)^2} + \frac{1}{(1 - x_0 + x)^2} \equiv \frac{1}{(x_0 + x)^2} + \frac{1}{(1 - x_0 - x)^2},$$

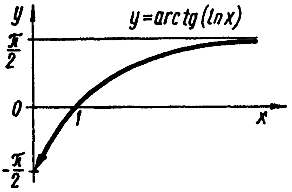

Рис. 42

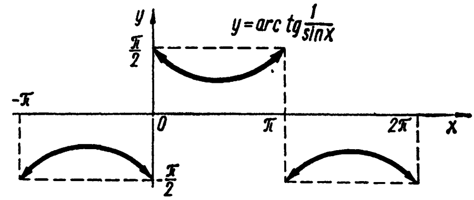

Рис. 43

откуда, предполагая, что знаменатели не обращаются в нуль, получаем

$$x_0[(1 - 2x_0)^2 + 2(1 - 2x_0)(x_0^2 - x^2) + (x_0^2 - x^2)^2] \equiv (1 - x_0)(x_0^2 - x^2)^2,$$

$$\begin{array}{r|l} (x_0^2 - x^2)^2 & x_0 = 1 - x_0; \\ x_0^2 - x^2 & 2x_0(1 - 2x_0) = 0; \\ (x_0^2 - x^2)^0 & x_0(1 - 2x_0)^2 = 0, \end{array}$$

$$x_0 = \frac{1}{2},$$

так что $x = \frac{1}{2}$ — ось симметрии.

в) Аналогично предыдущему

$$\sqrt{a + x_0 - x} + \sqrt{b - x_0 + x} \equiv \sqrt{a + x_0 + x} + \sqrt{b - x_0 - x}.$$

Освобождаясь от иррациональности, получаем

$$2x(a - b) \equiv -4x_0x,$$

так что $x_0 = \frac{b - a}{2}$, т. е. $x = \frac{b - a}{2}$ — ось симметрии.

г) Имеем

$$a + b\cos(x_0 - x) \equiv a + b\cos(x_0 + x),$$

$$\cos x_0 \cos x + \sin x_0 \sin x \equiv \cos x_0 \cos x - \sin x_0 \sin x.$$

Отсюда находим, что

$$\sin x_0 = 0, \qquad x_0 = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

так что $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — оси симметрии.

291. Определить, относительно каких центров симметричны графики функций:

а) $y = ax + b$; б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; в) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

г) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$; д) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

Решение. Точка $M(x_0, y_0)$ является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если $\forall\, x \in X$:

$$y_0 \equiv \frac{1}{2}[f(x_0 - x) + f(x_0 + x)].$$

а) $2y_0 \equiv a(x_0 - x) + b + a(x_0 + x) + b$ — условие симметрии. Отсюда $y_0 \equiv ax_0 + b$, где x_0 — произвольное.

$M(x_0, ax_0 + b)$ — центр симметрии.

б) Из условия симметрии

$$2y_0 \equiv \frac{ax_0 + b - ax}{cx_0 + d - cx} + \frac{ax_0 + b + ax}{cx_0 + d + cx}$$

получаем

$$2y_0[(cx_0 + d)^2 - c^2x^2] \equiv 2(ax_0 + b)(cx_0 + d) - 2acx^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -2y_0c^2 = -2ac; \\ x^0 & 2y_0(cx_0 + d)^2 = 2(ax_0 + b)(cx_0 + d). \end{array}$$

Отсюда находим, что $y_0 = \frac{a}{c}$, $x_0 = -\frac{d}{c}$, т. е. $M\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

в) Имеем

$$2y_0 \equiv a(x_0 - x)^3 + b(x_0 - x)^2 + c(x_0 - x) + d +$$
$$+ a(x_0 + x)^3 + b(x_0 + x)^2 + c(x_0 + x) + d,$$
$$y_0 \equiv ax_0^3 + 3ax_0x^2 + bx_0^2 + bx^2 + cx_0 + d.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$x_0 = -\frac{b}{3a}, \quad y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d.$$

Аналогично находятся центры симметрии в примерах г) и д).

292. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ симметричен относительно двух вертикальных осей $x = a$ и $x = b$ $(b > a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

Доказательство. Запишем условие симметрии:

$$f(a - t) \equiv f(a + t) \qquad (-\infty < t < \infty); \tag{1}$$
$$f(b - x) \equiv f(b + x) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

В равенстве (2) положим $b - x = a - t$. Тогда

$$f(a - t) \equiv f(t + 2b - a). \tag{3}$$

Из равенства (1) и (3) получаем

$$f(t + 2b - a) \equiv f(a + t). \tag{4}$$

Пусть $a + t = x$. Тогда из (4) окончательно получаем

$$f(x + 2b - 2a) \equiv f(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

откуда и следует периодичность функции $f(x)$, причем $2b - 2a$ — период.

293. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ симметричен относительно двух точек $A(a, y_0)$ и $B(b, y_1)$ $(b > a)$, то функция $f(x)$ есть сумма линейной функции и периодической функции. В частности, если $y_0 = y_1$, то функция $f(x)$ — периодическая.

Доказательство. Запишем условие симметрии

$$f(a - t) + f(a + t) = 2y_0 \qquad (-\infty < t < \infty); \tag{1}$$

$$f(b - x) + f(b + x) = 2y_1 \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

Полагая в равенстве (2) $b - x = a - t$, получим

$$f(a - t) + f(t + 2b - a) = 2y_1. \tag{3}$$

Из равенств (1) и (3) вытекает, что

$$f(t + 2b - a) = f(a + t) + 2(y_1 - y_0).$$

Если в последнем равенстве положить $a + t = x$, то окончательно получим

$$f(x + 2b - 2a) = f(x) + 2(y_1 - y_0). \tag{4}$$

Очевидно, что если $y_1 = y_0$, то функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = 2(b - a)$.

В равенстве (4) положим

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) + y_0, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая функция. Тогда получим

$$\varphi(2b - 2a + x) + \frac{y_1 - y_0}{b - a}(2b - 2a + x - a) + y_0 =$$

$$= \varphi(x) + \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) + y_0 + 2(y_1 - y_0),$$

откуда следует, что

$$\varphi(x + 2b - 2a) = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

т. е. функция $f(x)$ представима равенством (5) как сумма периодической и линейной функции.

294. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ симметричен относительно точки $A(a, y_0)$ и прямой $x = b$ $(b \neq a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

Доказательство. Из условия задачи следуют равенства:

$$f(a - x) + f(a + x) = 2y_0; \qquad f(b - t) = f(b + t).$$

Полагая $b - t = a - x$, получаем равенство

$$f(a - x) = f(2b - a + x),$$

которое совместно с первым равенством дает условие

$$f(2b-a+x)+f(a+x)=2y_0.$$

Заменяя в нем $a+x$ на x, получаем

$$f(2b-2a+x)=-f(x)+2y_0.$$

Далее, при замене x на $2b-2a+x$ получаем

$$f(4b-4a+x)=-f(2b-2a+x)+2y_0=$$
$$=-[-f(x)+2y_0]+2y_0=f(x),$$

что и доказывает периодичность функции $f(x)$, причем период равен $4b-4a$.

295. Построить график функции $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, если $f(x+1)=2f(x)$ и $f(x)=x(1-x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

Построение. Для натурального n

$$f(x+n)=2f(x+n-1)=2^2f(x+n-2)=\ \dots\ =2^nf(x).$$

Отсюда $f(x)=2^{-n}f(x+n)$. Заменяя x на $x-n$, получим

$$f(x-n)=2^{-n}f(x),$$

следовательно,

$$f(x+n)=2^nf(x) \text{ при } n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots.$$

Так как $f(x)=x(1-x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$, то, полагая $t=x+n$, получим

$$f(t)=2^n(t-n)(n+1-t), \qquad n\leqslant t\leqslant n+1$$

или

$$f(x)=2^n(x-n)(n+1-x), \quad n\leqslant x\leqslant n+1, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots.$$

Отсюда имеем

$$f(x)=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2^{-1}(x+1)(-x), & -1\leqslant x\leqslant 0; \\ x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2(x-1)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2; \\ 2^2(x-2)(3-x), & 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 2^3(x-3)(4-x), & 3\leqslant x\leqslant 4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Теперь легко построить график (рис. 44).

296. Построить график функции $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, если $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ и $f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant \pi$.

Построение. Имеем

. . . .

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin x;$$

$$f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=f(x)+\sin x-\sin x=f(x);$$

$$f(x+3\pi) = f(x+2\pi) + \sin(x+2\pi) = f(x) + \sin x;$$
$$f(x+4\pi) = f(x+3\pi) + \sin(x+3\pi) = f(x) + \sin x - \sin x = f(x);$$

. . . .

$$f(x+n\pi) = \begin{cases} f(x), & \text{если } n \text{ — четное;} \\ f(x) + \sin x, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases} \qquad (1)$$

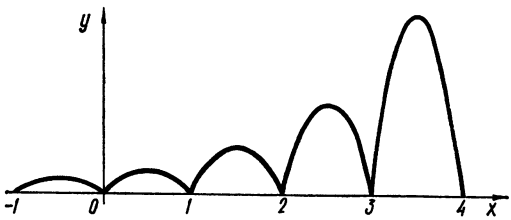

Рис. 44

Заменяя в равенстве $f(x) = f(x+\pi) - \sin x$ x на $x - \pi$, получаем

$$f(x-\pi) = f(x) + \sin x.$$

Далее, рассуждая как и раньше, получим равенство (1) для целых отрицательных значений n.

Пусть $x + n\pi = t$. Тогда, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $n\pi \leqslant t \leqslant (n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $f(x) = 0$. Следовательно,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ \sin x, & \text{если } n \text{ — нечетное;} \end{cases}$$
$$n\pi \leqslant t \leqslant (n+1)\pi \qquad (n = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Теперь строим график функции (рис. 45).

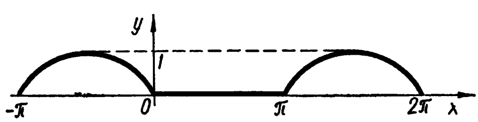

Рис. 45

297. Построить графики функций $y = f(x)$, заданных параметрически, если:

а) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$; б) $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t^2}$;

в) $x = 10\cos t$, $y = \sin t$ (эллипс); г) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ (гипербола);

д) $x = 5\cos^2 t$, $y = 3\sin^2 t$;

е) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (циклоида);

ж) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$ $(t > 0)$.

Построение. а) Так как $y(-t) = y(t)$, то $t = 0$, т. е. $x = 1$ — ось симметрии.

Составляя таблицу

t	0	1	2	3	$t \to +\infty$
x	1	0	-1	-2	$x \to -\infty$
y	1	0	-3	-8	$y \to -\infty$

и учитывая симметричность, строим график функции (рис. 46).

б) Из неравенства $|x| = \left|t + \frac{1}{t}\right| \geqslant 2$ вытекает, что функция определена, если $-\infty < x \leqslant -2$ и $2 \leqslant x < +\infty$. Заметим, что $y - x = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \to \mp 0$ при $t \to \pm\infty$, т. е. при $x \to \pm\infty$. Следовательно, $y = x$ — асимптота при $x \to \infty$.

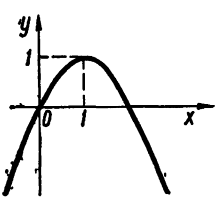

Рис. 46

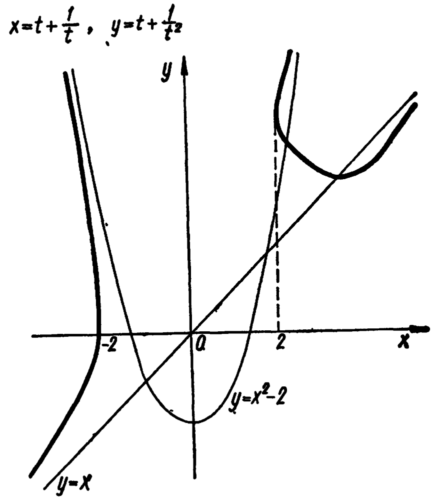

Рис. 47

Далее, $y = x^2 - 2 - t^2 + t$ и $y - x^2 + 2 \to \pm 0$ при $t \to \pm 0$, т. е. при $x \to \pm\infty$. Поэтому $y = x^2 - 2$ — асимптота графика функции при $x \to \infty$. Составляя таблицу

t	$-\frac{1}{n}$	$-n$	$\frac{1}{n}$	n
x	$-(n+\frac{1}{n})$	$-(n+\frac{1}{n})$	$n+\frac{1}{n}$	$n+\frac{1}{n}$
y	$n^2-\frac{1}{n}$	$-n+\frac{1}{n^2}$	$n^2+\frac{1}{n}$	$n+\frac{1}{n^2}$

строим график (рис. 47).

д) Область определения $0 \leqslant x \leqslant 5$, область допустимых значений функции $0 \leqslant y \leqslant 3$. Так как $\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, то график функции представляет собой отрезок прямой $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$, заключенный между точками $M_0(0,\ 3)$ и $M_1(5,\ 0)$.

е) Функция определена при $-\infty < x < +\infty$, ограничена $0 \leqslant y \leqslant 4$ и периодическая с периодом 2π (по параметру t). Составим таблицу

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$	$\pi-2$	$\frac{3\pi}{2}-\sqrt{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}+\sqrt{2}$	$3\pi+2$	$\frac{7\pi}{2}+\sqrt{2}$	4π
y	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	4	$2+\sqrt{2}$	2	$2-\sqrt{2}$	0

и построим график функции (рис. 48).

ж) Составляя таблицу

t	$t=\frac{1}{n}\to 0$	1	$t=n\to\infty$
x	$x\to+0$	1	$x\to 1+0$
y	$y\to e-0$	2	$y\to 1+0$

строим график функции (рис. 49).

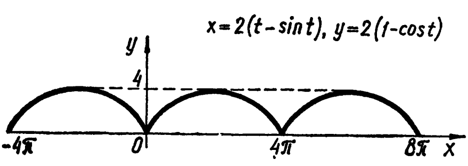

Рис. 48

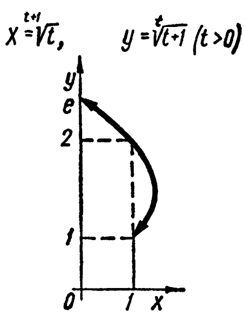

Рис. 49

Аналогичными методами строятся графики функций в) и г).

298. Построить графики неявных функций:

а) $x^2-xy+y^2=1$ (эллипс); б) $x^3+y^3-3xy=0$ (декартов лист); в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (парабола); г) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ (астроида); д) $\sin x=\sin y$; е) $\cos(\pi x^2)=\cos \pi y$; ж) x^y+y^x $(x>0,\ y>0)$; з) $x-|x|=y-|y|$.

П о с т р о е н и е. а) Построить график предоставляем читателю.

б) Полагая $\frac{y}{x} = t$, получаем

$$x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Составляя таблицу

t	$\frac{1}{n} \to +0$	$n \to \infty$	$-\frac{1}{n} \to -0$	$-n \to -\infty$	$\frac{-n}{n+1} \to$ $\to -1+0$	$-\frac{n+1}{n} \to$ $\to -1+0$
x	$\frac{3n^2}{n^3+1} \to$ $\to +0$	$\frac{3n}{n^3+1} \to$ $\to +0$	$\frac{-3n^2}{n^3-1} \to$ $\to -0$	$\frac{3n}{n^3-1} \to$ $\to +0$	$\frac{-3n(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} \to$ $\to -\infty$	$\frac{3n^2(n+1)}{(n+1)^3-n^3} \to$ $\to +\infty$
y	$\frac{3n}{n^3+1} \to$ $\to +0$	$\frac{3n^2}{n^3+1} \to$ $\to +0$	$\frac{3n}{n^3-1} \to$ $\to +0$	$\frac{-3n^2}{n^3-1} \to$ $\to -0$	$\frac{3n^2(n+1)}{(n+1)^3-n^3} \to$ $\to +\infty$	$\frac{-3n(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} \to$ $\to -\infty$

убеждаемся, что график функции симметричен относительно прямой $y = x$ и что, если $t = \frac{y}{x} \to -1$, то $|x| \to \infty$ и $|y| \to \infty$.

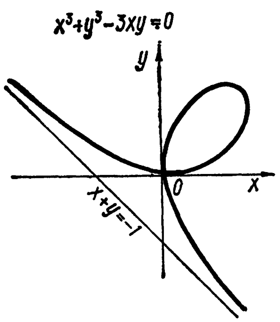

Рис. 50

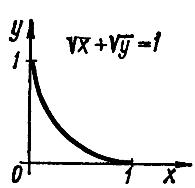

Рис. 51

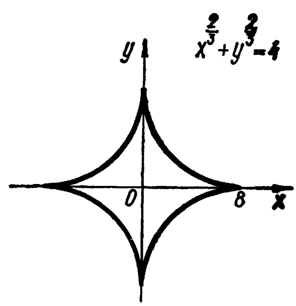

Рис. 52

Далее, из очевидного равенства

$$x + y = \frac{3xy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

вытекает, что $x + y \to -1$ при $t = \frac{y}{x} \to -1$.

Следовательно, $y + x + 1 = 0$ — асимптота (рис. 50).

в) Очевидно, что $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Вычисляя значение функции в нескольких точках, строим ее график (рис. 51).

г) График функции симметричен относительно обоих осей координат. Запишем уравнение в параметрической форме:

$$x = 8\cos^3 t, \quad y = 8\sin^3 t.$$

Если $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $0 \leqslant x \leqslant 8$, $0 \leqslant y \leqslant 8$.

Сначала строим график функции при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, а затем, используя симметричность, строим график для $\frac{\pi}{2} < t \leqslant 2\pi$ (рис. 52).

д) Решая данное уравнение, находим семейство прямых

$$y = x + 2\pi n \text{ и } y = -x + (2n+1)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

График функции есть график этого семейства.

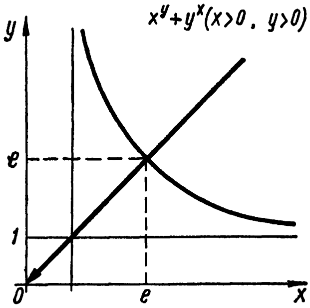

Рис. 53

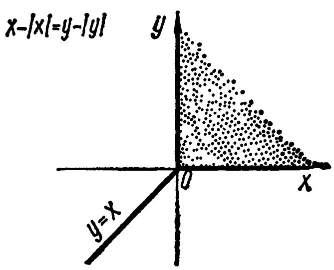

Рис. 54

е) Решением данного уравнения будет семейство парабол

$$y = \pm x^2 + 2n \quad (n = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

графики которых составляют график данной функции.

ж) Пусть $y = x^t$ $(t > 0)$. Тогда

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad y = t^{\frac{t}{t-1}} \qquad t > 0,\ t \neq 1.$$

Если $t = 1$, то $y = x$ — решение уравнения. Следовательно, график имеет две ветви.

Составим таблицу

t	$\frac{1}{n} \to +0$	$n \to \infty$	$\frac{n+1}{n} \to 1+0$	$\frac{n}{n+1} \to 1-0$
x	$n^{\frac{n}{n-1}} \to +\infty$	$n^{\frac{1}{n-1}} \to 1-0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e-0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e+0$
y	$n^{\frac{1}{n-1}} \to 1+0$	$n^{\frac{n}{n-1}} \to +\infty$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e+0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e-0$

Используя значения функции и аргумента, убеждаемся, что график симметричен относительно прямой $y = x$. Прямая $y = x$ $(x > 0)$ тоже служит графиком функции (рис. 53).

з) Пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда получаем тождество. Если $x \leqslant 0$, $y > 0$, то $x = 0$, а если $x < 0$, $y < 0$, то $y = x$. При $x > 0$, $y \leqslant 0$ имеем $y = 0$.

Наконец, если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Следовательно, график состоит из всех точек первой четверти и из прямых $x = 0$, $y = x$, $y = 0$ (рис. 54).

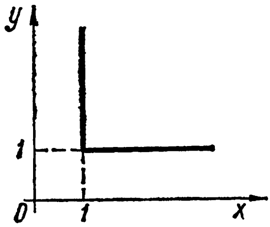

Рис. 55

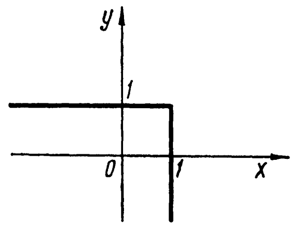

Рис. 56

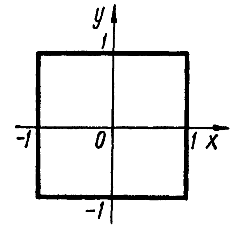

Рис. 57

299. Построить графики неявных функций:

а) $\min(x, y) = 1$; в) $\max(|x|, |y|) = 1$;

б) $\max(x, y) = 1$; г) $\min(x^2, y) = 1$.

Построение. а) Точки $A(1, y)$ принадлежат графику для всех $y \geqslant 1$, а точки $B(x, 1)$ принадлежат графику для всех $x \geqslant 1$ (рис. 55).

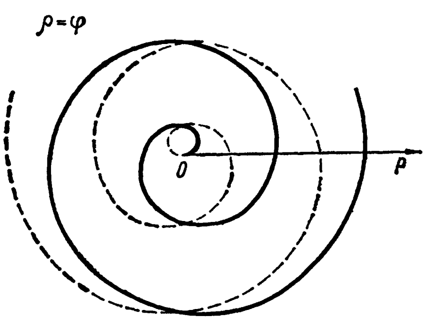

Рис. 58

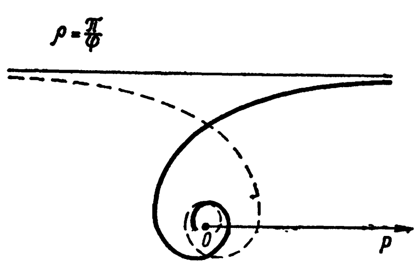

Рис. 59

б) Очевидно, что точки $A(1, y)$, $y \leqslant 1$ и $B(x, 1)$, $x \leqslant 1$ принадлежат графику (рис. 56).

в) Точки $A(1, |y|)$, $|y| \leqslant 1$; $B(-1, |y|)$, $|y| \leqslant 1$; $C(|x|, 1)$, $|x| \leqslant 1$; $D(|x|, -1)$, $|x| \leqslant 1$ принадлежат графику (рис. 57).

г) Так как точки $A(1, y)$, $y \geqslant 1$ и $B(x^2, 1)$, $x^2 \geqslant 1$ лежат на графике, то график будет такой же, как и в случае а), если $x \geqslant 1$. Для $x \leqslant -1$ график строится с учетом четности функции.

300. Построить графики функций $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат, если:

а) $\rho = \varphi$ (спираль Архимеда); б) $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$ (гиперболическая спираль); в) $\rho = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ $(0 \leqslant \varphi < +\infty)$; г) $\rho = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (логарифмическая спираль); д) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ (кардиоида); е) $\rho = 10\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза); ж) $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли); з) $\varphi = \frac{\rho}{\rho-1}$ $(\rho > 1)$; и) $\varphi = 2\pi \sin\rho$.

Построение. а) При возрастании φ от 0 до $+\infty$ радиус ρ неограниченно возрастает. Аналогично, если угол φ убывает от 0 до $-\infty$, то ρ также убывает от 0 до $-\infty$ (рис. 58).

б) Если угол φ, убывая, стремится к нулю, то радиус ρ неограниченно возрастает. Но так как $y = \rho\sin\varphi = \pi\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to \pi$, то кривая асимптотически стремится к прямой, параллельной оси Ox, удаленной

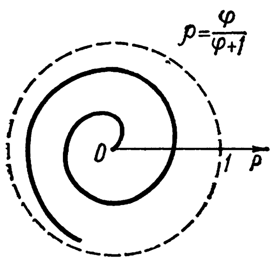

Рис. 60

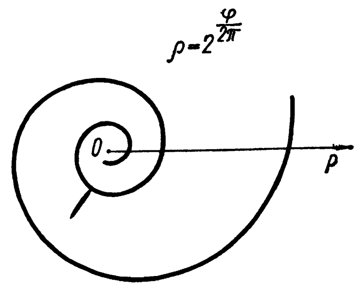

Рис. 61

от нее на π. При возрастании угла φ кривая наматывается на начало координат (рис. 59). Аналогично строится график при $-\infty < \varphi \leqslant 0$.

в) Если $\varphi \to +\infty$, то $\rho \to 1-0$, следовательно, окружность $\rho = 1$ будет асимптотой графика функции при $\varphi \to +\infty$ (рис. 60).

г) При неограниченном возрастании угла φ $(0 \leqslant \varphi < \infty)$ радиус ρ также неограниченно возрастает, а при убывании φ от 0 до $-\infty$ радиус ρ, убывая, стремится к нулю, никогда его не достигая (рис. 61).

д) Имеем

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	4	$2+\sqrt{2}$	2	$2-\sqrt{2}$	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	4

Теперь строим график кардиоиды (рис. 62).

е) Функция периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 10$.

φ	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$
ρ	0	5	$5\sqrt{3}$	10	$5\sqrt{3}$	5	0	-5	$-5\sqrt{3}$	-10	$-5\sqrt{3}$	-5	0

Учитывая периодичность, строим график (рис. 63).

ж) Функция $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$ определена, если $\cos 2\varphi \geqslant 0$, т. е., если $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$, симметрична относительно лучей

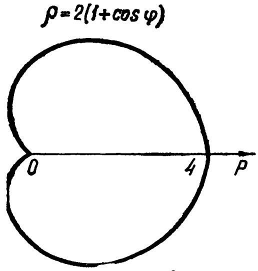

Рис. 62

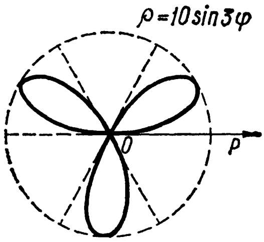

Рис. 63

$\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Пользуясь этим и таблицей значений функции

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	6	$3\sqrt[4]{12}$	$3\sqrt[4]{8}$	3	0

строим график функции (рис. 64).

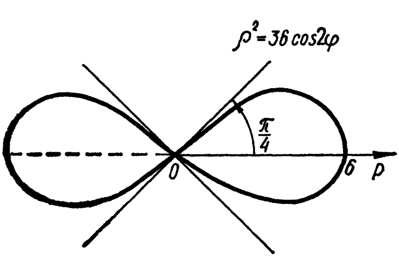

Рис. 64

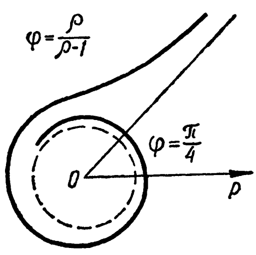

Рис. 65

з) Разрешая равенство $\varphi = \frac{\rho}{\rho-1}$ $(\rho > 1)$ относительно ρ, получаем $\rho = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$, откуда следует, что если $\varphi \to 1+0$, то $\rho \to +\infty$, т. е. прямая $\varphi = 1$ является асимптотой графика функции.

Пользуясь таблицей значений

φ	$1+\frac{1}{n}$	n
ρ	$n+1$	$\frac{n}{n-1}$

функции, строим ее график (рис. 65).

и) $\varphi = 2\pi \sin \rho$. Функция периодическая по ρ с периодом 2π. Если $0 \leqslant \rho < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \rho < \pi$, $\pi \leqslant \rho < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leqslant \rho < 2\pi$, то границы для φ задаются соответственно неравенствами: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; $2\pi \geqslant \varphi > 0$; $0 \geqslant \varphi > -2\pi$; $-2\pi \leqslant \varphi < 0$ (рис. 66).

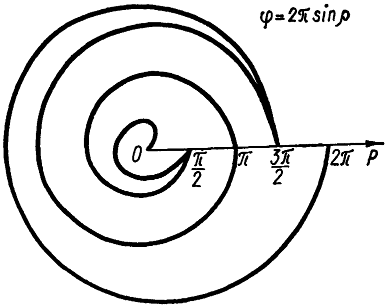

Рис. 66

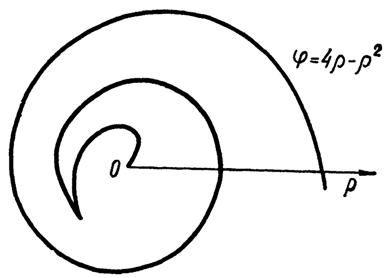

Рис. 67

301. Построить в полярных координатах ρ и φ графики следующих функций:

а) $\varphi = 4\rho - \rho^2$; б) $\varphi = \frac{12\rho}{1+\rho^2}$; в) $\rho^2 + \varphi^2 = 100$.

Построение. а) Имеем $\varphi = 4\rho - \rho^2 = 4 - (\rho - 2)^2$. Если ρ возрастает от нуля до 2, то угол φ возрастает от 0 до 4; если ρ возрастает от 2 до $+\infty$, то угол φ убывает от 4 до $-\infty$. Составляя таблицу

ρ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6	$\rho \to +\infty$
φ	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	0	-5	-12	$\varphi \to -\infty$

значений функции, строим ее график (рис. 67).

б) Если ρ возрастает от 0 до 1, то φ возрастает от 0 до 6; если же ρ возрастает от 1 до $+\infty$, то φ убывает от 6 до 0. Луч $\varphi = 0$ является асимптотой графика функции (рис. 68).

в) График функции $\rho^2 + \varphi^2 = 100$ симметричен относительно лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Область определения $|\varphi| \leqslant 10$. Пользуясь этим и таблицей значений функции

φ	0	$\frac{\pi}{2} \approx$ $\approx 1{,}57$	$\pi \approx 3{,}14$	$\frac{3\pi}{2} \approx$ $\approx 4{,}71$	$2\pi \approx$ $\approx 6{,}28$	$\frac{5\pi}{2}$	3π	10
ρ	10	9,88	9,50	8,82	7,78	6,20	3,36	0

строим ее график (рис. 69).

302. Построить в полярных координатах ρ и φ график функции, заданной параметрически ($t \geqslant 0$ — параметр):

$$\begin{cases} \varphi = t\cos^2 t; \\ \rho = t\sin^2 t. \end{cases}$$

Построение. Сначала построим графики функций $\varphi = t\cos^2 t$ и $\rho = t\sin^2 t$ в плоскостях (t, φ) и (t, ρ) соответственно (рис. 70).

Цифрой $k\,(k = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать график функции $\rho = \rho(\varphi)$, если параметр t изменяется в интервале $\frac{\pi}{2}(k-1) \leqslant t < k\frac{\pi}{2}$. При этом стрелкой будем обозначать направление движения точки $M(\varphi, \rho)$ при возрастании параметра.

Рис. 68

Если в плоскости (t, ρ) все графики функции $\rho_k = t\cos^2 t$, $(k-1)\pi \leqslant t \leqslant k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сместить в интервал $(0, \pi)$ (рис. 71), то легко убедиться, что

$$\rho_{k+1} > \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad 0 < t < \pi,$$

$$\rho_k\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} - t\right) < \rho_k\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} + t\right), \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь этими данными, строим график функции $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 72).

303. Найти интервалы выпуклости функции

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a > 0).$$

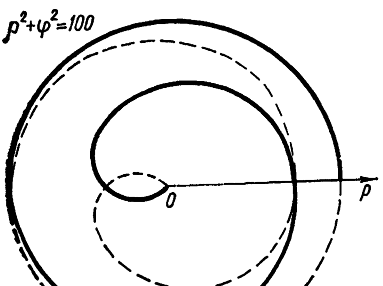

Рис. 69

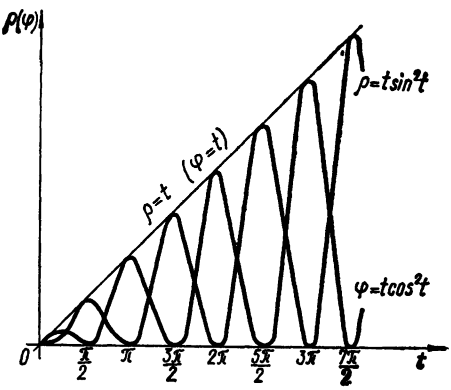

Рис. 70

Решение. Пусть $\alpha \in [0, 1]$, а x_1 и x_2 — произвольные числа. Тогда

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] =$$
$$= a[\alpha x_1^3 + (1-\alpha)x_2^3 - (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^3] + b(\alpha - \alpha^2)(x_1 - x_2)^2 =$$
$$= a(\alpha - \alpha^2)(x_1 - x_2)^2\left[(1+\alpha)x_1 + (2-\alpha)x_2 + \frac{b}{a}\right] \geqslant 0,$$

если $x=\min\{x_1, x_2\}$ удовлетворяет неравенству

$$(1+\alpha)x+(2-\alpha)x+\frac{b}{a}\geqslant 0.$$

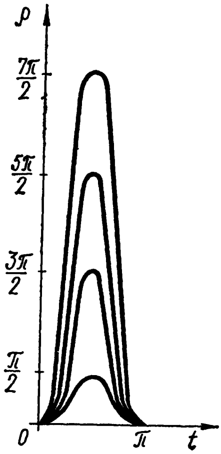

Рис. 71

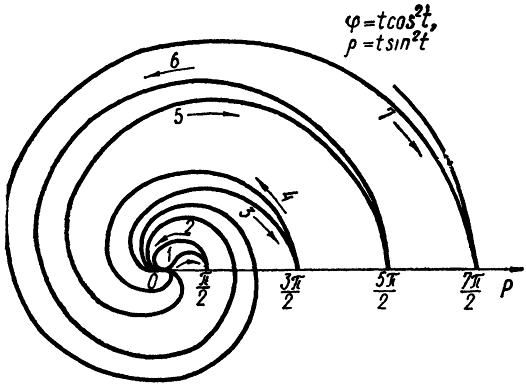

Рис. 72

Отсюда находим, что $x\geqslant-\frac{b}{3a}$. Таким образом, если $x\geqslant-\frac{b}{3a}$, то функция выпукла вниз. Аналогично показывается, что при $x\leqslant-\frac{b}{3a}$ функция выпукла вверх.

§ 6. Непрерывность функций

1°. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x=x_0$ (или в точке x_0), если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \tag{1}$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x=x_0$ и $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на данном множестве* $X=\{x\}$ (интервале, сегменте и т. п.), если эта функция непрерывна в каждой точке множества X.

Если при некотором значении $x=x_0$, принадлежащем области определения $X=\{x\}$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x=x_0$, или не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ или обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Различают *точки разрыва первого рода,* для которых существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ и } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

и *точки разрыва второго рода* — все остальные. Разность

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

называется *скачком функции* в точке x_0.

Если выполнено равенство

$$f(x_0-0)=f(x_0+0),$$

то точка разрыва x_0 называется *устранимой.*

Если хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен символу ∞, то x_0 называется *точкой бесконечного разрыва.*

Если выполнено равенство $f(x_0-0)=f(x_0)$ (или $f(x_0+0)=f(x_0)$), то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна слева* (справа) в точке x_0. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2°. Непрерывность элементарных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x=x_0$, то функции

а) $f(x)\pm g(x)$; б) $f(x)g(x)$; в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$

также непрерывны при $x=x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x; б) дробная рациональная функция

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x, не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... — непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x\to x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y=f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x=x_0$.

3°. Основные теоремы о непрерывных функциях. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то: 1) $f(x)$ ограничена на этом сегменте; 2) достигает на нем своей нижней грани m и верхней грани M (теорема Вейерштрасса); 3) принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (теорема Коши). В частности, если $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, то найдется такое значение γ $(\alpha<\gamma<\beta)$, что $f(\gamma)=0$.

304. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varepsilon = 0{,}001$. Для значений $x_0 = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$; ... найти такие максимально большие положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно ли для данного $\varepsilon = 0{,}001$ выбрать такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех значений x_0 из интервала $(0{,}1)$, т. е. такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каково бы ни было значение $x_0 \in (0,\ 1)$?

Решение. Так как $x > 0$ и $x_0 > 0$, то из неравенства

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} \leqslant \frac{|x - x_0|}{x_0(x_0 - |x - x_0|)} < \varepsilon$$

находим, что

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} = \delta(\varepsilon,\ x_0) \approx 0{,}001 x_0^2.$$

Тогда: *а*) $\delta \approx 10^{-5}$; б) $\delta \approx 10^{-7}$; в) $\delta \approx 10^{-9}$.

Предположим теперь, что для $\varepsilon = 0{,}001$ существует постоянное $\delta > 0$, пригодное для всех $x_0 \in (0,\ 1)$. Тогда при $x = x_0 - \frac{\delta}{2}$ имеем, что $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$, однако неравенство

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{\frac{\delta}{2}}{x_0^2 - \frac{x_0\delta}{2}} < \varepsilon$$

справедливо лишь при $\frac{\delta}{4} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon}} < x_0 < 1$ и, следовательно, не справедливо при

$$0 < x_0 < \frac{\delta}{4} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon}}.$$

Таким образом, постоянного $\delta > 0$, пригодного для всех $x_0 \in (0, 1)$, не существует.

305. Пусть для некоторых $\varepsilon > 0$ можно найти такие числа $\delta = \delta(\varepsilon,\ x_0)$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если: а) числа $\varepsilon > 0$ образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$.

Решение. а) Если числа $\varepsilon > 0$ образуют конечное множество, то существует наименьшее $\varepsilon_0 > 0$ среди чисел ε. Тогда для $\forall \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ уже не существует числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, требуемого в определении непрерывности функции. Утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна, нельзя.

б) Функция $f(x)$ непрерывна, так как для $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N : \forall n > N$,

$\varepsilon = \frac{1}{2^n} < \varepsilon_1$. А всякое $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ из определения непрерывности, пригодное для $\varepsilon > 0$, является также пригодным для $\forall \varepsilon_1 > \varepsilon$.

306. Пусть дана функция $f(x) = x + 0{,}001\,[x]$.

Показать, что для каждого $\varepsilon > 0{,}001$ можно подобрать такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}001$ для всех значений x этого сделать нельзя.

В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

Решение. Так как любые числа x и x' можно представить в виде $x = n + q$, $x' = n' + q'$, где $0 \leqslant q < 1$, $0 \leqslant q' < 1$, а n, n' — целые, причем

$|x - x'| = |n - n' + q - q'| \geqslant |n - n'| - |q - q'| \geqslant |[x] - [x']| - 1$, то $|[x] - [x']| \leqslant |x - x'| + 1$.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0{,}001$. Тогда

$$|f(x) - f(x')| = |x - x' + 0{,}001([x] - [x'])| \leqslant |x - x'| +$$
$$+ 0{,}001\,|[x] - [x']| \leqslant |x - x'| + 0{,}001(|x - x'| + 1) =$$
$$= 1{,}001\,|x - x'| + 0{,}001 < \varepsilon,$$

если $0 < |x - x'| < \frac{\varepsilon - 0{,}001}{1{,}001} = \delta(\varepsilon, x)$.

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}001$. Тогда, если взять $x = n$, $x' = n - 1 + \frac{k}{k+1}$, где n — целое, а k — натуральное, то

$$|f(x) - f(x')| = \frac{1}{k+1} + 0{,}001 > \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

в то время как $|x - x'| = \frac{1}{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. при $\forall \delta > 0$ $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x)$ терпит разрыв при $x = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Если же $x = n + q$, $x' = n + q'$ $(0 < q < 1,\ 0 < q' < 1)$, то при $\forall \varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| < \varepsilon,$$

как только $|x - x'| < \delta = \varepsilon$, так что $f(x)$ непрерывна на каждом из интервалов $n < x < n + 1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

307. Пусть для каждого достаточно малого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции описывается данными неравенствами?

Решение. Функция $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной. Например, пусть $f(x) = [1 + (x - x_0)^2]\,\mathrm{sgn}\,(x - x_0)$. Тогда для каждого как угодно малого $\delta > 0$ $\exists x : |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 + (x - x_0)^2 < 1 + \delta^2 = \varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0),$$

т. е. наши условия выполнены. Однако $|f(x)-f(x_0)|>1$ при всех x и, следовательно, разность $|f(x)-f(x_0)|$ не может быть меньше ε, если $0<\varepsilon<1$.

Сформулированные в задаче условия обеспечивают лишь ограниченность функции $f(x)$ в точке $x=x_0$.

308. С помощью «$\varepsilon-\delta$»-рассуждений доказать непрерывность следующих функций: а) $ax+b$; б) x^2; в) x^3; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sin x$; ж) $\cos x$; з) $\operatorname{arctg} x$.

Доказательство. а) Возьмем $\forall\, \varepsilon>0$. Тогда для $\forall\, x_0$ $|ax+b-ax_0-b|=|a||x-x_0|<\varepsilon$, если $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|}=\delta(\varepsilon, x_0)$.

б) Пусть $\varepsilon>0$ — произвольно. Тогда

$$|x^2-x_0^2|=|(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0)|=|x-x_0|^2+2|x_0||x-x_0|<\varepsilon,$$

как только $|x-x_0|<\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|=\delta(\varepsilon, x_0)$.

в) Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное, но такое, что $0<\varepsilon<1$. Имеем $|x^3-x_0^3|=|x^2+xx_0+x_0^2||x-x_0|$. Пусть $|x-x_0|<1$. Тогда $|x|\leqslant|x_0|+1$, поэтому

$$|x^3-x_0^3|\leqslant(3|x_0|^3+3|x_0|+1)|x-x_0|<\varepsilon,$$

если

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{3|x_0|^3+3|x_0|+1}=\delta(\varepsilon, x_0).$$

г) Для произвольного $\varepsilon>0$ имеем

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

если $|x-x_0|<\varepsilon\sqrt{x_0}=\delta(\varepsilon, x_0)$.

д) $$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}=\frac{|x-x_0|}{\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x-x_0|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}}<\varepsilon,$$

если $|x-x_0|<\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}\,\varepsilon=\delta(\varepsilon, x_0)$.

е) $$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2}\cdot 1=$$
$=|x-x_0|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$.

ж) $$|\cos x-\cos x_0|=\left|-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right|<|x-x_0|<\varepsilon$$
при $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$.

з) Пусть $|x_0|>0$ и $|h|=|x-x_0|<|x_0|$. Если $\operatorname{arctg}(x_0+h)-\operatorname{arctg} x_0=t$, то $\operatorname{tg} t=\frac{h}{1+x_0^2+x_0h}$, а так как $|t|\leqslant|\operatorname{tg} t|$ при $|t|<$

$< \frac{\pi}{2}$, то $|\operatorname{arctg}(x_0+h) - \operatorname{arctg} x_0| = |t| < |\operatorname{tg} t| = \left|\frac{h}{1+x_0^2+hx_0}\right| <$

$< \frac{|h|}{1+x_0^2-|h||x_0|} < \varepsilon,$

если $|h| = |x - x_0| < \frac{(1+x_0^2)\varepsilon}{1+|x_0|\varepsilon} = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Непрерывность $\operatorname{arctg} x$ при $x=0$ следует из неравенства $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| = |\operatorname{arctg} x| < |x|$.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

309. а) $f_1(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$, если $x \neq 0$ и $f_1(0) = 1$;

б) $f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $f_2(0) = 1$.

Решение. а) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ при $|x| < \delta$. Тогда (см. пример 21, а) $\left|\left|\frac{\sin x}{x}\right| - 1\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ при $|x| < \delta$, т. е. $f_1(x)$ — непрерывная функция при $x = 0$. Непрерывность при $x \neq 0$ очевидна.

б) Имеем $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f_2(+0)$, $\lim\limits_{x\to-0} \frac{\sin x}{|x|} =$
$= \lim\limits_{x\to-0} \frac{\sin x}{-x} = -1 = f_2(-0)$.

Так как $f_2(+0) \neq f_2(-0)$, то функция терпит разрыв при $x = 0$.

310. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0)$ — произвольно.

Решение. Пусть $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $x_n' = \frac{2}{\pi(1+4n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как при $n \to \infty$ $x_n \to 0$, $x_n' \to 0$, а $f(x_n) \to 0$, $f(x_n') \to 1$, то предел $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует, что влечет разрыв второго рода функции $f(x)$ при $x = 0$.

311. $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Решение. Непрерывность функции $f(x)$ при $x = 0$ следует из того, что $0 \leqslant \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$ при $|x| < \delta = \varepsilon$.

Если $x \neq 0$, то непрерывность очевидна.

312. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, если $x \neq 1$ и $f(1)$ — произвольно.

Решение. Так как $f(1-0) = 1 \neq f(1+0) = 0$, то функция разрывна при $x = 1$.

313. $f(x) = x\ln x^2$, если $x \neq 0$ и $f(0) = \alpha$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim\limits_{x\to 0} 2x\ln|x| = 0$ (см. пример 205). Отсюда, если $\alpha = 0$, то функция непрерывна при $x = 0$, если же $\alpha \neq 0$, то разрывна.

314. $f(x) = [x]$.

Решение. Если $k < x < k+1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то $[x] = k$ и, следовательно, $f(x)$ — непрерывна. Если же $x_0 = k$, то при $x = k - 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ для $\forall\, \delta > 0$ $\exists\, \alpha\, (0 < \alpha < 1)$ такое, что $|x_0 - x| = |1 - \alpha| < \delta$, однако $|[x] - [x_0]| = 1$, т. е. функция $f(x)$ разрывна при $x = k$ (k — целое).

Определить точки разрыва и исследовать характер этих точек, если:

315. $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y = -\infty$, т. е. $x = -1$ — точка бесконечного разрыва.

316. $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.

Решение. Функция не определена при $x = -1, 0, +1$. Так как

$$\lim_{x\to -1\pm 0} y(x) = \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{x-1}{x+1} = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1, \quad \lim_{x\to 1} y(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0,$$

то $x = 0$ и $x = 1$ — устранимые точки разрыва, а $x = -1$ — точка бесконечного разрыва.

317. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, а $\lim\limits_{x\to k\pi} \dfrac{x}{\sin x} = \infty$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), то $x = 0$ — устранимая точка разрыва, а $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва.

318. $y = \cos^2 \dfrac{1}{x}$.

Решение. Пусть $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $\cos^2 \dfrac{1}{x_n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Если же $x'_n = \dfrac{2}{\pi(1+2n)}$ ($n = 1, 2, \ldots$), то $x'_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $\cos^2 \dfrac{1}{x'_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2 \dfrac{1}{x}$ не существует и $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

319. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$, так как при $t > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$

$$\operatorname{arctg} t > \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Аналогично показывается, что $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва первого рода.

320. $y = \sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

Решение. Из неравенства $\left|\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right| \leqslant \sqrt{x}\frac{\pi}{2}$ вытекает, что $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$, так что $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

321. $y = e^{x+\frac{1}{x}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+0} e^{x+\frac{1}{x}} = +\infty$, то $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

322. $y = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x\to\pm 0} \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x}{x} = \mp\infty,$$

т. е. $x = 0$ — точка бесконечного разрыва.

Далее,

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1,$$

поэтому $x = 1$ — точка разрыва первого рода.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

323. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

Решение. При $n\pi < x < (n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ функция непрерывна, так как она равна постоянной. Исследуем точки $x_0 = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Пусть $x = n\pi + \delta\, (0 < \delta < \pi)$. Тогда $|\operatorname{sgn}(\sin n\pi) - \operatorname{sgn}(\sin(n\pi + \delta))| = 1 > \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Следовательно, $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва первого рода.

324. $y = x - [x]$.

Решение. Так как первое слагаемое — непрерывная функция, а второе слагаемое терпит разрывы при $x = k$ (k — целое) (см. пример 314), то сумма также имеет разрывы (первого рода) в точках $x = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

325. $y = x[x]$.

Решение. Достаточно исследовать на непрерывность в точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Так как при $|x| < 1$ $0 \leqslant |x[x]| \leqslant |x|$, то $\lim\limits_{x \to 0} x[x] = 0 = y(0)$, т. е. $y(x)$ непрерывна при $x = 0$.

Пусть $x_0 = n$, $x = n - 1 + h$ $(0 < h < 1)$. Тогда $2n - 1 > |y(x_0) - y(x)| = |n^2 - (n - 1 + h)(n - 1)| > n$, так что $x = n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва первого рода.

326. $y = [x] \sin \pi x$.

Решение. Пусть $n - \frac{1}{2} < x < n + \frac{1}{2}$ (n — целое). Тогда $-|n - 1||\sin \pi x| \leqslant -|[x] \sin \pi x| \leqslant [x] \sin \pi x \leqslant |[x] \sin \pi x| \leqslant$
$\leqslant |n||\sin \pi x|$.
Так как $\lim\limits_{x \to n}(-|n - 1||\sin \pi x|) = \lim\limits_{x \to n} |n||\sin \pi x| = 0$, то $\lim\limits_{x \to n} [x] \sin \pi x = 0 = y(n)$, так что функция непрерывна при $x = n$ (n — целое).

Непрерывность в остальных точках очевидна.

327. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

Решение. Полагая при $x \neq 0$ $\frac{1}{x} = t$, получаем $y = [t]$, $t = k = \frac{1}{x}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва первого рода (см. пример 314), так что остается исследовать точку $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x \to +0}\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$ (что вытекает из примера 229), то $x = 0$ — точка бесконечного разрыва.

328. $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \to \frac{1}{k}+0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{k}(k - 1);$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{k}-0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{k} \cdot k = 1; \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \qquad \text{(см. пример 229).}$$

Следовательно, функция терпит разрывы при $x = \frac{1}{k}$ $\left(k = \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$ (точки разрыва первого рода), а $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

329. $y = \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

Решение. Исследуем возможные точки разрыва:

$$x=0;\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}};\quad x=\pm\frac{1}{k}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть $x_n=\frac{2}{1+4n}$ и $x_n'=\frac{2}{3+4n}$. Если $n\to\infty$, то $x_n\to 0$ и $x_n'\to 0$, однако при этом $y(x_n)=2n+4n^2\to+\infty$, а $y(x_n')=-(2+6n+4n^2)\to-\infty$, т. е. предел $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$ не существует. Поэтому $x=0$ — точка разрыва второго рода.

Покажем, например, что $x=\frac{1}{\sqrt{k}}$ — точка разрыва первого рода (в остальных точках исследования аналогичны). Имеем

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-0\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\alpha\right)^2}\right]\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{k}}-\alpha}=$$

$$=\lim_{\beta\to+0}[(\sqrt{k}+\beta)^2]\operatorname{sgn}\sin\pi(\sqrt{k}+\beta)=k\operatorname{sgn}\sin\pi\sqrt{k},$$

$$\beta=\frac{\alpha k}{1-\alpha\sqrt{k}};$$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+0\right)=\lim_{\beta\to+0}[(\sqrt{k}-\beta)^2]\operatorname{sgn}\sin\pi(\sqrt{k}-\beta)=$$

$$=(k-1)\operatorname{sgn}\sin(\sqrt{k}-0)\pi,$$

$$\beta=\alpha k(1+\alpha\sqrt{k})^{-1}\qquad(\alpha\to+0).$$

Отсюда $\left|y\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-0\right)-y\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+0\right)\right|=1$, так что $x=\frac{1}{\sqrt{k}}$ — точка разрыва первого рода.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

330. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}\qquad(x\geqslant 0)$.

Решение. Имеем

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ \frac{1}{2}, & \text{если } x=1;\\ 0, & \text{если } x>1,\end{cases}$$

откуда следует, что $x=1$ — точка разрыва первого рода.

331. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

Решение. Имеем

$$y=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}=1, & 0<x<\infty;\\ 0, & x=0;\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}}=-1, & -\infty<x<0.\end{cases}$$

Следовательно, $y = \operatorname{sgn} x$ и $x = 0$ — точка разрыва первого рода.

332. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$.

Решение. Так как

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ \lim\limits_{n\to\infty} x^2 \sqrt[n]{\dfrac{1}{x^{2n}} + 1} = x^2, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

а $y(\pm 1 - 0) = y(\pm 1 + 0)$, то функция непрерывна при всех значениях x.

333. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$.

Решение. Так как

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}} = \begin{cases} x, & \text{если } |\sin x| < \frac{1}{2}, |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, & \text{если } |\sin x| = \frac{1}{2}, x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; \\ 0, & \text{если } |\sin x| > \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то при $|\sin x| = \frac{1}{2}$, т. е. при $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ функция терпит разрывы, причем разрывы первого рода.

334. $y = \lim\limits_{n\to\infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)]$.

Решение. Имеем

$$y = \lim_{n\to\infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x, & \text{если } k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ -\frac{\pi}{2} x, & \text{если } k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi, \end{cases}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Очевидно, что $x_k = \frac{k\pi}{2}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва первого рода, $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

335. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

Решение. Так как

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \begin{cases} x^2, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

то легко видеть, что функция непрерывна при всех значениях x.

336. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < 0; \\ a + x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

Решение. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна при $x < 0$ и при $x > 0$, а так как $f(+0) = 1, f(-0) = a, f(0) = a$, то функция будет непрерывной и в точке $x = 0$, если $a = 1$:

337. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2 - x^2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ |x - 1| & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{для нецелого } x; \\ 0 & \text{для целого } x; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{для рационального } x; \\ 0 & \text{для иррационального } x. \end{cases}$

Решение. а) Функция $f(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x < 1$ и при $1 < x \leqslant 2$, а так как $f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(0) = 1$, то функция непрерывна и при $x = 1$.

б) Имеем $f(-1 - 0) = +1$, $f(-1 + 0) = f(-1) = -1$, следовательно, $x = -1$ — точка разрыва первого рода. Далее, $f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1) = 1$, поэтому точка $x = 1$, как и все остальные, является точкой непрерывности функции $f(x)$.

в) Достаточно исследовать на непрерывность функцию в точках $x = +1$ и $x = -1$. Непрерывность функции в точке $x = +1$ следует из того, что $f(+1 - 0) = f(+1 + 0) = f(+1) = 0$; точка $x = -1$ является точкой разрыва первого рода, так как $f(-1 - 0) = 2, f(-1 + 0) = f(-1) = 0$.

г) Так как $\lim\limits_{x \to k} |\operatorname{ctg}^2 \pi x| = +\infty$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то $x = k$ — точки бесконечного разрыва.

д) Пусть $x_0 \neq n$ (n — целое) — произвольно, $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0, а $\{x_n'\}$ — последовательность иррациональных чисел, также сходящаяся к x_0. Из равенств

$$\lim_{n \to \infty} \sin \pi x_n = \sin \pi x_0 \neq 0, \quad \lim_{n \to \infty} \sin \pi x_n' = 0$$

вытекает, что предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, т. е. x_0 — точка разрыва.

Если же $x_0 = n$, где n — одно из чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$|f(x_0) - f(x)| = |f(x)| \leqslant |\sin \pi x| = |\sin[\pi n + \pi(x - n)]| =$$

$$= |\cos \pi n \cdot \sin \pi(x - n)| = |\sin \pi(x - x_0)| < \pi |x - x_0| < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\pi} = \delta(\varepsilon, x_0)$, т. е. $x_0 = n$ — точка непрерывности. Таким образом, точки $x \neq n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва второго рода.

338. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \{\lim_{n\to\infty} \cos^n (\pi m!\ x)\}$$

разрывна при каждом значении x.

Доказательство. Если $x = \frac{p}{q}$ — рациональное число, то $m!\ x = m! \cdot \frac{p}{q} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (q-1)(q+1) \ldots mp$ — четное, поэтому $\cos \pi m!\, x = 1$ и $\chi(x) = 1$. Если же x — иррациональное число, то $m!\, x$ не является целым ни при каких m, следовательно, $|\cos \pi m!\, x| < 1$. А так как $\lim_{n\to\infty} \cos^n \pi m!\, x = 0$, то $\chi(x) = 0$.

Таким образом,

$$\chi = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Пусть x_0 — произвольно, $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел и $\{x_n'\}$ — последовательность иррациональных чисел, сходящихся к x_0.

Так как $\lim_{n\to\infty} \chi(x_n) = 1$, а $\lim_{n\to\infty} \chi(x_n') = 0$, то x_0 — точка разрыва.

339. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = x\chi(x),$$

где χ — функция Дирихле (см. предыдущий пример). Построить эскиз графика этой функции.

Решение. Пусть $x_0 \neq 0$ — произвольно, а $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n\to\infty} x_n' = x_0$, причем x_n — рациональные, а x_n' — иррациональные числа при всех n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 0,$$

откуда следует, что x_0 — точка разрыва.

Если же $x_0 = 0$, то, переходя к пределу в очевидном неравенстве

$$0 \leqslant |f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x\chi(x)| \leqslant |x|,$$

получаем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Таким образом, $x_0 = 0$ — единственная точка непрерывности функции $f(x)$.

Построить эскиз графика предоставляем читателю.

340. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — взаимно простые числа;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x. Построить эскиз графика этой функции.

Доказательство. Пусть $x_0 = \frac{p}{q}$ — рациональное, так что $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Очевидно, что последовательность рациональных чисел $\left\{\frac{pn+1}{qn}\right\}$ сходится к $\frac{p}{q} = x_0$ при $n \to \infty$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{pn+1}{qn}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{qn} = 0$, то каждая рациональная точка $\frac{p}{q}$ является точкой разрыва (x_0 — произвольная рациональная точка).

Пусть α — произвольное иррациональное число, а $x_n = r_n = \frac{p_n}{q_n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) — произвольная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(\alpha).$$

А так как $f(x) = 0$ при x — иррациональном, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) = 0$ будет иметь место для любой последовательности $\{x_n\}$ с произвольными членами, сходящейся к иррациональному числу α. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна при каждом иррациональном значении x и ее график симметричен относительно обеих осей координат.

$f(x)$	x														
1	1	2	3	4	5	6	7	8							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{9}{2}$		$\frac{11}{2}$		$\frac{13}{2}$		$\frac{15}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$		$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$		$\frac{13}{3}$	$\frac{14}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{9}{4}$		$\frac{11}{4}$		$\frac{13}{4}$		$\frac{15}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$		$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{14}{5}$	
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{10}{11}$		$\frac{12}{11}$	$\frac{13}{11}$	$\frac{14}{11}$	$\frac{15}{11}$
0	все иррациональные числа														

График изображен на рис. 73.

341. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{nx}{n+1}$, если x есть несократимая дробь $\frac{m}{n}$ ($n \geqslant 1$), и $f(x) = |x|$, если x — иррациональное число. Построить эскиз графика этой функции.

Решение. Пусть x_0 — рационально, т. е. $x_0 = \frac{m}{n}$ ($n \geqslant 1$). Согласно условию $f(x_0) = \frac{m}{n+1}$. Так как $x_k = \frac{km+1}{kn} \to \frac{m}{n} = x_0$ при

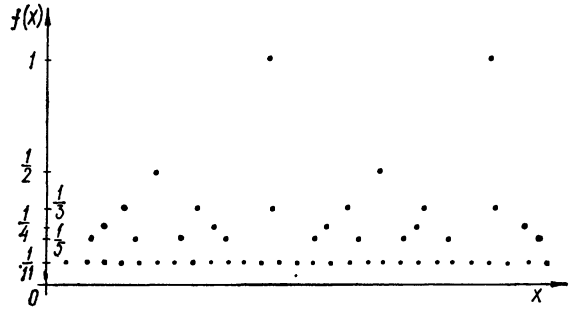

Рис. 73

$k \to \infty$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{km+1}{kn+1} = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1} = f(x_0)$, то функция $f(x)$ разрывна при всех рациональных значениях аргумента.

Пусть теперь x_0 — иррационально, а $x_k = \frac{m_k}{n_k}$ ($k = 1, 2, \ldots$) — произвольная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} |m_k| = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} |n_k| = \infty$$

и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{m_k}{n_k}}{1+\frac{1}{n_k}} = x_0 = \begin{cases} |x_0| = f(x_0), & \text{если } x_0 > 0, \\ -|x_0|, & \text{если } x_0 < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что функция разрывна при отрицательных иррациональных значениях аргумента. Если $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, причем $x_k \geqslant 0$ — иррациональные числа, то

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} |x_k| = |x_0| = f(x_0). \tag{2}$$

Пусть, наконец, $\{x_k\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к иррациональному числу x_0. Обозначим через $\{x_{k_p}\}$ подпоследовательность всех рациональных чисел, содержащихся в $\{x_k\}$, а через $\{x_{k_q}\}$ — подпоследовательность всех иррациональных чисел из $\{x_k\}$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что обе последовательности бесконечные. Так как $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k_p} = x_0$ и $\lim\limits_{q\to\infty} x_{k_q} = x_0$, то на основании (1) и (2) легко показать, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = |x_0| = f(x_0).$$

Таким образом, функция непрерывна только при положительных иррациональных значениях аргумента. Построить эскиз графика предоставляем читателю.

342. Функция $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ определена для всех значений аргумента x, кроме $x = 0$. Какое значение следует принимать функции $f(x)$ в точке $x = 0$, чтобы она была непрерывной при $x = 0$?

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ существует и равен $\frac{1}{2}$, то функция $f(x)$ будет непрерывной при $x = 0$, если положить $f(0) = \frac{1}{2}$.

343. Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x) + g(x)$, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x = x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$? Привести соответствующие примеры.

Решение. а) Пусть $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ — две последовательности, сходящиеся к x_0 и такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} g(x'_n) = B$, где A и B — числа или символы $+\infty$ или $-\infty$, причем $A \neq B$, если A и B конечные. Очевидно, что такие последовательности существуют для любой разрывной функции $g(x)$. Так как пределы

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n) + g(x_n)] = f(x_0) + A,$$

$$\lim_{n\to\infty} [f(x'_n) + g(x'_n)] = f(x_0) + B$$

не равны друг другу или хотя бы один из них бесконечный, то сумма $f(x) + g(x)$ — разрывная функция при $x = x_0$.

б) Нет, например, обе функции $f(x) = -\frac{1}{x-x_0}$ и $g(x) = x + \frac{1}{x-x_0}$, $x \neq x_0$, $f(x_0) = g(x_0) = \frac{x_0}{2}$ разрывны при $x = x_0$, но их сумма $f(x) + g(x) = x$ — непрерывная функция при всех значениях x.

344. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

Построить пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

Решение. Квадрат разрывной функции не обязательно разрывная функция. Например, если $f(x_0 - 0) = -f(x_0 + 0) = f(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ разрывная при $x = x_0$, но так как $f^2(x_0 - 0) = f^2(x_0 + 0)$, то $f^2(x)$ непрерывная при $x = x_0$.

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция разрывна при каждом значении x (доказательство аналогично доказательству в примере 337, д)), но $f^2(x) \equiv 1$, так что $f^2(x)$ непрерывна при всех x.

345. Исследовать на непрерывность функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$, если:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = 1 + x^2$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = x(1 - x^2)$;

в) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = 1 + x - [x]$.

Решение. а) $f[g(x)] = \operatorname{sgn}(1 + x^2) \equiv 1$, т. е. функция непрерывна. Далее, так как

$$g[f(x)] = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 2, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \\ 2, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

то $x = 0$ — точка разрыва.

б) $$f(g(x)) = \operatorname{sgn} x(1 - x^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 0 \text{ или } 1 < x < \infty; \\ 0, & \text{если } x = 0,\ x = 1,\ x = -1; \\ -1, & \text{если } -\infty < x < -1, 0 < x < 1, \end{cases}$$

так что $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ — точки разрыва.

Из того, что $g(f(x)) = \operatorname{sgn} x(1 - \operatorname{sgn}^2 x) \equiv 0$, следует непрерывность функции $g(f(x))$.

в) Так как любое x можно представить в виде $x = n + q$, где $0 \leqslant q < 1$, а n — целое, то

$$f(g(x)) = \operatorname{sgn}(1 + x - [x]) = \operatorname{sgn}(1 + n + q - n) = \operatorname{sgn}(1 + q) \equiv 1,$$

т. е. $f(g(x))$ — непрерывна.

А так как $g(f(x)) = 1 + \operatorname{sgn} x - [\operatorname{sgn} x] \equiv 1$, то и $g(f(x))$ непрерывна.

346. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, если

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 < u \leqslant 1; \\ 2 - u & \text{при } 1 < u < 2 \end{cases}$$

и

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \text{ рациональном}; \\ 2 - x & \text{при } x \text{ иррациональном}, \end{cases} \quad (0 < x < 1).$$

Решение. Формально вычисляя $f(\varphi(x))$, находим

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } 0 < \varphi(x) \leqslant 1; \\ 2 - \varphi(x) & \text{при } 1 < \varphi(x) < 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x & \text{при } x \text{ рациональном и } 0 < x \leqslant 1; \\ 2 - x & \text{при } x \text{ иррациональном и } 1 < x < 2; \\ 2 - x & \text{при } x \text{ рациональном и } 1 < x < 2; \\ 2 - (2 - x) & \text{при } x \text{ иррациональном и } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Но так как $0 < x < 1$, то $f(\varphi(x)) \equiv x$ и функция непрерывна при этих значениях x.

347. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функция, то

$$F(x) = |f(x)|$$

также непрерывная функция.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, как только $|x - x_0| < \delta$. Но тогда (см. пример 14)

$$|F(x) - F(x_0)| = ||f(x)| - |f(x_0)|| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$
$$\text{если } |x - x_0| < \delta,$$

т. е. $F(x)$ — также непрерывная функция.

348. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

также непрерывны на $[a, b]$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для $\forall\ \varepsilon$, x_0 $(\varepsilon > 0)$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что при $|h| < \delta$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

при этом очевидно, что

$$\sup_{|h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

При $|h| < \delta$ имеем

$$-\sup_{0 \leqslant |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| + m(x_0) \leqslant m(x_0 + h) \leqslant$$
$$\leqslant m(x_0) + \sup_{0 \leqslant |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)|. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $|m(x_0 + h) - m(x_0)| < \varepsilon$, если $|h| < \delta$.

Аналогично

$$-\sup_{0 \leqslant |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| + M(x_0) \leqslant M(x_0 + h) \leqslant$$
$$\leqslant M(x_0) + \sup_{0 \leqslant |h| < \delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)|$$

и $|M(x_0 + h) - M(x_0)| < \varepsilon$ при $|h| < \delta$.

349. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, функции

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \text{ и } \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

также непрерывны.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0)$ — числа, участвующие в определении непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда, если $|h| \leqslant \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ и } |g(x_0 + h) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

так что

$$|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)| \leqslant \max\{\max_{0\leqslant|h|\leqslant\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|;$$

$$\max_{0\leqslant|h|\leqslant\delta}|g(x_0+h)-g(x_0)|\}<\varepsilon;$$

$$|\psi(x_0+h)-\psi(x_0)| \leqslant \max\{\max_{0\leqslant|h|\leqslant\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|;$$

$$\max_{0\leqslant|h|\leqslant\delta}|g(x_0+h)-g(x_0)|\}<\varepsilon.$$

350. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Доказать, что функции $m(x)=\inf\limits_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$ и $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$ непрерывны слева на $[a, b]$.

Доказательство. Так как $f(x)$ ограничена, то функции $m(x)$ и $M(x)$ также ограничены; при этом $m(x)$ монотонно убывает, а $M(x)$ — монотонно возрастает на $[a, b]$. Пусть $x_0\in(a, b]$. Тогда $m(x)\geqslant m(x_0)$ при $x<x_0$.

Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} m(x)$, причем

$$m(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{f(\xi)\}=m(x_0),$$

так что $m(x)$ непрерывна слева в точке x_0.

Если же $x_0\in(a, b]$, то $M(x)\leqslant M(x_0)$ при $x<x_0$; поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} M(x)$, причем

$$M(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} M(x)=\sup_{a\leqslant\xi<x_0}\{f(\xi)\}=M(x_0),$$

т. е. $M(x)$ непрерывна слева в точке x_0.

351. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a\leqslant x<+\infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то эта функция ограничена в данном промежутке.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. Тогда для $\forall\varepsilon>0\,\exists E>0$ такое, что при $\forall x>E\ |f(x)-A|<\varepsilon$, откуда следует, что $|f(x)|<|A|+\varepsilon$ при $\forall x>E$. Если обозначить $M=\max\{|A|+\varepsilon, \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant E}\{f(x)\}\}$, то $|f(x)|\leqslant M$ для $\forall x\geqslant a$.

352. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(x_0, +\infty)$. Доказать, что какое бы ни было число T, найдется последовательность $x_n\to+\infty$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

Доказательство. Пусть $T>0$ — произвольное. Рассмотрим разность $f(x+T)-f(x)$. Возможны два случая:

1) существует конечное число $x'\geqslant x_0$ такое, что разность $f(x+T)-f(x)$ сохраняет постоянный знак для всех $x\geqslant x'$;

2) для произвольного $E\geqslant x_0$ существует $x^*>E$ такое, что $f(x^*+T)-f(x^*)=0$. В первом случае последовательность $\{f(x'+nT)\}$

монотонна, а поскольку она и ограничена, то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'+nT)=l$, так что

$$\lim_{n\to\infty}[f(x'+(n+1)T)-f(x'+nT)]=l-l=0,$$

причем $x_n=x'+nT\to+\infty$ при $n\to\infty$.

Во втором случае существует такая бесконечная последовательность $\{x_n\}$ значений $x\,(x>x_0)$, что $x_n\to+\infty$ при $n\to\infty$ и $f(x_n+ +T)-f(x_n)=0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

Случай, когда $T<0$, заменой $x+T=t$ приводится к уже рассмотренному случаю.

353. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные периодические функции, определенные при $-\infty<x<+\infty$, и $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$. Доказать, что $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

Доказательство. Пусть T_1 — период функции $\varphi(x)$, а T_2 — период функции $\psi(x)$. Предположим, что $\varphi(x)\not\equiv\psi(x)$, т. е. существует такая точка $x=t$, что

$$|\varphi(t)-\psi(t)|=M>0. \qquad (1)$$

Возьмем $\varepsilon>0$ произвольное, но меньшее, чем $\frac{M}{2}$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке $x=t$ для указанного ε существует $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|\varphi(t)-\varphi(t+h)|<\varepsilon, \qquad (2)$$

как только $|h|<\delta$. Согласно условию существует такое натуральное число k, что $|\varphi(t+kT_2)-\psi(t+kT_2)|<\varepsilon$, а тогда для всех натуральных m имеем

$$|\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|<\varepsilon. \qquad (3)$$

Из неравенств (2), (3) и периодичности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует неравенство

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)|&=|\varphi(t)-\varphi(t+mkT_2)+\varphi(t+mkT_2)-\\&-\psi(t+mkT_2)|\leqslant|\varphi(t)-\varphi(t+mkT_2)|+\\&+|\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|=\\&=|\varphi(t)-\varphi(t+mkT_2-nT_1)|+|\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|<\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned} \qquad (4)$$

если только

$$|mkT_2-nT_1|<\delta. \qquad (5)$$

Но мы выбрали такое число ε, что $2\varepsilon<M$. Таким образом, неравенство (4) противоречит равенству (1). Источник противоречия — в предположении существования точки $x=t$, в которой $|\varphi(t)-\psi(t)|= =M>0$. Следовательно, такой точки не существует, т. е. $\varphi(t)\equiv \equiv\psi(t)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Остается показать, что при произвольных заданных числах T_1, kT_2 и δ существуют целые числа $m>0$, n и такие, что удовлетворяют неравенству (5).

Если T_2 и T_1 — рациональные, то это очевидно.

Пусть T_2 и T_1 — иррациональные. Если обозначим $\frac{kT_2}{T_1}=l$, $\frac{\delta}{T_1}=\alpha$, то неравенство (5) запишется в виде

$$|ml-n|<\alpha. \tag{6}$$

Для доказательства последнего разобьем интервал $[0, 1)$ на $\left[\frac{1}{\alpha}\right]+$ $+1$ равных частей ($[a]$ — целая часть числа a) длиной $\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1}$, причем к каждому из частичных интервалов условимся приписывать его левый конец и не приписывать правый.

Рассмотрим множество чисел

$$0,\ l-[l],\ 2l-[2l],\ 3l-[3l],\ \ldots,\ \left(\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1\right)l-\left[\left(\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1\right)l\right], \tag{7}$$

каждое из которых принадлежит одному из построенных нами частичных интервалов. Так как частичных интервалов $\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1$, а чисел (7) имеется $\left[\frac{1}{\alpha}\right]+2$, то существует хотя бы один интервал, содержащий два числа

$$pl-[pl] \text{ и } ql-[ql]\ (p<q) \tag{8}$$

множества (7). Но так как длина интервала равна $\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1}$, то разность между числами (8) меньше этой длины, т. е.

$$|ql-[ql]-pl+[pl]|=|(q-p)l-([ql]-[pl])|<\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}=$$
$$=\alpha. \tag{9}$$

Обозначая $q-p=m\ (m>0)$, $[ql]-[pl]=n$ и подставляя вместо l и α их значения, получаем

$$\left|m\frac{kT_2}{T_1}-n\right|<\frac{\delta}{T_1}, \text{ или } |mkT_2-nT_1|<\delta.$$

354. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва первого рода.

Доказательство. Пусть x_0 — точка разрыва монотонно возрастающей ограниченной функции $f(x)$. Тогда, если $x<x_0$, существует

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0).$$

Аналогично, если $x > x_0$, то существует

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причем оба предела конечные в силу ограниченности функции, а так как $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (x_0 — точка разрыва), то имеем разрыв первого рода.

355. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и монотонна на сегменте $[a, b]$ и в качестве своих значений принимает все числа между $f(a)$ и $f(b)$, то эта функция непрерывна.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что точка $x_0 \in [a, b]$ является точкой разрыва. Этот разрыв может быть только разрывом первого рода (см. пример 354), а тогда функция $f(x)$ не может принимать значения между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, что противоречит условию. Противоречие и доказывает утверждение.

356. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдется такое число ξ, что

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

Доказательство. Пусть $m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{f(x_i)\}$, $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{f(x_i)\}$. Тогда

$$m \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leqslant M.$$

По теореме Коши (см. 3°) $\exists\, \xi \in (a, b)$ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

357. Пусть $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $l = \varliminf\limits_{x \to a} f(x)$, $L = \varlimsup\limits_{x \to a} f(x)$.

Доказать, что какое бы ни было число λ, где $l \leqslant \lambda \leqslant L$, существует такая последовательность $x_n \to a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$.

Доказательство. Если $\lambda = l$ или $\lambda = L$, то утверждение очевидно. Если же $\lambda \in (l, L)$, то, так как $\varliminf\limits_{x \to a} f(x) = l$ и $\varlimsup\limits_{x \to a} f(x) = L$ существуют последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, сходящиеся к a и такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') = l$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n'') = L$. Выберем число N настолько большим, чтобы $f(x_n') < \lambda < f(x_n'')$ для $\forall n > N$.

Для каждого $n > N$ по теореме Коши (см. 3°) между числами x_n' и x_n'' $\exists\, x_n$ такое, что $f(x_n) = \lambda$; следовательно $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$, причем $x_n \to a$, так как $x_n' \to a$ и $x_n'' \to a$ при $n \to \infty$.

§ 7. Обратная функция. Функции, заданные параметрически

1°. Существование и непрерывность обратной функции. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b) и монотонная в строгом смысле на этом интервале, то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и соответственно монотонная в строгом смысле на интервале (A, B), где $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Под однозначной непрерывной ветвью многозначной обратной функции данной непрерывной функции $y = f(x)$ понимается любая однозначная непрерывная функция $x = g(y)$, определенная в максимальной области ее существования и удовлетворяющая в этой области уравнению $f[g(y)] = y$.

2°. Непрерывность функции, заданной параметрически. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны в интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

определяет y как однозначную непрерывную функцию от x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

на интервале (a, b), где $a = \lim\limits_{t\to\alpha+0} \varphi(t)$ и $b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$.

358. Найти обратную функцию дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

В каком случае обратная функция совпадает с данной?

Решение. Если функцию представить в виде

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{b}{c} - \dfrac{ad}{c^2}}{x + \dfrac{d}{c}}, \quad c \neq 0,$$

то легко убедиться, что y — строго монотонная и непрерывная функция при $-\infty < x < -\frac{d}{c}$ и $-\frac{d}{c} < x < +\infty$. Следовательно, существует обратная функция — также монотонная и непрерывная. Пусть $-\infty < x < -\frac{d}{c}$; так как

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

и

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}-0} \frac{ax+b}{cx+d} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } -ad + c^2b > 0; \\ +\infty, & \text{если } -ad + c^2b < 0, \end{cases}$$

то обратная функция существует на интервале $\left(-\infty, \frac{a}{c}\right)$ или на интервале $\left(\frac{a}{c}, +\infty\right)$.

Если $-\frac{d}{c} < x < +\infty$, то, так как

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}+0} \frac{ax+b}{cx+d} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } -ad + c^2b > 0; \\ -\infty, & \text{если } -ad + c^2b < 0, \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c},$$

обратная функция существует на одном из интервалов $\left(\frac{a}{c}, +\infty\right)$ или $\left(-\infty, \frac{a}{c}\right)$. Следовательно, обратная функция существует, если $-\infty < y < \frac{a}{c}$ и $\frac{a}{c} < y < +\infty$. Решая уравнение $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, находим, что $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, причем, если $-d = a$, то обратная функция совпадает с данной.

359. Найти обратную функцию $x = x(y)$, если $y = x + [x]$.

Решение. Функция непрерывна и строго монотонна при $n \leqslant x < n+1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), поэтому существует обратная функция — монотонная и непрерывная на интервале $[A_n, B)$, где

$$A_n = y(n) = 2n, \quad B = \lim_{x \to n+1-0} (x + [x]) = 2n + 1.$$

Пусть $n \leqslant x < n+1$. Тогда, полагая $x = n + t$, $0 \leqslant t < 1$, получаем $y = x + [x] = n + t + n$. Отсюда находим, что $n + t = y - n$, т. е. $x = y - n$, где $2n \leqslant y < 2n + 1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

360. Показать, что существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющая уравнению Кеплера $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 \leqslant \varepsilon < 1$).

Решение. Пусть $y_1 < y_2$. Тогда

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - \varepsilon(\sin y_2 - \sin y_1) = 2\left[\frac{y_2 - y_1}{2} - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \cos \frac{y_2 + y_1}{2} \sin \frac{y_2 - y_1}{2}\right] > 0,$$

так как $-1 < \varepsilon \cos \frac{y_2 + y_1}{2} < 1$, а $\frac{y_2 - y_1}{2} - \sin \frac{y_2 - y_1}{2} > 0$, т. е. $x(y)$ строго монотонно возрастающая функция. А так как $x(y)$ непрерывная, то существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению Кеплера. Из того, что

$$\lim_{y \to -\infty} (y - \varepsilon \sin y) = -\infty, \text{ а } \lim_{y \to +\infty} (y - \varepsilon \sin y) = +\infty,$$

вытекает, что функция $y = y(x)$ определена при $-\infty < x < +\infty$.

361. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ для каждого вещественного k ($-\infty < k < +\infty$) имеет в интервале $0 < x < \pi$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

Решение. Покажем, что функция $k = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ строго монотонно убывающая на $0 < x < \pi$. При $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ это очевидно. Пусть $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и $h > 0$ такое, что $x + h < \pi$; тогда легко показать, что

$$\frac{\operatorname{ctg}(x+h)}{x+h} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} =$$

$$= -\frac{h}{(x^2 + hx)\sin x \sin(x+h)}\left[x \frac{\sin h}{h} + \cos x \sin(x+h)\right] < 0.$$

Действительно,

$$-\frac{h}{(x^2+hx)\sin x \sin(x+h)}<0,$$

а

$$\lim_{h\to+0}\left[x\frac{\sin h}{h}+\cos x\sin(x+h)\right]=x+\cos x\sin x=$$

$$=\frac{1}{2}(2x+\sin 2x)>0,$$

поэтому $\exists H>0$ такое, что при $\forall h\in(0, H)$

$$x\frac{\sin h}{h}+\cos x\sin(x+h)>0.$$

Таким образом, на интервале $-\infty<k<+\infty$ существует единственная непрерывная функция $x=x(k)$ (интервал для k определяется из равенств $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\operatorname{ctg} x}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi-0}\frac{\operatorname{ctg} x}{x}=-\infty$).

362. Может ли немонотонная функция $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально;}\\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Может, если уравнение $y=f(x)$ при каждом фиксированном $y\in(-\infty, +\infty)$ имеет единственное решение. Предложенный пример функции обладает именно этим свойством; однозначной обратной является функция

$$x=\begin{cases} y, & \text{если } y \text{ рационально;}\\ -y, & \text{если } y \text{ иррационально.}\end{cases}$$

363. В каком случае функция $y=f(x)$ и обратная функция $x=f^{-1}(y)$ определяют одну и ту же функцию?

Р е ш е н и е. Очевидно, что прямая и обратная функции совпадают, если

$$f(x)\equiv f^{-1}(x).$$

Но так как $f(f^{-1}(x))=x$, то последнее условие принимает следующий вид:

$$f(f(x))\equiv x.$$

364. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и строго монотонна на сегменте $[a, b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$ $(a\leqslant x_n\leqslant b)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $f(x)$ ограничена. Пусть, например, $y=f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$. Тогда существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$ — также ограниченная и строго возрастающая. Следовательно, существует конечный

$$\lim_{f(x_n)\to f(a)} x=\lim_{f(x_n)\to f(a)} f^{-1}(f(x_n))=a_0.$$

Очевидно, что $a_0 = a$, так как для $a_0 > a$

$$y_0 = f(a_0) > f(a),$$

а это противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Определить однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

365. $y = x^2$.

Решение. Функция $y = x^2$ непрерывна на $-\infty < x < +\infty$, строго убывает на $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на $[0, +\infty)$. Поэтому на каждом из интервалов существует однозначная обратная функция. Так как

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} x^2 = 0; \quad \lim_{x\to+0} x^2 = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$

то $x = -\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < \infty)$ и $x = +\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < \infty)$.

366. $y = \sin x$.

Решение. Так как функция непрерывна и монотонна на каждом из промежутков $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то на этих промежутках существует непрерывная однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$, а так как $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \sin x = (-1)^{k+1}$ и

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \sin x = (-1)^k$, то $f^{-1}(y)$ существует на сегменте $[-1, 1]$.

Разрешая данное уравнение, находим, что

$$x = (-1)^k \arcsin y + k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

$-1 \leqslant y \leqslant 1$.

367. Показать, что множество значений непрерывной функции $y = 1 + \sin x$, соответствующих интервалу $(0 < x < 2\pi)$, есть сегмент.

Решение. Данная функция монотонная и непрерывная на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} (\sin x + 1) = 2$; $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}-0} (\sin x + 1) = 0$,

поэтому существует непрерывная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная на сегменте $[0, 2]$.

368. Доказать равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arccos x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, с другой стороны, $\sin(\arcsin x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = 1$. Отсюда следует, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

а так как неравенство $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \frac{3\pi}{2}$ возможно только при $k = 0$, то требуемое доказано.

369. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \pi \tag{1}$$

и

$$\sin\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \sin(\operatorname{arctg} x)\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) + $$
$$+ \cos(\operatorname{arctg} x)\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + $$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x|x|}{1+x^2} + \frac{|x|}{(1+x^2)\,x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x>0; \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Таким образом, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = (-1)^k\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x + k\pi, \; (x\neq 0).$

Учитывая (1), заключаем, что $k = 0$, так что требуемое равенство доказано.

370. Доказать теорему сложения арктангенсов

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, —1.

Для каких значений y при данном значении x возможен разрыв функции ε? Построить на плоскости Oxy соответствующие области непрерывности функции ε и определить значения этой функции в полученных областях.

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy},$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{x+y}{1-xy},$$

поэтому

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \tag{1}$$

где ε — целое.

Но так как

$$|\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y| = \left|\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi\right| < \pi,$$

а $\left|\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right|<\frac{\pi}{2}$, то ε может допускать только три значения: 0, 1, —1. Вычисляя косинусы от левой и правой частей равенства (1), получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cos\varepsilon\pi,$$

так что

$$\cos\varepsilon\pi=\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{|1-xy|}=\frac{1-xy}{|1-xy|}=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{если } xy<1;\\ -1, & \text{если } xy>1.\end{cases}$$

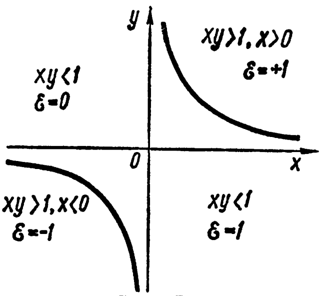

Рис. 74

Следовательно, функция $\varepsilon=\varepsilon(x, y)$ терпит разрыв, если $y=\frac{1}{x}$, где $\forall x$ — фиксированное число. Заметим, что если $xy<1$, то $\varepsilon=0$, а при $xy>1$ $\varepsilon=\pm1$ (так как ε может принимать лишь три значения 0, 1, —1).

Пусть $xy>1$ и $x>0$. Тогда $y>0$ и $\operatorname{arctg}x>0$, $\operatorname{arctg}y>0$, а $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}<0$. В равенстве (1) слева стоит непрерывная положительная функция, следовательно, и справа должна стоять положительная функция, а поэтому $\varepsilon\pi>0$, т. е. $\varepsilon=+1$.

Аналогично, если $xy>1$ и $x<0$ ($y<0$), то $\varepsilon=-1$ (рис. 74).

371. Найти функцию $y=y(x)$, заданную уравнениями $x=\operatorname{arctg}t$, $y=\operatorname{arcctg}t$ $(-\infty<t<+\infty)$. В какой области определена эта функция?

Решение. Функции $\operatorname{arctg}t$ и $\operatorname{arcctg}t$ непрерывны на всей оси и $\operatorname{arctg}t$ — строго монотонная, поэтому система определяет y как однозначную непрерывную функцию от x, причем

$$y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x)=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\frac{\pi}{2}-x,$$

где $|x|<\frac{\pi}{2}$, так как

$$\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}t=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}t=+\frac{\pi}{2}.$$

372. Пусть $x=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$ $(-\infty<t<+\infty)$.

В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать как однозначную функцию от x? Найти выражения y для различных областей.

Решение. Обе функции непрерывны при всех t, а $\operatorname{ch} t$ строго убывает при $-\infty < t \leqslant 0$ и строго возрастает при $0 \leqslant t < +\infty$, поэтому в этих областях y является однозначной функцией x. А так как $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, то $x^2 - y^2 = 1$ и $y = +\sqrt{x^2-1}$, $y = -\sqrt{x^2-1}$, причем в обоих случаях $1 \leqslant x < +\infty$, потому что $\operatorname{ch} t \to 1$ при $t \to 0$ и $\operatorname{ch} t \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$.

373. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ определяла y как однозначную функцию от x?

Доказательство. Пусть система определяет y как однозначную функцию от x, а X и Y — множества значений x и y соответственно, если $\alpha < t < \beta$.

Пусть $x_0 \in X$ — произвольное и ему соответствует единственное $y_0 \in Y$. Поэтому для всех значений t, удовлетворяющих уравнению $x_0 = \varphi(t)$, функция $\psi(t)$ принимает постоянное значение, равное y_0. Легко убедиться, что условие является и достаточным.

Пусть для произвольного фиксированного x_0 и для всех решений $t \in (\alpha, \beta)$ функция $\psi(t)$ постоянна и равна y_0. Это означает, что для каждого $x_0 \in X$ ставится в соответствие единственное $y_0 \in Y$, так что система определяет y как однозначную функцию x.

374. При каких условиях две системы уравнений

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (a < t < b) \ \text{и}\ x = \varphi(\chi(\tau)),\ y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

определяют одну и ту же функцию $y = y(x)$?

Решение. Система определяет одну и ту же функцию $y = y(x)$, если равным значениям x соответствуют равные значения y. Но равенство значений x в системах обеспечивается равенствами аргументов t и $\chi(\tau)$ и совпадением областей их изменения, так что если $t = \chi(\tau)$, причем $a < t = \chi(\tau) < b$ при $\alpha < \tau < \beta$, то система определяет одну и ту же функцию.

§ 8. Равномерная непрерывность функций

1°. Определение равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на данном множестве (интервале, сегменте и т. п.) $X = \{x\}$, если $f(x)$ определена на X и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых значений x', $x'' \in X$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

2°. Теорема Кантора. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном сегменте $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом сегменте.

375. Показать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

Решение. Функция $\frac{1}{x}$ — элементарна, поэтому она непрерывна в области определения. Покажем, что она не является равномерно непрерывной на интервале (0, 1).

Пусть $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{1}{n+2\varepsilon}$. Тогда $|x'_n - x''_n| = \frac{2\varepsilon}{n(n+2\varepsilon)} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. становится меньше любого положительного числа, однако

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - n - 2\varepsilon| = 2\varepsilon > \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

следовательно, функция не является равномерно непрерывной на (0, 1).

376. Показать, что функция $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ непрерывна и ограничена в интервале (0, 1), но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

Решение. Ограниченность очевидна, а непрерывность следует из того, что $\frac{\pi}{x}$ и $\sin y$ — непрерывные функции своих аргументов.

Пусть $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{2}{2n+1}$. Тогда $|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n(2n+1)} \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1 > \varepsilon$ для $\forall \varepsilon < 1$. Следовательно, $f(x)$ не является равномерно непрерывной.

377. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

Решение. Ограниченность и непрерывность очевидна, а равномерная непрерывность отсутствует, так как

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1 > \varepsilon \quad (\forall \varepsilon < 1)$$

для $\forall x'_n = \sqrt{n\pi}$ и $x''_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, несмотря на то, что

$$|x'_n - x''_n| = \left|\sqrt{n\pi} - \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

378. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна в этой области.

Решение. Из существования предела следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ E = E(\varepsilon)$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для $\forall x', x'' > E$.

Фиксируем такое число E. Так как $f(x)$ непрерывна в $a \leqslant x \leqslant E$, то она и равномерно непрерывна (теорема Кантора), т. е. для любого указанного выше $\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in [a, E],$$

как только $|x' - x''| < \delta$. Но так как неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ справедливо для $\forall x', x'' > E$, то оно справедливо для $\forall x', x'' \geqslant a$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta$, так что $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, \infty)$.

379. Показать, что неограниченная функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$|f(x')-f(x'')| = |x'-x''-(\sin x'-\sin x'')| \leqslant$$
$$\leqslant |x'-x''| + 2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right| \leqslant 2|x'-x''| < \varepsilon$$

для всех x' и x'', удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

380. Является ли равномерно непрерывной функция $f(x) = x^2$: а) на интервале $(-l, l)$, где l — любое, как угодно большое положительное число; б) на интервале $(-\infty, +\infty)$?

Решение. а) На интервале $(-l, l)$ функция равномерно непрерывна, так как для $\forall\varepsilon > 0$ имеем

$$|f(x')-f(x'')| = |x'^2-x''^2| = |x'+x''|\cdot|x'-x''| < 2l|x'-x''| < \varepsilon$$

при $|x'-x''| < \frac{\varepsilon}{2l} = \delta(\varepsilon)$.

б) Функция не является равномерно непрерывной, так как при $x' = n + \frac{1}{n}$ и $x'' = n$ имеем $|x'-x''| = \frac{1}{n} \to 0$, когда $n\to\infty$, а $|f(x')-f(x'')| = \left|n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2\right| = 2+\frac{1}{n^2} > 2 > \varepsilon$ для $\forall\varepsilon<2$.

Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

381. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

Решение. Функция равномерно непрерывна по теореме Кантора (см. 2°).

382. $f(x) = \ln x$ $(0 < x < 1)$.

Решение. Равномерная непрерывность отсутствует, так как если $x_n' = e^{-n}$, $x_n'' = e^{-n-1}$, то $|x_n'-x_n''| = \frac{e-1}{e^{n+1}} \to 0$ при $n\to\infty$, а $f(x_n')-f(x_n'')| = |-n+n+1| = 1 > \varepsilon$ для $\forall\,\varepsilon<1$.

383. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(0 < x < \pi)$.

Решение. Построим функцию: $F(x) = f(x)$ при $0 < x < \pi$; $F(0) = 1$; $F(\pi) = 0$. Так как функция $F(x)$ непрерывна на сегменте $[0, \pi]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом сегменте, а следовательно, и на интервале $(0, \pi)$.

384. $f(x) = e^x\cos\frac{1}{x}$ $(0 < x < 1)$.

Решение. Положим $x_n' = \frac{1}{2\pi n}$ и $x_n'' = \frac{1}{(2n+1)\pi}$; тогда

$|x_n'-x_n''|=\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\to 0$ при $n\to\infty$, а $|f(x_n')-f(x_n'')|=e^{\frac{1}{2n\pi}}+$
$+e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}>2$. Следовательно, функция не является равномерно непрерывной.

385. $f(x)=\operatorname{arctg} x\ (-\infty<x<+\infty)$.

Решение. Функция равномерно непрерывна, так как (см. пример 370)

$$|\operatorname{arctg} x'-\operatorname{arctg} x''|=\left|\operatorname{arctg}\frac{x'-x''}{1+x'x''}\right|\leqslant\left|\frac{x'-x''}{1+x'x''}\right|\leqslant|x'-x''|<\varepsilon$$

при $|x'-x''|<\delta=\varepsilon,\ x'x''>0$.

386. $f(x)=\sqrt{x}\ (1\leqslant x<+\infty)$.

Решение. Равномерная непрерывность следует из того, что $|f(x')-f(x'')|=|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqslant|x'-x''|<\varepsilon$, если $|x'-$ $-x''|<\delta=\varepsilon$.

387. $f(x)=x\sin x\ (0\leqslant x<+\infty)$.

Решение. Пусть $x_n'=n\pi$ и $x_n''=n\pi+\frac{1}{n}$; тогда $|x_n'-x_n''|=$ $=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, а

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left|\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\right|\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\left|(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right|\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\left(\pi+\frac{1}{n^2}\right)\to\pi$$

при $n\to\infty$. Следовательно, $|f(x_n')-f(x_n'')|>\pi-\varepsilon\ (0<\varepsilon<\pi)$ при $\forall n>N(\varepsilon)$ и функция не является равномерно непрерывной.

388. Показать, что функция $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на каждом интервале $I_1=(-1<x<0)$ и $I_2=(0<x<1)$ в отдельности, но не является равномерно непрерывной на их сумме I_1+ $+I_2=\{0<|x|<1\}$.

Решение. Очевидно, что $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, если $x\in I_1$, и что функция

$$F(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=0;\\ f(x), & \text{если } 0<x<1;\\ \sin 1, & \text{если } x=1\end{cases}$$

непрерывна на сегменте [0, 1]; поэтому согласно 2° (теореме Кантора) является равномерно непрерывной на этом сегменте, а следовательно, и на интервале I_1. Равномерная непрерывность на I_2 показывается аналогично.

На сумме интервалов равномерная непрерывность отсутствует, так как для любых $x'_n \to -0$ и $x''_n \to +0$ имеем $|x'_n - x''_n| \to 0$, а $f(x'_n) \to f(-0) = -1$, $f(x''_n) \to f(+0) = +1$ при $n \to \infty$. Поэтому $|f(x'_n) - f(x''_n)| > 2 - \alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ при всех $n > N(\alpha)$, т. е. $|f(x'_n) - f(x''_n)|$ не может быть меньше любого ε $(0 < \varepsilon < 2 - \alpha)$.

389. Для $\varepsilon > 0$ найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ (какое-нибудь!), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функции $f(x)$ на данном промежутке, если:

а) $f(x) = 5x - 3$ $(-\infty < x < +\infty)$; б) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ $(-2 \leqslant x \leqslant 5)$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0,1 \leqslant x \leqslant 1)$; г) $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x < +\infty)$, д) $f(x) = 2\sin x - \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$; е) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

Решение. а) $|f(x') - f(x'')| = 5|x' - x''| < \varepsilon$, если $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon)$.

б) Имеем $|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - 2x' - 1 - x''^2 + 2x'' + 1| = |(x' - x'')^2 + (x' - x'') \cdot 2(x'' - 1)| \leqslant |x' - x''|^2 + 8|x' - x''| < \varepsilon$, как только $|x' - x''| < -4 + \sqrt{16 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4 + \sqrt{16 + \varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{8} = \delta(\varepsilon)$.

в) $$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{|x' x''|} < 100 \cdot |x' - x''| < \varepsilon,$$

если $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{100} = \delta(\varepsilon)$.

г) Положим $|\sqrt{x + \Delta} - \sqrt{x}| = \varepsilon$. Тогда при $\Delta > 0$ имеем $\sqrt{x + \Delta} - \sqrt{x} = \varepsilon$, $\sqrt{x + \Delta} = \sqrt{x} + \varepsilon$, $x + \Delta = x + 2\sqrt{x}\varepsilon + \varepsilon^2$, $\Delta = 2\sqrt{x}\varepsilon + \varepsilon^2$, $\Delta_{\min} = \varepsilon^2 = \delta(\varepsilon)$. Это искомое $\delta(\varepsilon)$, так как при $|x' - x| < \delta = \varepsilon^2$ имеем $|f(x') - f(x)| = \sqrt{x + \delta} - \sqrt{x} < \varepsilon$ $\forall x \in [0, +\infty)$.

д) Имеем $|f(x') - f(x'')| = |2(\sin x' - \sin x'') - (\cos x' - \cos x'')| =$
$$= \left|4 \sin\frac{x' - x''}{2} \cos\frac{x' + x''}{2} + 2 \sin\frac{x' - x''}{2} \sin\frac{x' + x''}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 6\left|\sin\frac{x' - x''}{2}\right| \leqslant 3|x' - x''| < \varepsilon,$$ как только $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta(\varepsilon)$.

е) Пусть $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ — произвольное. На сегменте $\left[0, \frac{\varepsilon}{3}\right]$ из неравенства $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{3}$ следует, что $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

На сегменте $\left[\frac{\varepsilon}{2}, \pi\right]$ имеем

$$|f(x') - f(x'')| = \left|x' \sin\frac{1}{x'} - x'' \sin\frac{1}{x''}\right| =$$

$$= \left|x' \sin\frac{1}{x'} - x'' \sin\frac{1}{x'} + x'' \sin\frac{1}{x'} - x'' \sin\frac{1}{x''}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x' - x''| \cdot \left|\sin\frac{1}{x'}\right| + x''\left|2\sin\frac{x'-x''}{2x'x''}\cos\frac{x'+x''}{2x'x''}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x' - x''| + \frac{1}{x'}|x' - x''| < |x' - x''|\left(1 + \frac{3}{\varepsilon}\right) < \varepsilon,$$

если $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right\}.$$

390. На сколько равных между собой отрезков достаточно разбить сегмент $[1, 10]$, чтобы колебание функции $f(x) = x^2$ на каждом из этих отрезков было меньше 0,0001?

Решение. Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |(x' - x'')^2 + 2x''(x' - x'')| \leqslant$$

$$\leqslant |x' - x''|^2 + 20|x' - x''| < \varepsilon,$$

если

$$|x' - x''| < -10 + \sqrt{100+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{10 + \sqrt{100+\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{20} = \delta(\varepsilon).$$

Разобьем сегмент $[0, 10]$ точками $x_0 = 1$; x_1; x_2; ...; $x_n = 10$ на n равных частей. Тогда длины их равны:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{9}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ точки x_i' и x_i'' выберем так, чтобы

$$M_i = f(x_i') = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]}\{f(x)\}, \quad m_i = f(x_i'') = \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]}\{f(x)\},$$

то колебание ω_i функции $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon.$$

Тогда число n находим из условия $\Delta x_i = \frac{9}{n} < \frac{\varepsilon}{20} = \delta$, так что $n > 180\varepsilon^{-1}$ и при $\varepsilon^{-1} = 10\,000$ $n > 1\,800\,000$.

391. Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай двух равномерно непрерывных на (a, b) функций $f(x)$ и $g(x)$. Согласно условию для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_1(\varepsilon)$ таково, что при $|x' - x''| < \delta_1$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x', x'' \in (a, b); \tag{1}$$

$\exists\,\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x' - x''| < \delta_2$ $\forall x', x'' \in (a, b)$

$$|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Если $|x' - x''| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то будут выполняться оба неравенства (1) и (2).

Тогда равномерная непрерывность суммы следует из неравенства

$$|f(x') + g(x') - f(x'') - g(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

справедливого для $\forall x', x'' \in (a, b)$, если $|x' - x''| < \delta$.

Равномерная непрерывность произведения вытекает из того, что

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |f(x')g(x') - f(x')g(x'') +$$
$$+ f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \leqslant |f(x')| \cdot |g(x') - g(x'')| +$$
$$+ |g(x'')| \cdot |f(x') - f(x'')| < L\frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2},$$

если $|x' - x''| < \delta \; \forall x', \; x'' \in (a, b)$, где $L = \sup\limits_{a<x<b} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{a<x<b} \{g(x)\}$.

392. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то эта функция равномерно непрерывна на интервале (a, b).

Доказательство. Из условия примера следует, что существуют конечные пределы

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) \text{ и } f(b-0) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Если a и b — конечны, то, полагая $f(a) = f(a+0)$ и $f(b) = f(b-0)$, получаем непрерывную функцию $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, которая является и равномерно непрерывной (см. 2°).

Если одно из чисел a, b или оба эти числа равны $\pm\infty$, то, рассуждая так, как и при решении примера 378, мы снова убедимся в равномерной непрерывности функции $f(x)$.

393. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), то существуют пределы $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

Правильна ли эта теорема для бесконечного интервала (a, b)?

Доказательство. Если $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b), то для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', \; x'' \in (a, b), \tag{1}$$

если $|x' - x''| < \delta$. Для всех x' и x'', удовлетворяющих неравенствам $|x' - a| < \frac{\delta}{2}$ и $|x'' - a| < \frac{\delta}{2}$, имеем

$$|x' - x''| = |x' - a + a - x''| \leqslant |x' - a| + |x'' - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta; \tag{2}$$

при этом справедливо неравенство (1). Следовательно, имеет место критерий Коши для случая, когда $x \to a$, так что существует конечный предел $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Аналогично доказывается, что при $x \to b$ существует конечный предел $B = \lim\limits_{x \to b} f(x)$.

Для бесконечного интервала, как показывает пример 379, теорема не справедлива.

394. Доказать, что для того, чтобы функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на конечном интервале (a, b), можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b).

Доказательство. Необходимость следует из предыдущей задачи. Достаточность вытекает из того, что если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = B$, то, принимая их в качестве значений функции $f(x)$ в точках a и b соответственно, получим непрерывную функцию на сегменте, которая является и равномерно непрерывной на этом сегменте (теорема Кантора).

395. Модулем непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется функция $\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$, где x_1 и x_2 — любые точки из (a, b), связанные условием $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ такое, что для $\forall \delta < \delta_1$ $\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ и $|x_1 - x_2| \leqslant \delta < \delta_1$, а тогда тем более $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ и $|x_1 - x_2| < \delta_1$, т. е. $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

Достаточность. Пусть $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b), т. е. для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \forall x_1, x_2 \in (a, b)$, как только $|x_1 - x_2| < \delta$. Но тогда при тех же условиях относительно x_1 и x_2 имеем $\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$.

396. Получить оценку модуля непрерывности (см. предыдущий пример) вида $\omega_f(\delta) \leqslant c\delta^{\alpha}$, где c и α — константы, если

а) $f(x) = x^3 \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$; б) $f(x) = \sqrt{x} \ (0 \leqslant x \leqslant a)$ и $(a < x < +\infty)$;
в) $f(x) = \sin x + \cos x \ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Решение. а) $\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| = \sup |x_1^3 - x_2^3| = \sup (|x_1 - x_2| (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)) \leqslant 3 \sup |x_1 - x_2| < 3\delta$, так как $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$.

б) Пусть $0 \leqslant x \leqslant a$. Аналогично примеру 389, г) имеем $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon$ для $\forall x_1, x_2 \in [0, a]$ и $|x_1 - x_2| < \varepsilon^2 = \delta = \delta(\varepsilon)$, следовательно, $\omega_f(\delta) = \sup |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \varepsilon = \sqrt{\delta}$.

Если $a < x < +\infty$, то при $|x_1 - x_2| < \delta$ имеем $\omega_f(\delta) = \sup |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \sup \dfrac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \sup |x_1 - x_2| \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{a}}$.

в) Пусть $\forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$. Тогда

$$\omega_f(\delta) = \sup|\cos x_1 + \sin x_1 - \cos x_2 - \sin x_2| =$$

$$= \sup\left|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2} - 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\right| =$$

$$= \sup\left|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\sup\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \leqslant 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sup|x_1 - x_2| \leqslant \sqrt{2}\delta.$$

§ 9. Функциональные уравнения

397. Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

есть линейная однородная $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ — произвольная константа.

Доказательство. Функция

$$f(x) = ax \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1); остается доказать единственность, т. е. что всякая другая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), имеет вид (2).

Полагая в (1) $y = x$, получаем $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$; далее, по индукции устанавливаем, что

$$f(nx) = nf(x). \tag{3}$$

Заменяя в (3) x на $\frac{x}{n}$, имеем

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

Пусть r — произвольное положительное рациональное число, т. е. $r = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные; тогда

$$f(rx) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

Положив в (1) $y = x = 0$, получим $f(0) = 2f(0)$, так что $f(0) = 0$. Если взять $y = -x$, то из (1) следует, что $f(0) = f(x) + f(-x)$ и $f(-x) = -f(x)$. Таким образом, для рационального отрицательного числа $-r$ $(r > 0)$ имеем $f(-rx) = -f(rx) = -rf(x)$. Следовательно, для произвольных рациональных чисел r справедливо равенство

$$f(rx) = rf(x). \tag{4}$$

Пусть, наконец, α — произвольное вещественное число. Тогда существует последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$; при этом в силу непрерывности $f(x)$ из равенства $f(r_n x) = r_n f(x)$ после предельного перехода при $n \to \infty$ получаем

$$f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{5}$$

Но так как при $x=1$ из (5) находим, что $f(\alpha)=\alpha f(1)$ для $\forall \alpha \in (-\infty, +\infty)$, т. е. что $f(x)=xf(1)$ для $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, то, обозначая, $f(1)=a$, окончательно получим, что $f(x)=ax$.

398. Доказать, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), есть линейная однородная.

Доказательство. Очевидно, в условии задачи предполагается, что функция $f(x)$ определена при $-\infty < x < +\infty$. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает. Как и в примере 397, показывается, что $f(0)=0$ и что $f(x)$ однородная функция на множестве рациональных чисел, т. е. что $f(rx)=rf(x)$.

В силу монотонности для $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$

$$-\frac{1}{n} f(1) = f\left(-\frac{1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1),$$

так что

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{n} f(1).$$

Предположим, что $f(1) > 0$ (если $f(1)=0$, то $f(x)\equiv 0$ для $\forall |x| < \frac{1}{n}$, а отсюда вытекает, что $f(x)\equiv 0$ при $-\infty < x < +\infty$, т. е. функция является линейной однородной, причем $a=0$) и $\varepsilon > 0$ произвольно; тогда $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n > N$

$$|f(x)| \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1) < \varepsilon$$

для $\forall |x| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{f(1)} = \delta(\varepsilon)$; откуда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$. А тогда

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} [f(x+y) - f(x)] = 0;$$

таким образом, функция $f(x)$ непрерывна при всех значениях x, а поэтому (см. пример 397) она является линейной однородной.

399. Доказать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограниченная в сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, есть линейная однородная.

Доказательство. Из равенства (1) следует, что $f(0)=0$ и $f(rx)=rf(x)$ для рациональных r и $\forall x$.

Пусть $\{x_n\}$ такая произвольная последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, а $\{r_n\}$ последовательность рациональных чисел, стремящаяся к $+\infty$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (r_n x_n) = 0, \quad x_n \neq 0, \; r_n \neq 0.$$

Для построения последовательности $\{r_n\}$ достаточно, например, каждому натуральному n поставить в соответствие рациональное число r_n, удовлетворяющее неравенству

$\frac{1}{\sqrt{|x_n|}} < r_n < \frac{1}{\sqrt[3]{|x_n|}}$; при этом $|f(r_n x_n)| \leqslant M$ для $\forall n$. Тогда $|f(x_n)| = \left| f\left(\frac{1}{r_n} r_n x_n\right) \right| = \frac{1}{r_n} |f(r_n x_n)| \leqslant \frac{M}{r_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$. Таким образом, $f(x)$ непрерывна при $x = 0$, а тогда из соотношения $\lim\limits_{y\to 0} [f(x+y) - f(x)] = \lim\limits_{y\to 0} f(y) = 0$ следует непрерывность в любой точке, что, в свою очередь, влечет за собой (см. пример 397) линейность и однородность функции $f(x)$.

400. Доказать, что единственная, не равная нулю, тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) f(y), \tag{6}$$

ёсть показательная $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$ — положительная постоянная, $a \neq 1$.

Доказательство. Положим в уравнении $x = \frac{t}{2}$ и $y = \frac{t}{2}$; тогда $f(t) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$, так что если $f(t)$ обращается в нуль при некотором значении $t = x$, то вследствие (6) она была бы равна нулю также при $t = x + y$, где y произвольно, т. е. $f(t) \equiv 0$. Таким образом, $f(t) > 0$.

Предполагая, что $f(1) = a > 0$, положим $f(t) = a^{\varphi(t)}$, где $\varphi(t) = \log_a f(t)$, следовательно, уравнение (6) запишется в виде $a^{\varphi(x+y)} = a^{\varphi(x)} \cdot a^{\varphi(y)}$, т. е. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. А это уравнение типа (1) и (см. пример 397) $\varphi(x) = mx$ или $f(x) = a^{mx}$; но так как $f(1) = a$, то $f(x) = a^x$.

401. Доказать, что не равная нулю тождественно функция $f(x)$, ограниченная в интервале $(0, \varepsilon)$ и удовлетворяющая уравнению (6), есть показательная.

Доказательство. Как и в предыдущем примере, показывается, что $f(x) > 0$ и что если при $f(1) = a$ положить $a^{\varphi(t)} = f(t)$, то $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Далее, из ограниченности $f(t)$ в интервале $(0, \varepsilon)$ следует ограниченность $\varphi(t)$ в том же интервале $(0, \varepsilon)$, так что (см. пример 399) $\varphi(t)$ — линейная однородная, откуда, в свою очередь, следует, что $f(x) = a^x$.

402. Доказать, что единственная, не равная нулю, тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению $f(xy) = f(x) + f(y)$, есть логарифмическая $f(x) = \log_a x$, где a — положительная константа.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная при $x > 0$ функция, удовлетворяющая уравнению $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Если в последнем равенстве положить $x = e^{\xi}$, где $\xi = \ln x$, то

$f(x) = f(e^{\xi}) = \varphi(\xi)$, причем непрерывная функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) \quad (-\infty < \xi,\ \eta < +\infty).$$

Поэтому (см. пример 397) она является линейной однородной, т. е. $\varphi(\xi) = c\xi$ или $f(x) = c\ln x$. Так как $c \neq 0$ (при $c = 0$ $f(x) \equiv 0$), то $c\ln x = c\ln a \cdot \log_a x \equiv \log_a x$, если $c\ln a = 1$ или $a = e^{\frac{1}{c}}$. Так что окончательно имеем

$$f(x) = \log_a x.$$

403. Доказать, что единственная, не равная нулю тождественно, непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{7}$$

есть степенная $f(x) = x^{\alpha}$, где α — постоянная.

Доказательство. Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условию (7) при $\forall x > 0$. При той же замене переменных, что и в примере 402, получим уравнение типа (6):

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi}) \cdot f(e^{\eta}) = \varphi(\xi)\varphi(\eta).$$

Поэтому, предполагая, что $\varphi(\xi) \not\equiv 0$, получаем $\varphi(\xi) = a^{\xi}$ $(a > 0)$ или $f(x) = a^{\ln x} = x^{\alpha}$, где $\alpha = \ln a$.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

Применяя метод математической индукции, доказать следующие неравенства:

1. $n! > n^{\frac{n}{2}}$ $(n > 2)$. 2. $(2n-1)! < n^{2n-1}$ $(n > 1)$.

3. $\dfrac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \dfrac{(n+1)^p}{2} < \sum\limits_{k=1}^{n} k^p < \dfrac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$,

где n и p — натуральные числа.

4. Доказать, что для любого выпуклого n-угольника имеет место равенство $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, где D_n — число диагоналей.

5. Доказать, что для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение $n + B_n - P_n = 2$, где n — число граней, B_n — число вершин, P_n — число ребер

Доказать неравенства:

6. $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| < \sqrt{n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}$;

7. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right) > n^2$, $(x_i > 0;\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

8. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} < \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

Вычислить следующие суммы:

9. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$. 10. $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$. 11. $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$.

12. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1)\ldots(n+m)$, где m — произвольное натуральное число.

Пользуясь этой формулой, вычислить следующие суммы:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$; б) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3)$.

13. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m+1)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)}\right]$, где m — натуральное число.

Пользуясь этой формулой, вычислить следующие суммы:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

в) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

14. Решить уравнения:

а) $|x+1| + |x| + |x-1| = 6$; б) $x|x+2| - |x+1| + (x+1)|x| + 1 = 0$.

15. Показать, что если числа 0,3; 0,33; 0,333;... принадлежат множеству A нижних чисел сечения A, а числа 0,4; 0,34; 0,334;... — множеству A' верхних чисел, то сечение A/A' определяет рациональное число $\frac{1}{3}$.

Если α — иррациональное число, то символом $e(n\alpha)$ будем обозначать дробную часть числа $n\alpha$, а символом $\{e(n\alpha)\}$ — множество дробных частей чисел $n\alpha$, где $n = 1, 2, \ldots$

16. Доказать, что

а) $\inf\{e(n\alpha)\} = 0$; б) $\sup\{e(n\alpha)\} = 1$.

17. Найти:

а) $\inf\left\{e(n\sqrt{2}) - \left(e(n\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\right)^2\right\}$; б) $\sup\left\{e(n\sqrt{2}) - \left(e(n\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\right)^2\right\}$.

18. Найти:

а) $\inf\left\{\frac{e(n\sqrt{2}) - 1}{3 - e(n\sqrt{3})}\right\}$; б) $\sup\left\{\frac{e(n\sqrt{2}) - 1}{3 - e(n\sqrt{3})}\right\}$.

19. Доказать, что

а) $\inf\{e(n\sin^2 n\alpha)\} = 0$; б) $\sup\{e(n\sin^2 n\alpha)\} = 1$.

20. Доказать, что

а) $\inf\{\sin n + 2\sin(\sqrt{2}n) + 3\sin(\sqrt{3}n)\} = -6$;

б) $\sup\{\sin n + 2\sin(\sqrt{2}n) + 3\sin(\sqrt{3}n)\} = 6$.

Доказать следующие равенства:

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}=1.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)}{n(n+1)\ldots(n+m)}=\dfrac{1}{m+1}$, где m — натуральное число.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{(n+1)^p}=\dfrac{1}{p+1}$, где p — натуральное число.

Указание. Использовать неравенства примера 3.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)\ldots(k+m+1)}=\dfrac{1}{m\cdot m!}$, где m — натуральное число.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^m}=1.$

27. Пусть $x_0>0$ — произвольно, $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)(n=0,1,2,\ldots)$. Доказать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и равен $\sqrt[3]{a}$.

28. Последовательность определяется соотношениями $x_{n+1}=px_n+q$ $(n=1, 2, \ldots)$ $p\neq 0$, x_1 — произвольно. При каком условии последовательность $\{x_n\}$ сходится? Найти, в случае ее сходимости, предел.

29. Доказать неравенство $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>e.$

30. Доказать неравенства:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{mn+k}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{mn+(k-1)},$$

где $0>\alpha>-1$.

31. Доказать неравенства:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<\sum_{k=0}^{n-m}(m+k)^{2}<\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

где $0>\alpha>-1$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

32. $x_n=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+1}.$

33. $x_n = \left(1 + \frac{1}{1^2+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)$.

34. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}$ ($n = 1, 2, \dots$).

35. Пусть $a_1 > a_2 > a_3 \geqslant \dots > 0$. Доказать, что последовательности

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$
$$\sigma_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

или обе сходятся, или обе расходятся.

36. Доказать, что последовательность

$$s_n = \frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \dots + \frac{1}{n\ln^p n}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

37. Доказать, что для любой последовательности $\{a_n\}$ ($a_n > 0$; $n = 1, 2, \dots$) справедливы неравенства:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$; б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Для последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$) найти $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$:

38. $x_n = \sin n$. 39. $x_n = \cos^2 (n\sqrt{\pi})$.

40. $x_n = \sin^2 (n\sqrt{2}) + 3\cos^2 n$.

41. $x_n = \sqrt{2}\sin(n\sqrt{2}) + \sqrt{3}\sin(n\sqrt{3}) + \sqrt{5}\sin(n\sqrt{5})$.

42. $x_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) + \sin n$ (см. пример 133).

43. $x_n = \sin(n \sin n)$.

44. $x_n = \frac{\sin n}{\pi + \cos n}$.

45. $x_n = \sin[n(2 + \cos n\sqrt{2})]$.

46. $x_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) \cdot \sin n + 2\sin n$.

47. Доказать, что в последовательностях $\{x_n\}$ из примеров 38—45 любое число, заключенное между $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ является частичным пределом.

48. Доказать, что для всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ и любого $a > 0$ имеет место равенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty} ax_n = a \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

49. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+\frac{1}{k}}}{2^n - 1}.$$

Определить область допустимых действительных значений x в выражениях:

50. $y = \ln \prod\limits_{k=1}^{n} (x - k)$. 51. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)\dots(x-2n+1)}{(x-2)(x-4)\dots(x-2n)}}$.

52. $y = \ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x\right)\right]$.

Найти пределы:

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x} - \sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x} + x - \sqrt[6]{1+x}}$.

54. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2} - \sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$.

55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\alpha x - x}{\arcsin x + x}$.

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x} - \sqrt[m]{\cos\beta x}}{\sin^2 x}$,

57. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$.

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[m]{1 + \dfrac{k^3}{n^4}} - 1\right)$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[m]{1 + \dfrac{k^p}{n^{p+1}}} - 1\right)$ (p — натуральное число).

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k^p x}{n^{p+1}}$ (p — натуральное число).

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k^p}{n^{p+1}}\right)$ (p — натуральное число).

Найти $l = \varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ и $L = \varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$, если:

62. $f(x) = \sin x + \cos(x\sqrt{2})$. 63. $f(x) = a^2\sin^2 x\sqrt{2} + b^2\cos^2 x\sqrt{3}$.

64. $f(x) = \sin^2 x\sqrt{2} - (1 + \sin^2 x)^2$. 65. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \sin^2 x$.

66. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x + \sin^2 x$. 67. $f(x) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x}{2 + \sin^2 x}$.

Построить графики следующих функций:

68. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$. 69. $y = \dfrac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}$. 70. $y = \dfrac{1}{2} \times$ $\times \sqrt{x^2+x+1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1}$. 71. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. 72. $x^4 +$ $+ y^4 = 2xy$. 73. $x^4 + y^4 = 8xy^2$. 74. $(x^2+y^2)^3 = 27x^2y^2$. 75. $x^4 - y^4 + xy = 0$.

76. $\rho = 2 + \cos 4\varphi$. 77. $\varphi = (\rho - 1)^2$. 78. $\varphi = \dfrac{1}{\rho^2 + 1}$. 79. $\rho = \cos 5\varphi$. 80. $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$.

Найти интервалы выпуклости следующих функций:

81. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. 82. $f(x) = x^2$. 83. $f(x) = \sqrt{x}$. 84. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. 85. $f(x) = e^x$. 86. $f(x) = \ln x$. 87. $f(x) = x^3$. 88. $f(x) = \sin x$. 89. $f(x) = |x|$.

90. Доказать, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на $[a, b]$, то график функции $f(x)$, $x \in (a, b)$ лежит не выше хорды, соединяющей точки с абсциссами a и b.

91. Доказать, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на (a, b), то для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_p$ из (a, b) и любых чисел λ_i $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ и $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ выполняется неравенство $f\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$.

92. Доказать, что функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда при $x > x_0 \geqslant a$ наклон хорды $p(x_0, x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ есть неубывающая функция от x при каждом фиксированном x_0.

93. Показать, что для того, чтобы ограниченная на (a, b) функция $f(x)$ была выпуклой вниз, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары чисел x_0 и x_1 из (a, b) $(x_0 < x_1)$ и любого действительного числа μ функция $f(x) + \mu x$ достигала своей верхней грани на $[x_0, x_1]$ в одной из точек x_0 или x_1.

94. Показать, что если выпуклая вниз на (a, b) функция $f(x)$ не равна постоянной, то она не может достигать своей верхней грани во внутренних точках интервала (a, b).

95. Показать, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на $(-\infty, \infty)$ и не равна постоянной, то она не ограничена.

96. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a, +\infty)$. Доказать, что если существует такая точка c, что функция $f(x)$ строго возрастает на $(c, +\infty)$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

97. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на $(a, +\infty)$. Показать, что $\dfrac{f(x)}{x}$ имеет предел (конечный или равный $+\infty$), когда x стремится к $+\infty$.

98. Пусть функция $y = f(x)$ выпукла вниз и строго убывает на $[a, b]$. Показать, что обратная функция $f^{-1}(y)$ выпукла вниз на $[f(b), f(a)]$.

99. Пусть интервал $I \in (0, +\infty)$. Показать, что если функция $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ выпукла вниз на I, то на этом интервале функция $xf(x)$ также выпукла вниз, и наоборот.

100. Пусть две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$ выпуклы на $[a, b]$. Предположим, что существует такая точка $c \in [a, b]$, что в каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ обе функции $f(x)$ и $g(x)$ изменяются в одинаковом направлении. Показать, что произведение $f(x) \cdot g(x)$ выпукло на $[a, b]$.

101. Доказать неравенства:

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda_k}{x_k}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

где $x_i > 0$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

102. Пусть: 1) $0 \leqslant \lambda_{kn} \leqslant 1$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{kn} = 1$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_{kn} = 0$ при каждом фик-

сированном k; 4) $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} = l$.

Показать, что:

103. $e^{-1}(1 + x^{-1})^x = 1 - \frac{1}{2}x^{-1} + O(x^{-2}) \qquad (x \geqslant 1)$.

104. $(x + 1 + O(x^{-1}))^x = ex^x + O(x^{x-1}) \qquad (x \to \infty)$.

105. $(xe^{2x-2n})^n = O(e^{x^2+x}) \qquad (x > 0)$.

106. а) $e^{o(x)} = 1 + o(x)$, $x \to 0$; б) $o(f(x) \cdot g(x)) = o(f(x)) \cdot O(g(x))$, $x \to 0$; в) $o(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot o(g(x)) \qquad (x \to 0)$.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

107. $f(x) = \begin{cases} x - [x], & \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases}$

где $[x]$ — целая часть числа x.

108. $f(x) = [x](x - [x])$. 109. $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$. 110. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, если $x < 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, если $x > 0$ и $f(0) = 1$.

111. $f(x) = (x^2 - 1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2 - 1}$ $(x \neq \pm 1)$ и $f(\pm 1) = 0$.

112. Доказать, что выпуклая на интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна на этом интервале.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

113. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2 - 1}$. 114. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 2}$.

115. $f(x) = \arcsin(\sin x) \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{\sin x}$.

116. $f(x) = \ln \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. 117. $f(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

118. Пусть функция $f(x)$, определенная на интервале I, удовлетворяет неравенству $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ для любых x и y из I. Показать, что если $f(x)$ ограничена сверху на некотором интервале $(a, b) \subset I$, то $f(x)$ выпукла вниз на I.

119. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале I, а функция $g(x)$ выпукла вниз и возрастает на $f(I)$. Показать, что функция $g(f(x))$ выпукла вниз на I.

Исследовать на равномерную непрерывность в заданных интервалах следующие функции:

120. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad (-\infty < x < +\infty)$.

121. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, если: а) $1 \leqslant x < +\infty$, б) $0 < x < 1$.

122. $f(x) = x^\alpha$, если: а) $1 \leqslant x < +\infty$; б) $0 < x < 1$; в) $0 \leqslant x < +\infty$.

123. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, если: а) $0 \leqslant x < +\infty$; б) $-1 < x < 0$.

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная явной функции

Основные определения. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента x в точке $x_0 \in (a, b)$*. Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции в точке x_0*.

Если существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad (\Delta x \neq 0),$$

то он называется *производной* (конечной или бесконечной) функции $f(x)$ в точке x_0.

Пределы (конечные или бесконечные)

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

носят название соответственно *левой* и *правой производной* функции $f(x)$ (конечной или бесконечной) в точке x_0.

Если функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода в точке x_0, то выражения

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - 0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + 0)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* и *правой обобщенными производными* функции $f(x)$ в точке x_0.

Необходимо помнить, что во всех этих определениях приращение Δx стремится к нулю произвольно.

Приращения Δx и Δy могут быть как сколько угодно большими, так и сколько угодно малыми.

1. Определить максимальное приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$ в точке $x_0 = 1$, если x изменяется от 1 до 1000.

Решение. Очевидно,

$$\Delta x = 1000 - 1 = 999, \quad \Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

2. Определить максимальное по абсолютной величине приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \frac{1}{x^2}$ в точке $x_0 = 0{,}01$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

Решение. Имеем

$$\Delta x = 0{,}001 - 0{,}01 = -0{,}009, \quad \Delta y = \frac{1}{(0{,}001)^2} - \frac{1}{(0{,}01)^2} = 99 \cdot 10^4.$$

3. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение $\Delta y = \Delta f(x)$, если:

$$\text{а) } y = ax + b; \quad \text{б) } y = ax^2 + bx + c; \quad \text{в) } y = a^x.$$

Решение. Легко находим:

а) $\Delta y = a(x + \Delta x) + b - ax - b = a \cdot \Delta x$;

б) $\Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c = 2(ax + b) \times \times \Delta x + a(\Delta x)^2$;

в) $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

4. Найти $f'(1)$, $f'(2)$ и $f'(3)$, если $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Решение. По определению производной имеем

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x - 1)(1 + \Delta x - 2)^2 (1 + \Delta x - 3)^3}{\Delta x} = -8;$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x - 1)(2 + \Delta x - 2)^2 (2 + \Delta x - 3)^3}{\Delta x} = 0;$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x - 1)(3 + \Delta x - 2)^2 (3 + \Delta x - 3)^3}{\Delta x} = 0.$$

5. Найти $f'(1)$, если $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

Решение. По определению производной имеем

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x + \Delta x \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\Delta x} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Следующий пример на доказательство показывает, насколько важна произвольность стремления Δx к нулю в определении производной функции $f(x)$.

6. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет конечную производную и n — натуральное число, то

$$\lim_{n \to \infty} n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x). \tag{1}$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует конечный предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную?

Доказательство. По определению производной существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

равный производной $f'(x)$ при произвольном стремлении Δx к нулю. Пусть $\Delta x = \frac{1}{n}$. Тогда равенство (1) доказано.

Обратное, вообще говоря, неправильно, так как подпоследовательность

$$\bar{f}_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

последовательности

$$f_n(x) = \xi_n\left[f\left(x + \frac{1}{\xi_n}\right) - f(x)\right] \qquad (\xi_n^{-1} \to 0, \quad n \to \infty)$$

может иметь предел, в то время как последовательность его не имеет.

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Поскольку $\frac{1}{n}$ — рациональное число, то

$$n\left[\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x)\right] = 0 \tag{2}$$

при любом x и n. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x)\right] = 0$. В действительности функция $\chi(x)$ не имеет производной. В самом деле, пусть ξ_n — последовательность иррациональных чисел, которая при $n \to \infty$ стремится к $+\infty$. Пусть, далее, x — рациональное число. Тогда $x + \frac{1}{\xi_n}$ — иррациональное и по определению функции Дирихле имеем

$$\chi\left(x + \frac{1}{\xi_n}\right) - \chi(x) = -1,$$

а

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n\left[\chi\left(x + \frac{1}{\xi_n}\right) - \chi(x)\right] = -\infty. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), приходим к выводу, что обратное утверждение неправильно.

Характерные примеры производной явной функции:

7. $y = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\sqrt[3]{3 + x^3}$.

Решение. Переписывая для удобства функцию y в виде

$$y = (1 + x)(2 + x^2)^{\frac{1}{2}}(3 + x^3)^{\frac{1}{3}}$$

и применяя правила вычисления производной от произведения и сложной функции, получаем

$$y' = (1 + x)'(2 + x^2)^{\frac{1}{2}}(3 + x^3)^{\frac{1}{3}} + (1 + x)[(2 + x^2)^{\frac{1}{2}}]'(3 + x^3)^{\frac{1}{3}} +$$
$$+ (1 + x)(2 + x^2)^{\frac{1}{2}}[(3 + x^3)^{\frac{1}{3}}]' =$$
$$= (6 + 3x + 8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 3x^5)[\sqrt{2 + x^2}\sqrt[3]{(3 + x^3)^2}]^{-1},$$

при этом $x \neq \sqrt[3]{-3}$.

8. $y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

Решение. Перепишем y в виде

$$y = \sin[u(v(x))],$$

где $u = \cos^2 v$, $v(x) = \operatorname{tg}^3 x$.

Берем производную от y как от сложной функции. Имеем

$$y' = \cos u(v(x)) \cdot u'_v \cdot v'_x;$$

так как

$$u'_v = -\sin 2v, \quad v'_x = \frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x},$$

то $y' = -3\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \cdot \sin(2\operatorname{tg}^3 x) \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x$.

9. $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$.

Решение. Применяя правило вычисления производной сложной функции, получаем

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\left(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}\,\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[4]{1 + x^4}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \sqrt[4]{1 + x^4}\right)' =$$

$$= \frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$$

10. $y = \ln^2(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})$.

Решение. Поступая аналогично проделанному в предыдущем примере, находим

$$y' = \frac{2}{3}\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}) \cdot \frac{1}{\sec 2^{\sqrt[3]{x}}}\,\frac{\sin 2^{\sqrt[3]{x}}}{\cos^2 2^{\sqrt[3]{x}}}\,2^{\sqrt[3]{x}}\,x^{-\frac{2}{3}}\ln 2 =$$

$$= \frac{\ln 2}{3}\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})\operatorname{tg} 2^{\sqrt[3]{x}}\,\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

11. $y = x + x^x + x^{x^x} \qquad (x > 0)$.

Решение. Перепишем y в виде

$$y = x + e^{x\ln x} + e^{x^x \ln x} = x + e^{x\ln x} + e^{e^{x\ln x}\ln x}.$$

Тогда

$$y' = 1 + e^{x\ln x}(\ln x + 1) + e^{e^{x\ln x}\ln x}\left[\frac{e^{x\ln x}}{x} + e^{x\ln x}(1 + \ln x)\ln x\right] =$$

$$= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^{x^x}[x^{x-1} + x^x(1 + \ln x)\ln x].$$

12. $y = \left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

Решение. Применяя тот же прием, что и в предыдущем примере, имеем

$$y = e^{\operatorname{arctg}^2 x\cdot\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}},$$

$$y' = y\left[\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} + \right.$$

$$+ \operatorname{arctg}^2 x\,\frac{\arccos(\cos^2 x)}{\arcsin(\sin^2 x)}\,\frac{\sin 2x\cdot\arccos(\cos^2 x)}{\sqrt{1-\sin^4 x}\arccos^2(\cos^2 x)} -$$

$$\left. - \operatorname{arctg}^2 x\,\frac{\arccos(\cos^2 x)}{\arcsin(\sin^2 x)}\,\frac{\arcsin(\sin^2 x)\cdot\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}\arccos^2(\cos^2 x)}\right] =$$

$$= 2y\left\{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}^2 x\left[\frac{\sin x\cdot\operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin x)\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}} - \frac{\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

13. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$; в) $y = \ln|x|$.

Решение. а) $|x| = x\operatorname{sgn} x$. Поэтому $y' = \operatorname{sgn} x$ $(x \neq 0)$;
б) $y = x^2\operatorname{sgn} x$, $y' = 2x\operatorname{sgn} x = 2|x|$;
в) $y = \ln|x| = \ln(x\operatorname{sgn} x)$, $y' = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{|x|} = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Графики для трех случаев изображены на рис. 75, *а*, *б*, *в*.

14. Найти производные следующих функций:

а) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; в) $y = \arccos\dfrac{1}{|x|}$;

б) $y = |\sin^3 x|$; г) $y = [x]\sin^2\pi x$.

Решение. а) Функции $(x-1)^2$ и $(x+1)^3$ имеют производные при всех x. Функция $\operatorname{sgn}(x+1)$ имеет производную при $x \neq -1$. Переписывая функцию y в виде

$$y = (x-1)^2(x+1)^3\operatorname{sgn}(x+1)$$

и применяя правило вычисления производной от произведения, получим

$$y' = (x^2-1)\,|x+1|\,(5x-1), \qquad x \neq -1.$$

В точке $x = -1$ рассмотрим отдельно левую и правую производные. По определению имеем

$$f'_-(-1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|(-2+\Delta x)^2(-1+\Delta x+1)^3|}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|(-2+\Delta x)^2(-1+\Delta x+1)^3|}{\Delta x} = 0.$$

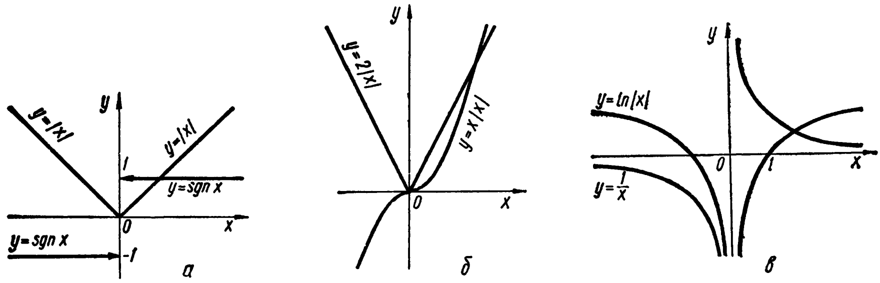

Рис. 75

Итак, $f'_-(-1) = f'_+(-1) = y'(-1) = 0$. Поэтому окончательно получим

$$y' = (x^2-1)(5x-1)\,|x+1|$$

при всех x.

Аналогично имеем:

б) $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) = \frac{3}{2}\sin 2x \cdot |\sin x|$;

в) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\dfrac{\operatorname{sgn} x}{|x|^2}\right) = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$(x \neq 0)$;

г) $y' = 2\pi[x]\sin \pi x \cdot \cos \pi x = \pi[x]\sin 2\pi x$, где $x \neq k$, k — целое число.

Рассмотрим $y'_-(k)$ и $y'_+(k)$. Имеем

$$y'_\pm(k) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{[k+\Delta x]\sin^2 \pi(k+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{[k+\Delta x]\,\pi^2 \Delta x^2}{\Delta x} = 0.$$

Но так как $y'(k) = \pi[k]\sin 2\pi k = 0$, то окончательно получим

$$y' = \pi[x]\sin 2\pi x$$

при всех x.

15. $y = \begin{cases} 1-x & \text{при} \quad -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{при} \quad 2 < x < +\infty. \end{cases}$

Решение. Функции $1-x$, $(1-x)(2-x)$, $-2+x$ имеют производные в соответствующих областях; поэтому

$$y'=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad -\infty<x<1;\\ 2x-3 & \text{при} \quad 1<x<2;\\ 1 & \text{при} \quad 2<x<+\infty.\end{cases}$$

Найдем теперь левую и правую производные в точках $x=1$ и $x=2$. По определению имеем

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1-1-\Delta x}{\Delta x}=-1;$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(1-1-\Delta x)(2-1-\Delta x)}{\Delta x}=-1;$$

$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{(1-2-\Delta x)(2-2-\Delta x)}{\Delta x}=1;$$

$$f'_+(2)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{-(2-2-\Delta x)}{\Delta x}=1.$$

Таким образом, $f'_-(1)=f'_+(1)=f'(1)$ и $f'_-(2)=f'_+(2)=f'(2)$.

Производную можно записать в таком виде

$$y'=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad -\infty<x<1;\\ 2x-3 & \text{при} \quad 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 1 & \text{при} \quad 2<x<+\infty.\end{cases}$$

16. $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2 & \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b;\\ 0 & \text{вне отрезка } [a,\ b].\end{cases}$

Решение. Как и в предыдущем примере, имеем

$$y'=\begin{cases}2(x-a)(x-b)^2+2(x-b)(x-a)^2=2(x-a)(x-b)\times\\ \qquad\qquad\times(2x-b-a) & \text{при} \quad a<x<b;\\ 0 & \text{вне отрезка } [a,\ b].\end{cases}$$

В точках $x=a$ и $x=b$ найдем левую и правую производные:

$$y'_-(a)=0;\quad y'_+(a)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(a+\Delta x-a)^2(a+\Delta x-b)^2}{\Delta x}=0;$$

аналогично находим $y'_-(b)=y'_+(b)=0$. Поэтому производная окончательно запишется в виде

$$y'=\begin{cases}2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b;\\ 0 & \text{вне отрезка } [a,\ b].\end{cases}$$

17. $y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x & \text{при} \quad |x|\leqslant 1;\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{4} & \text{при} \quad |x|>1.\end{cases}$

Решение. Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{4}$ имеют производные в областях $|x|<1$ и $|x|>1$ соответственно. Поэтому

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{при} \quad |x|<1; \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad |x|>1. \end{cases}$$

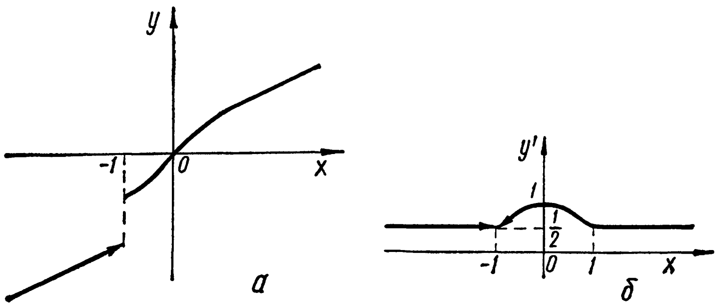

Рис. 76

Для вычисления производной в точках $x=\pm 1$ рассмотрим отдельно левую и правую производные. Имеем

$$y'_+(-1) = \lim_{\Delta x\to+0} \frac{\operatorname{arctg}(-1+\Delta x)+\frac{\pi}{4}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to+0} \frac{1}{\Delta x} \operatorname{arctg}\frac{-1+\Delta x+1}{1-(-1+\Delta x)} = \frac{1}{2};$$

$$y'_-(-1) = \lim_{\Delta x\to-0} \frac{\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(-1+\Delta x)+\frac{1}{2}(-1+\Delta x-1)+\frac{\pi}{4}}{\Delta x} = +\infty;$$

$$y'_+(1) = \lim_{\Delta x\to+0} \frac{\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(1+\Delta x)+\frac{1}{2}(1+\Delta x-1)-\frac{\pi}{4}}{\Delta x} = \frac{1}{2};$$

$$y'_-(1) = \lim_{\Delta x\to-0} \frac{\operatorname{arctg}(1+\Delta x)-\frac{\pi}{4}}{\Delta x} = \frac{1}{2}.$$

Окончательный ответ:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{при} \quad -1<x\leqslant 1; \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad |x|>1; \\ \text{не существует} & \text{при} \quad x=-1. \end{cases}$$

Графики y и y' изображены на рис. 76, *а*, *б*.

18. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{при} \quad |x| \leqslant 1; \\ \frac{1}{e} & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$

Решение. Функции $x^2e^{-x^2}$ и $\frac{1}{e}$ имеют производные в областях $|x| < 1$ и $|x| > 1$ соответственно. Поэтому

$$y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1 - x^2) & \text{при} \quad |x| < 1; \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Найдем односторонние производные в точке $x = -1$. Имеем

$$y'_-(-1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{\Delta x} = 0;$$

$$y'_+(-1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(-1 + \Delta x)^2 e^{-(-1+\Delta x)^2} - e^{-1}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2)(1 + 2\Delta x - (\Delta x)^2 + o(\Delta x)) - 1}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично находим $y'_-(+1) = y'_+(+1) = 0$.

С учетом проведенных исследований получим

$$y' = \begin{cases} 2x(1 - x^2)e^{-x^2} & \text{при} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

19. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — имеющие производную функции от x. Найти производную от функции y, если:

$$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) \quad (\varphi(x) > 0; \ \psi(x) > 0).$$

Решение. Представим y в виде

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)} \qquad (\varphi \neq 1).$$

Тогда, взяв производную от дроби, получим

$$y' = \frac{\psi'\psi^{-1} \ln \varphi - \varphi'\varphi^{-1} \ln \psi}{\ln^2 \varphi} = \frac{\varphi\psi' \ln \varphi - \varphi'\psi \ln \psi}{\varphi\psi \ln^2 \varphi}.$$

20 Найти y', если:

а) $y = f(x^2)$; б) $y = f\{f[f(x)]\}$.

Решение. По правилу вычисления производной сложной функции имеем:

а) $y' = f'(x^2) \cdot 2x$; б) $y' = f'\{f[f(x)]\} \cdot f'[f(x)] \cdot f'(x)$,

где штрих у функции f означает взятие производной по своему аргументу.

21. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2) \ldots (x-1000)$.

Решение. По определению производной в точке $x = 0$ имеем

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2) \ldots (\Delta x - 1000)}{\Delta x} = 1000!$$

22. Доказать следующее правило вычисления производной от определителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пользуясь определением производной, а также свойствами определителя, находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\begin{vmatrix} f_{11}(x+\Delta x) & f_{12}(x+\Delta x) & \dots & f_{1n}(x+\Delta x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x+\Delta x) & f_{k2}(x+\Delta x) & \dots & f_{kn}(x+\Delta x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x+\Delta x) & f_{n2}(x+\Delta x) & \dots & f_{nn}(x+\Delta x) \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k-1\,1}(x) & f_{k-1\,2}(x) & \dots & f_{k-1\,n}(x) \\ f_{k1}(x+\Delta x) - f_{k1}(x) & f_{k2}(x+\Delta x) - f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x+\Delta x) - f_{kn}(x) \\ f_{k+1\,1}(x+\Delta x) & f_{k+1\,2}(x+\Delta x) & \dots & f_{k+1\,n}(x+\Delta x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x+\Delta x) & f_{n2}(x+\Delta x) & \dots & f_{nn}(x+\Delta x) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Примеры на нахождение производной функции в точке и ее окрестности.

23. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

Решение. По правилу вычисления производной функции имеем при $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

В точке $x = 0$ по определению производной получим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом, можно записать:

$$f'(x) = \varphi(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Исследуем теперь на непрерывность функцию $\varphi(x)$. При $x \neq 0$ функция $\varphi(x)$ элементарна и, следовательно, непрерывна во всей области своего определения. Поэтому остается отдельно ее исследовать на непрерывность лишь в точке $x = 0$. Из определения непрерывности в точке следует, что должно быть

$$\varphi(-0) = \varphi(+0) = \varphi(0),$$

где

$$\varphi(\pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \left(2\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} - \cos\frac{1}{\Delta x}\right).$$

Но так как односторонние пределы $\varphi(\pm 0)$ не существуют, то функция $\varphi(x)$ разрывна в точке $x = 0$.

24. При каком условии функция $f(x) = x^n \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = 0$

а) непрерывна при $x = 0$; б) имеет конечную производную при $x = 0$; в) имеет непрерывную производную при $x = 0$?

Решение. а) Из определения непрерывности функции следует, что должны существовать односторонние пределы $f(-0)$ и $f(+0)$ и должно соблюдаться равенство трех чисел:

$$f(-0) = f(+0) = f(0).$$

Имеем

$$f(\pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} (\Delta x)^n \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Очевидно, данный предел существует и равен нулю лишь при $n > 0$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в нуле при $n > 0$.

б) Для существования конечной производной функции $f(x)$ в точке $x = 0$ должно быть $f'_-(0) = f'_+(0)$. По определению односторонних производных запишем

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{(\Delta x)^n \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Последний предел, очевидно, существует лишь при $n > 1$ и равен нулю.

Итак, функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке $x = 0$ при $n > 1$.

в) Найдем производную $f(x)$ при $x \neq 0$:

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}.$$

Для непрерывности функции $\varphi(x) = f'(x)$ в точке $x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(-0) = \varphi(+0) = \varphi(0).$$

Очевидно, что при $x \to \pm 0$ числа $\varphi(\pm 0)$ существуют только при $n - 2 > 0$ и равны нулю. С другой стороны, $\varphi(0)$ при $n > 2$ равняется нулю. Поэтому функция $\varphi(x)$ непрерывна в нуле при $n > 2$, т. е. функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в этой же точке.

25. При каком условии функция

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \quad \text{и} \quad f(0) = 0 \quad (m > 0)$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

Решение: а) Найдем производную в окрестности начала координат

$$f'(x) = n|x|^{n-1} \operatorname{sgn} x \cdot \sin \frac{1}{|x|^m} - m|x|^{n-m-1} \operatorname{sgn} x \cdot \cos \frac{1}{|x|^m} \; (x \neq 0).$$

Очевидно, что $|f'(x)| < \infty$, если $n - m - 1 \geqslant 0$, откуда $n \geqslant 1 + m$.

б) Производная $f'(x)$ будет неограниченной, если $n - 1 < 0$ или $n - m - 1 < 0$, откуда $n < 1$ или $n < 1 + m$, т. е. достаточно, чтобы выполнялось неравенство $n < 1 + m$. С другой стороны, для существования производной $f'(0)$ необходимо иметь $n > 1$. Таким образом, имеем окончательно условие для n:

$$1 < n < 1 + m.$$

26. Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

Решение. Исходя из определения производной, получим

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x - a)\varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(a + \Delta x).$$

Последний предел существует в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ и равен $\varphi(a)$. Итак, $f'(a) = \varphi(a)$.

27. Показать, что функция $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$, не имеет производной в точке a.

Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

Решение. Вычислим $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$:

$$f'_\pm(a) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}[|a + \Delta x - a|\varphi(a + \Delta x)] = \pm\varphi(a).$$

Но так как $\varphi(a)\neq 0$, то функция $f(x)$ не имеет производной в точке a (поскольку односторонние производные в этой точке не равны между собой).

28. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Решение. Возьмем функцию

$$f(x)=|x-a_1|\,|x-a_2|\,\ldots\,|x-a_n|.$$

Непрерывность ее очевидна. Однако она не имеет производной в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Действительно,

$$f'_{\pm}(a_i)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{|a_i+\Delta x-a_1|\,|a_i+\Delta x-a_2|\,\ldots\,|a_i+\Delta x-a_i|\,\ldots}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}|a_i-a_1|\,|a_i-a_2|\,\ldots\,|a_i-a_{i-1}|\,|a_i-a_{i+1}|\,\ldots$$

$$\ldots\,|a_i-a_n|=\pm\prod_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}|a_i-a_k|.$$

Итак, $f'_-(a_i)\neq f'_+(a_i)$, что и требовалось доказать.

29. Показать, что функция $f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$ и $f(0)=0$ имеет точки несуществования производной в любой окрестности точки $x=0$, но имеет конечную производную в этой точке. Построить эскиз графика этой функции.

Доказательство. Функция x^2 имеет производную всюду. Функция $\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ имеет производную всюду, за исключением точек $x=0$ и $x=x_k=\frac{2}{2k+1}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Поэтому производную функции $f(x)$ при $x\neq 0$ и $x\neq x_k$ можно найти как производную от произведения $x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$. В точках же $x=0$ и $x=x_k$ производную $f'(x)$ вычисляем, используя ее определение. Имеем

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|}{\Delta x}=0,$$

т. е. $f(x)$ имеет производную в точке $x=0$. Далее,

$$f'_{\pm}\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\left(\frac{2}{2k+1}+\Delta x\right)^2\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}\right|}{\Delta x}=$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left|\cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}+\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right]\right|=$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left|\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right|=\pm\pi.$$

Таким образом, так как для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число k, что

$$\left| \frac{2}{2k+1} \right| < \varepsilon,$$

то точки несуществования производной функции $f(x)$ попадут в любую ε-окрестность начала координат.

Эскиз графика функции изображен на рис. 77.

30. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

имеет производную лишь при $x = 0$.

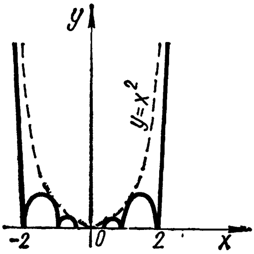

Рис. 77

Решение. Покажем сначала, что она имеет производную в точке $x = 0$.

Из определения производной следует (если она существует), что

$$f'(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n},$$

где ξ_n — произвольная числовая последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Оценим сначала модуль отношения

$$\left| \frac{f(\xi_n)}{\xi_n} \right| \leqslant \left| \frac{\xi_n^2}{\xi_n} \right| = |\xi_n|.$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} |\xi_n| = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\xi_n)}{\xi_n} = 0.$$

Следовательно,

$$f'(0) = 0.$$

Покажем теперь, что функция $f(x)$ не имеет производной ни в одной точке $x \neq 0$.

Пусть $x = r$ — рациональная точка и $\xi_n^{(1)}$, $\xi_n^{(2)}$ — последовательности соответственно рациональных и иррациональных чисел, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим пределы α_1 и α_2:

$$\alpha_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(r + \xi_n^{(1)}) - r^2}{\xi_n^{(1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(r + \xi_n^{(1)})^2 - r^2}{\xi_n^{(1)}} = 2r,$$

$$\alpha_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(r + \xi_n^{(2)}) - r^2}{\xi_n^{(2)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{-r^2}{\xi_n^{(2)}} \neq 2r$$ (производная не существует).

Пусть $x = s$ — иррациональная точка. Рассмотрим пределы β_1 и β_2:

$$\beta_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(s + \xi_n^{(1)})}{\xi_n^{(1)}} = 0, \quad \beta_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{f(s + \xi_n^{(2)})}{\xi_n^{(2)}}.$$

Выберем последовательность рациональных чисел η_n, стремящуюся к $s: \eta_n \to s$; тогда, выбирая в качестве $\xi_n^{(2)}$ последовательность $\eta_n - s$, получим

$$\beta_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\eta_n)}{\xi_n^{(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n^{(2)}}{\xi_n^{(2)}} \neq \beta_1 \text{ (производная не существует).}$$

Таким образом,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \text{не существует при } x \neq 0. \end{cases}$$

31. Исследовать, имеют ли конечную производную следующие функции

а) $|\pi^2 - x^2| \sin^2 x$; б) $y = \arcsin(\cos x)$;

в) $y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ |x| - 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

Решение. По правилу вычисления производной от произведения имеем

$$y' = -2x \operatorname{sgn}(\pi^2 - x^2) \cdot \sin^2 x + |\pi^2 - x^2| \sin 2x \qquad (|x| \neq \pi).$$

Существование производной функции y в точках $x = \pm\pi$ исследуем отдельно. По определению имеем

$$y'_\pm(-\pi) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} [|\pi^2 - (-\pi + \Delta x)^2| \sin^2(-\pi + \Delta x)] = 0;$$

$$y'_\pm(\pi) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} [|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x)] = 0.$$

Итак,

$$y' = |\pi^2 - x^2| \sin 2x - 2x \sin^2 x \cdot \operatorname{sgn}(\pi^2 - x^2)$$

при всех x.

б) Решаем по той же схеме, что и (а):

$$y' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|} = -\operatorname{sgn}(\sin x) \qquad (x \neq k\pi).$$

В точках $x = k\pi$ имеем

$$y'_\pm(k\pi) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \{\arcsin[\cos(k\pi + \Delta x)] - \arcsin(\cos k\pi)\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x} \{\arcsin[(-1)^k \cos \Delta x] - \arcsin[(-1)^k]\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} (-1)^{k+1} \frac{\arcsin|\sin \Delta x|}{\Delta x} = (-1)^{k+1} \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\arcsin|\sin \Delta x|}{|\sin \Delta x|} \times$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = (-1)^{k+1} \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = \pm(-1)^{k+1}.$$

Следовательно, в точках $x = k\pi$ функция не имеет производной.

в) Очевидно, что функция имеет конечную производную всюду при $|x|<1$ и $|x|>1$. Исследуем существование производной в двух точках: $x=1$ и $x=-1$. Имеем

$$y'_+(1)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|1+\Delta x|-1}{\Delta x}=1,$$

$$y'_-(1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\frac{1}{4}(1+\Delta x-1)(1+\Delta x+1)^2}{\Delta x}=1;$$

а также

$$y'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\frac{1}{4}(-1+\Delta x-1)(-1+\Delta x+1)^2}{\Delta x}=0,$$

$$y'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{\Delta x}[|-1+\Delta x|-1]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{\Delta x}(1-\Delta x-1)=-1.$$

Следовательно, в точке $x=1$ функция имеет производную, а в точке $x=-1$ — нет.

Для функции $f(x)$ найти левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если:

32. $f(x)=[x]\sin\pi x$.

Решение. Функция $\sin\pi x$ имеет конечную производную всюду. Функция $[x]$ не имеет производной в точках $x=k$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Поэтому, если $x\neq k$, то $f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$. В точках $x=k$ по определению производной имеем

$$f'_\pm(k)=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)-[k]\sin\pi k}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{[k+\Delta x](-1)^k\sin\pi\Delta x}{\Delta x}=\begin{cases}(-1)^k\pi k,\\(-1)^k\pi(k-1).\end{cases}$$

33. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq0)$ $f(0)=0$.

Решение. Производная функции $f(x)$, очевидно, может не существовать в тех точках, где $\cos\frac{\pi}{x}=0$, а также при $x=0$. При $x\neq0$ и $x\neq\frac{2}{2k+1}$ находим

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{x}=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right).$$

Вычислим $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)$ и $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)$. Имеем

$$f'_\pm\left(\frac{1}{2k+1}\right)=\lim_{\Delta x\to\pm0}\frac{\left(\frac{2}{2k+1}+\Delta x\right)\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}\right|}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\left|\cos\left[\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x} - \frac{\pi(2k+1)}{2}\right) + \frac{\pi(2k+1)}{2}\right]\right| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\left|\sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x} - \frac{\pi(2k+1)}{2}\right]\right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\frac{1}{\Delta x}\left|\sin\frac{\pi(2k+1)^2\Delta x}{2[2+(2k+1)\Delta x]}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left|\sin\frac{\pi(2k+1)^2\Delta x}{2[2+(2k+1)\Delta x]}\right| =$$

$$= \frac{2}{2k+1}\frac{\pi}{4}(2k+1)^2(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}(2k+1).$$

В точке $x = 0$ получим

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta x\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right| \quad \text{(не существуют).}$$

34. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

Решение. При $x^2 \neq k\pi \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

Поскольку функция $f(x)$ определена при $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, то можно рассматривать только левую производную в точках $x = \sqrt{(2k+1)\pi}$ и только правую производную в точках $x = \sqrt{2\pi k}$ (в точке $x = 0$ существует и левая и правая производные). Имеем

$$f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(\sqrt{(2k+1)\pi} + \Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{-\sin(2\sqrt{(2k+1)\pi}\,\Delta x + (\Delta x)^2)} = -\infty;$$

$$f'_+(\sqrt{2k\pi}) = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(2\sqrt{2k\pi}\,\Delta x + (\Delta x)^2)} = +\infty.$$

В точке $x = 0$ получим

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \to \pm 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1.$$

35. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \ (x \neq 0),\ f(0) = 0.$

Решение. При $x \neq 0$ имеем

$$f'_-(x) = f'_+(x) = (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-1} + e^{\frac{1}{x}}x^{-1}\,(1 + e^{\frac{1}{x}})^{-2}.$$

Вычисляем $f'_{\pm}(0)$:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} - f(0)\right] = \lim_{\Delta x \to +0} (1+e^{\frac{1}{\Delta x}})^{-1} = 0;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} - f(0)\right] = \lim_{\Delta x \to -0} (1+e^{\frac{1}{\Delta x}})^{-1} = 1.$$

36. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$.

Решение. Функция $f(u) = \sqrt{u}$ имеет конечную производную при $u > 0$. Функция $u = 1 - e^{-x^2}$ имеет производную при всех x. Поэтому, если $x \neq 0$, то функция $\sqrt{1-e^{-x^2}}$ имеет производную и ее можно найти как производную от сложной функции. Итак, при $x \neq 0$ имеем

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

В точке $x = 0$ находим $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \pm \lim_{\Delta x \to \pm 0}\sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \pm 1.$$

37. $f(x) = |\ln|x||$ $(x \neq 0)$.

Решение. Пользуясь правилом вычисления производной от сложной функции, получим

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(\ln|x|) \cdot \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}\operatorname{sgn}(\ln|x|) \quad (|x| \neq 1).$$

В точках $x = 1$ и $x = -1$ находим

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}|\ln|1+\Delta x|| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left|\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\right| =$$
$$= \pm 1;$$

$$f'_{\pm}(-1) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{1}{\Delta x}|\ln|1+\Delta x|| = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\ln(1-\Delta x)|}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to \pm 0}\left|\frac{\ln(1-\Delta x)}{-\Delta x}\right| = \pm 1.$$

38. Показать, что функция $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

Решение. Докажем непрерывность функции $f(x)$. Для этого найдем $f(+0)$ и $f(-0)$: $f(\pm 0) = \lim\limits_{\Delta x \to \pm 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$; по условию

$f(0)=0$, поэтому равенство $f(+0)=f(-0)=f(0)$ доказывает непрерывность функции $f(x)$ при $x=0$.

Покажем, что в точке $x=0$ не существует ни левой $f'_-(0)$, ни правой $f'_+(0)$ производной. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\sin\frac{1}{\Delta x}\quad\text{(не существует).}$$

39. Найти обобщенные производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Решение. а) $x_0=0$ — точка разрыва первого рода. Найдем сначала $f(\pm 0)$. Имеем

$$f(\pm 0)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\pm 1.$$

По определению обобщенной производной получим

$$f'_\pm(0)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}\mp\Delta x}{(\Delta x)^2}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}-|\Delta x|}{(\Delta x)^2}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{|\Delta x|}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|}=\pm\frac{1}{2}.$$

б) $x=1$ — точка разрыва функции. Находим $f(1\pm 0)$:

$$f(1\pm 0)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\operatorname{arctg}\frac{1+1+\Delta x}{1-1-\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\operatorname{arctg}\frac{2}{-\Delta x}=\mp\frac{\pi}{2}.$$

По определению обобщенной производной получим

$$f'_\pm(1)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\operatorname{arctg}\frac{2+\Delta x}{-\Delta x}\pm\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{-\Delta x}\pm\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{-\Delta}\pm\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{2}=\frac{1}{2}.$$

в) Аналогично первым двум случаям имеем

$$f(+0)=0;\quad f(-0)=1;$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0;$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}-1\right]=0.$$

Здесь мы воспользовались пределом

$$\lim_{y\to\pm\infty}ye^{-|y|}=0.$$

40. Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

Решение. а) По определению производной имеем

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right].$$

Этот предел не существует, так как по условию $g(x)$ не имеет производной в точке x_0, т. е. не существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

б) Вообще говоря, нет, так как если $\psi(x)$ — функция, не имеющая производной, а функция $\varphi(x)$ имеет производную, то за $f(x)$ можно принять $\psi(x)$, а за $g(x) = \varphi - \psi$; тогда функция $F(x) = \psi(x) + [\varphi(x) - \psi(x)] \equiv \varphi(x)$ имеет производную.

41. Можно ли утверждать, что произведение $F(x) = f(x) g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

Решение. а) Вообще говоря, нет. По определению производной имеем

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [f(x_0 + \Delta x) g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) g(x_0)] =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right].$$

Отсюда, в частности, следует, что если функция $g(x)$ определена в области $0 \leqslant |x - x_0| < \delta$, $f(x_0) = 0$, $\left| \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right| \leqslant M$, то $F'(x_0)$ существует. Например, $f(x) = x$; $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$; тогда $F'(0) = 0$.

б) По определению производная функции $F(x)$ в точке x_0 равна

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [f(x_0 + \Delta x) g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) g(x_0)] =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x_0) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0 + \Delta x) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right].$$

Она может существовать, например, тогда, когда обе функции непрерывны и $g(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$, $|g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)| \leqslant M |\Delta x|$.

Например, $g(x) = |x|$; $f(x) = |x|$.

42. Что можно сказать о производной функции $F(x) = f(g(x))$ в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $g(x_0)$, а $g(x)$

имеет производную в точке x_0; в) $f(x)$ не имеет производной в точке $g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке x_0?

Решение. а) По определению производной имеем

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} = 0$, а $|g(x_0+\Delta x) - g(x_0)| \leqslant M|\Delta x|$ то $F'(x_0)$ существует и равна нулю.

Например, $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

$$F'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^2}{\Delta x} = 0.$$

б) Аналогичен предыдущему, если потребовать, чтобы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Например, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

в) Предположим, что

$$\operatorname{sgn}\left[\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(g(x_0+\Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}\right] = \operatorname{sgn}\left[\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right].$$

Тогда $F'(x_0)$ существует, хотя $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$ не существуют.

Например, $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$, $x_0 = 0$.

Имеем

$$F'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\left[2\left(\frac{2}{3}\Delta x - \frac{1}{3}|\Delta x|\right) + \left|\frac{2}{3}\Delta x - \frac{1}{3}|\Delta x|\right|\right] = 1;$$

$$F'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left[2\left(\frac{2}{3}\Delta x - \frac{1}{3}|\Delta x|\right) + \left|\frac{2}{3}\Delta x - \frac{1}{3}|\Delta x|\right|\right] = 1.$$

43. Может ли функция $f(x)$ в точке ее разрыва иметь конечную производную, бесконечную производную?

Решение. Пусть x_0 — точка разрыва первого рода, такая, что $f(x_0)$ существует. Тогда

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x} \times$$

$$\times \lim_{\Delta x \to -0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = [f(x_0 - 0) - f(x_0)] \cdot \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x} = \infty$$

$$(f(x_0 - 0) - f(x_0) \neq 0).$$

Аналогично

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = [f(x_0+0) - f(x_0)] \cdot \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} = \infty,$$

если $f(x_0+0) - f(x_0) \neq 0$. Как видим, конечной производной не существует.

В том случае, когда $\operatorname{sgn}[f(x_0+0)-f(x_0)] = -\operatorname{sgn}[f(x_0-0)-f(x_0)]$, $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=\infty$, т. е. можно говорить о существовании бесконечной производной в точке x_0.

Например, $f(x)=\operatorname{sgn} x$. Имеем

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\operatorname{sgn}(\Delta x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}=+\infty;$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\operatorname{sgn}(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\Delta x}=+\infty.$$

44. Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то обязательно ли:

1) $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$; 2) $\varlimsup\limits_{x\to a}|f'(x)|=\infty$?

Решение. Рассмотрим сначала второй случай. Имеем

$$\varlimsup_{x\to a}|f'(x)|=\varlimsup_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot f(x)\right|\geqslant\varlimsup_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\cdot\lim_{x\to a}|f(x)|=$$
$$=+\infty\cdot\varlimsup_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|$$

(см. пример 72, гл. I).

Предположим, что $\varlimsup\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right|=0$.

Тогда

$$\varlimsup_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|=\lim_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|=\lim_{x\to a}|(\ln|f(x)|)'|=0;$$

откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a}(\ln|f(x)|)'=0$; значит, в окрестности $x=a$ функция $\ln|f(x)|$ ограничена, т. е. функция $|f(x)|$ ограничена, что противоречит условию.

Таким образом,

$$\varlimsup_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|=>0;$$

следовательно,

$$\varlimsup_{x\to a}|f'(x)|=+\infty.$$

В первом случае нельзя провести аналогичное доказательство, так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ может не существовать из-за возможного несуществования $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$, что и подтверждается примером функции $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$,

тогда $$f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x}-1\right)\qquad (a=0),\ \text{и}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\sin\dfrac{1}{x}-1\right)$ не существует.

45. Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$?

Решение. Возьмем ограниченную однозначную и имеющую конечную производную функцию $x = x(y)$, которая при $y \to A$ стремится к a, а производная ее $x'_y > 0$ и монотонно $\to 0$ при $y \to A$.

Рассмотрим обратную функцию $y = y(x)$. Она ограничена и имеет конечную производную на (a, b), причем $y'_x = (x'_y)^{-1} > 0$. Однако ее производная при $x \to a$ стремится к бесконечности, так как

$$\lim_{x \to a} y'_x = \lim_{y \to A} (x'_y)^{-1} = +\infty.$$

Таким образом, из $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$ не обязательно следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Это подтверждается примером: $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \to 0$.

46. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$?

Решение. Рассмотрим ограниченную и имеющую конечную производную на $(x_0, +\infty)$ функцию $u(x)$, не имеющую предела производной $u'(x)$ на бесконечности, а также две имеющие конечные производные на $(x_0, +\infty)$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$; причем $\psi(x) \geqslant a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$, а также $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi'}{\psi} = C \neq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\psi'}{\psi^2} = 0$.

Составим функцию $f(x) = \dfrac{u(\varphi(x))}{\psi(x)}$ $(1 < x < +\infty)$.

Функция $\underset{x \to +\infty}{f(x) \to 0}$, но $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{u'_\varphi \cdot \varphi'}{\psi} - \dfrac{u \cdot \psi'}{\psi^2}\right]$ не существует, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\psi'}{\psi^2} \cdot u = 0$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u'_\varphi \cdot \varphi'}{\psi}$ не существует.

Рассмотрим пример: $f = \dfrac{\sin x^2}{x}$, $x_0 = 1$. Здесь функции $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x$, $u = \sin x$ удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям.

47. Пусть ограниченная функция $f(x)$ имеет конечную производную в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$; следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ конечный или бесконечный?

Решение. Пусть $u(x)$ — ограниченная и имеющая конечную и ограниченную производную функция в интервале $(x_0, +\infty)$, не имеющая предела при $x \to +\infty$; $\varphi(x)$ — имеющая конечную производную в интервале $(x_0, +\infty)$ функция и $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, а

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$. Таким требованиям удовлетворяют функции: $u(x) = \sin x$, $\cos x$ и др.; $\varphi(x) = \ln x$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ и др.

Рассмотрим функцию $f(x) = u(\varphi(x))$. Ее производная $f'(x) = u'_\varphi \cdot \varphi'_x$ имеет предел

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} u'_\varphi \cdot \varphi'_x = 0,$$

а $\lim\limits_{x\to+\infty} u(\varphi(x))$ не существует, так как по условию не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

48. Вывести формулы для сумм:

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},$$

$$Q_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}.$$

Решение. Рассмотрим сумму

$$f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n = (x^{n+1} - x)(x-1)^{-1} \qquad (x \neq 1).$$

Зная, что $P_n(x) = f'_n(x)$, находим

$$P_n(x) = \left(\frac{x^{n+1} - x}{x-1}\right)' = \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - x^{n+1} + x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^n(nx - n - 1) + 1}{(x-1)^2} \qquad (x \neq 1).$$

Далее,

$$Q_n(x) = (xP_n(x))' = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}$$

$$(x \neq 1).$$

49. Вывести формулы для сумм:

$$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx;$$

$$T_n(x) = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx.$$

Решение. Умножив первое равенство на $\sin\frac{x}{2}$, получим

$$S_n \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots +\right.$$

$$\left. + \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Отсюда

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad \left(\sin\frac{x}{2} \neq 0\right).$$

Беря производную от функции $S_n(x)$ по x, получаем

$$T_n(x) = S_n'(x) = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

50. Вывести формулу для суммы

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} 2x + \cdots + n \operatorname{ch} nx.$$

Решение. Рассмотрим сумму $C_n(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx$.

Умножив обе части последнего равенства на $\operatorname{sh} \frac{x}{2}$, получим

$$C_n \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\operatorname{ch} \frac{3x}{2} - \operatorname{ch} \frac{x}{2} \right) + \left(\operatorname{ch} \frac{5x}{2} - \operatorname{ch} \frac{3x}{2} \right) + \cdots + \left(\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} x - \operatorname{ch} \frac{2n-1}{2} x \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} x - \operatorname{ch} \frac{x}{2} \right);$$

отсюда

$$C_n = \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} x - \operatorname{ch} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2}} \qquad (x \neq 0),$$

$$S_n = C_n' = \left[n \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \operatorname{sh}^2 \frac{nx}{2} \right] \left(2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \right)^{-1}.$$

51. Пользуясь тождеством

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \ldots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

вывести формулу для суммы

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Решение. Замечая, что

$$S_n = -\left(\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \cos \frac{x}{4} \right| + \cdots + \ln \left| \cos \frac{x}{2^n} \right| \right)' = -\left(\ln \left| \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \right| \right)',$$

получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x.$$

52. Доказать, что производная четной функции есть функция нечетная, а производная нечетной функции есть функция четная (предполагается, что указанные функции имеют конечную производную). Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — четная функция, имеющая конечную производную, т. е. $f(x)=f(-x)$. По определению производной имеем

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=-f'(-x).$$

Пусть $f(x)$ — нечетная функция, имеющая конечную производную, т. е. $f(x)=-f(-x)$. Тогда

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[f(x+\Delta x)-f(x)]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[-f(-x-\Delta x)+$$

$$+f(-x)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{-\Delta x}\times$$

$$\times[f(-x-\Delta x)-f(-x)]=f'(-x).$$

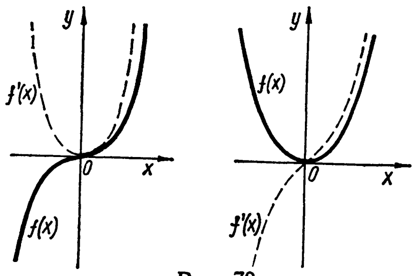

Рис. 78

Геометрическая интерпретация. Например, у четной дифференцируемой функции угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции, равен по абсолютной величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту касательной, проведенной в точке $(-x_0, f(x_0))$ (рис. 78).

53. Доказать, что производная периодической функции, если она существует, есть снова периодическая функция с тем же периодом.

Доказательство. Пусть $f(x)=f(x+T)$. Тогда $f'(x)=$ $=f'(x+T)$. Таким образом, если $f'(x)=\varphi(x)$, то $\varphi(x)=\varphi(x+T)$, что и требовалось доказать.

§ 2. Дифференциал функции

Определение 1. *Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется дифференцируемой в точке $x_0\in(a, b)$, если приращение ее $\Delta f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента x, может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x_0)=A\Delta x+\alpha\Delta x,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а α — функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x\to 0$.

Для того чтобы функция $y=f(x)$ являлась дифференцируемой в данной точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Формула малых приращений. Для приближенного вычисления дифференцируемой функции в близких к x_0 точках, когда $f(x_0)$ известно, можно пользоваться формулой:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x,\quad f'(x_0)\neq 0.$$

Определение 2. *Линейная однородная относительно Δx часть приращения функции $y = f(x)$, взятого в точке $x_0 \in (a, b)$, называется дифференциалом данной функции в этой точке и обозначается символом d. Таким образом,*

$$dy(x_0) = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x.$$

Если x — независимое переменное, то $\Delta x = dx$. В этом случае имеем

$$dy(x_0) = f'(x_0)\,dx.$$

Если $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция от t, то $dx(t_0) = \varphi'(t_0)\,dt$. Следовательно,

$$dy(x_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0)\,dt = f'_t[\varphi(t_0)]\,dt,$$

т. е. первый дифференциал обладает свойством инвариантности относительно замены аргумента.

54. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$. Сравнить их, если: $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$.

Решение. 1) По определению приращения функции в точке имеем

$$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 = \\ = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

2) По определению дифференциала в точке имеем

$$df(1) = f'(1)\Delta x = \Delta x.$$

Сравнение.

$$\Delta f(1) = 5 \quad (\Delta x = 1); \qquad df(1) = 1 \quad (\Delta x = 1);$$

$$\Delta f(1) = 0{,}131 \quad (\Delta x = 0{,}1); \qquad df(1) = 0{,}1 \quad (\Delta x = 0{,}1);$$

$$\Delta f(1) = 0{,}010301 \quad (\Delta x = 0{,}01); \qquad df(1) = 0{,}01 \quad (\Delta x = 0{,}01).$$

Найти дифференциал функции y, если:

55. $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Пользуясь определением дифференциала, находим

$$dy = -\frac{1}{x^2}\,dx \qquad (x \neq 0).$$

56. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$.

Решение. Используя определение дифференциала, находим

$$dy = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{|x + \sqrt{x^2 + a}|}\,\operatorname{sgn}(x + \sqrt{x^2 + a})\,dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

57. Найти:

а) $d(xe^x)$;

б) $d\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$.

Р е ш е н и е. Согласно определению дифференциала находим

а) $d(xe^x) = e^x(1+x)\,dx$;

б) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{d\,|x|}{x^2} =$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Здесь мы воспользовались свойством инвариантности дифференциала (см. также примеры 58—61).

Найти дифференциал функции y (u, v, w — дифференцируемые функции от x), если:

58. $y = uvw$.

Р е ш е н и е. По правилу дифференцирования произведения находим

$$dy = d(uvw) = ud(vw) + vwdu = u(vdw + wdv) + vwdu =$$
$$= uvdw + uwdv + vwdu.$$

59. $y = uv^{-2}$.

Р е ш е н и е. По правилу дифференцирования дроби находим

$$dy = \frac{v^2du - ud(v^2)}{v^4} = \frac{du}{v^2} - \frac{2udv}{v^3}.$$

60. $y = (u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Р е ш е н и е. По правилу дифференцирования степенной функции имеем

$$dy = d\left[(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\,d(u^2+v^2) =$$
$$= -\frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}\left[d(u^2)+d(v^2)\right] = -\frac{udu+vdv}{\sqrt{(u^2+v^2)^3}}.$$

61. $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Р е ш е н и е. Используя свойство инвариантности дифференциала, находим

$$dy = d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\,d\left(\frac{u}{v}\right) =$$
$$= \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\,\frac{vdu-udv}{v^2} = \frac{vdu-udv}{u^2+v^2}.$$

62. Найти:

а) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$; б) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;

в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$; д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

Р е ш е н и е. а) Дифференцируя по переменной x^3, получим

$$\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{d(x^3)}{d(x^3)}-2\frac{d(x^6)}{d(x^3)}-\frac{d(x^9)}{d(x^3)}=$$

$$=1-2\frac{d[(x^3)^2]}{d(x^3)}-\frac{d[(x^3)^3]}{d(x^3)}=1-4x^3-3x^6.$$

Можно находить и по-другому, а именно:

$$\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)}=$$

$$=\frac{(3x^2-12x^5-9x^8)\,dx}{3x^2dx}=1-4x^3-3x^6.$$

Аналогично поступаем во всех остальных случаях:

б) $$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)}=\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx}{2xdx}=$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3};$$

в) $$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}=\frac{\cos xdx}{-\sin xdx}=-\operatorname{ctg} x;$$

г) $$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}=\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{-dx}{\sin^2 x}}=-\operatorname{tg}^2 x;$$

д) $$\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}=\frac{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}}=-1.$$

63. В круговом секторе радиус $R=100$ *см* и центральный угол $\alpha=60°$. На сколько изменится площадь этого сектора, если: а) радиус его R увеличить на 1 *см*; б) угол α уменьшить на $30'$?

Дать точное решение и приближенное решение.

Т о ч н о е р е ш е н и е. а) Пусть S — площадь кругового сектора. Тогда

$$S=\frac{\pi}{360}\alpha R^2,\quad \Delta S_R=\frac{\pi}{360}\alpha[(R+\Delta R)^2-R^2]=$$

$$=\frac{\pi\alpha}{360}(2R\Delta R+(\Delta R)^2)=33{,}5\pi\ (см^2)\ —$$

изменение площади сектора по радиусу.

б) Найдем изменение площади сектора по углу. Имеем

$$\Delta S_\alpha=\frac{\pi}{360}R^2\Delta\alpha\qquad(\Delta\alpha=-30').$$

Тогда

$$\Delta S_\alpha=-\frac{\pi}{36}\cdot\frac{10^3}{60'}\cdot 30'=-\frac{\pi}{72}\cdot 10^3\ (см^2).$$

Приближенное решение отличается от точного только в первом случае:

$$\Delta S_R^* = dS = \frac{\pi\alpha}{360} \cdot 2RdR = 33\frac{1}{3}\pi \ (см^2).$$

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения:

64. $\sqrt[3]{1,02}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Вычислим ее производную в точке $x = 1$: $y'(1) = \frac{1}{3}$.

По формуле малых приращений имеем ($\Delta x = 0,02$):

$$\sqrt[3]{1+\Delta x} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\Delta x = 1,0066\ldots.$$

65. $\sin 29°$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Ее производная в точке $x = \frac{\pi}{6}$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда по формуле малых приращений получим $\left(\Delta x = -\frac{\pi}{180}\right)$:

$$\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{180}\right) = 0,484 \ldots.$$

66. Доказать приближенную формулу $\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}$ $(a > 0)$, где $|x| \ll a^2$.

Доказательство. По формуле малых приращений имеем

$$\sqrt{y+\Delta x} - \sqrt{y} \approx \frac{x}{2\sqrt{y}}.$$

Пусть $y = a^2$. Тогда за Δx можно принять x, так как по условию $|x| \ll a^2$ и формула доказана.

67. Доказать формулу $\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - r$ $(a > 0,\ x > 0)$, где $0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$.

Доказательство состоит в том, чтобы показать справедливость неравенства для r. Имеем

$$r = a + \frac{x}{2a} - \sqrt{a^2+x} = x\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a}\right) =$$

$$= x\,\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{2a(\sqrt{a^2+x}+a)} = \frac{x^2}{2a(\sqrt{a^2+x}+a)^2}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$0<r=\frac{x^2}{2a\left(\sqrt{a^2+x}+a\right)^2}<\frac{x^2}{8a^3}.$$

68. Доказать приближенную формулу $\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$ $(a>0)$, где $|x|\ll a^n$.

С помощью этой формулы приближенно вычислить $\sqrt[10]{1000}$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a\sqrt[n]{1+\frac{x}{a^n}}.$$

Рассмотрим, далее, функцию $f(y)=\sqrt[n]{y}$ и вычислим ее производную в точке $y=1$: $f'(1)=\frac{1}{n}$. Используя формулу малых приращений, получим

$$\sqrt[n]{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{n}.$$

Полагая здесь $\Delta x=\frac{x}{a^n}$ и умножая обе части на a, получим требуемое.

Для вычисления $\sqrt[10]{1000}$ по данной формуле представим $\sqrt[10]{1000}$ в виде

$$\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}$$

и положим $x=-24$, $a=2$, $n=10$.

Тогда имеем

$$\sqrt[10]{1000}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1{,}9955\ldots.$$

Примечание. Если a $(a\neq 0)$ есть точное значение измеряемой величины, а x — приближенное значение этой величины, то $|\Delta a|=|x-a|$ называется *абсолютной погрешностью*, а $\delta_a=\frac{|\Delta a|}{|a|}$ — относительной погрешностью измеряемой величины.

69. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1%?

Решение. Объем шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Пусть $|\Delta R|$ — абсолютная погрешность измерения радиуса. Тогда

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi\left[(R+\Delta R)^3-R^3\right]=\frac{4}{3}\pi\left[3R^2\Delta R+3R(\Delta R)^2+(\Delta R)^3\right];$$

но $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|\leqslant 0{,}01$, поэтому для $|\Delta R|$ получаем неравенство

$$\left|\frac{3\Delta R}{R}+3\frac{(\Delta R)^2}{R^2}+\frac{(\Delta R)^3}{R^3}\right|\leqslant 0{,}01.$$

Вводя обозначение $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \delta_R$, усилим неравенство до такого:

$$3\delta_R + 3\delta_R^2 + \delta_R^3 \leqslant 0{,}01,$$

откуда, пренебрегая членами δ_R^2 и δ_R^3, получаем $\delta_R \leqslant 0{,}0033$, т. е. $\delta_R \leqslant 0{,}33\%$.

70. Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма числа x ($x > 0$), если относительная погрешность этого числа равна δ.

Решение. По формуле малых приращений имеем

$$|\Delta \lg x| = |\lg(x + \Delta x) - \lg x| \approx \left|\frac{1}{\ln 10} \quad \frac{\Delta x}{x}\right| = \frac{\delta}{\ln 10} \approx 0{,}43\delta.$$

71. Доказать, что углы по таблице тангенсов определяются точнее, чем по таблице синусов с тем же самым числом десятичных знаков.

Доказательство. Пусть α — искомый угол и $\operatorname{tg}\alpha = z$, а $\beta = \sin\alpha$. Тогда главное значение α будет таким:

$$\alpha = \operatorname{arctg} z \quad \text{и} \quad \alpha = \arcsin\beta.$$

Заменяя в обоих случаях предельную погрешность $|\Delta\alpha|$ дифференциалом, получаем

$$|d\alpha| = \frac{|dz|}{1 + z^2} = \cos^2\alpha\,|dz| \quad \text{и} \quad |d\alpha| = \frac{|d\beta|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{|d\beta|}{|\cos\alpha|}.$$

Но по условию $|dz| = |d\beta|$ (одно и то же число верных знаков). Поэтому $|d\alpha|$ (по таблице тангенсов) $\leqslant |d\alpha|$ (по таблице синусов), что и требовалось доказать.

§ 3. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде

1°. Дифференцируемая функция $f(x)$ с необращающейся в нуль производной в интервале $a < x < b$ имеет однозначную непрерывную обратную и дифференцируемую функцию $x(y)$ с производной

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2°. В случае параметрического задания функции

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad \alpha < t < \beta,$$

где φ и ψ — достаточное число раз дифференцируемые функции. Для производных имеем формулы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'} \quad (\varphi' \neq 0);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{\varphi' dt} = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^3}.$$

3°. Если $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением

$$F(x, f(x)) = 0,$$

то производную $f'(x)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}[F(x, f(x)] = 0.$$

72. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$y^3 + 3y = x,$$

и найти ее производную y'_x.

Решение. Предположим, что существует две действительные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющие исходному уравнению, т. е.

$$y_1^3 + 3y_1 \equiv x,$$

$$y_2^3 + 3y_2 \equiv x;$$

отсюда

$$y_1^3 - y_2^3 + 3(y_1 - y_2) \equiv 0,$$

или

$$(y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 3) \equiv 0.$$

Так как $y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 3 > 0$ при любых x, то из последнего равенства вытекает

$$y_1 \equiv y_2.$$

Таким образом, данное уравнение имеет единственное действительное решение (кубическое уравнение с действительными коэффициентами имеет три корня, один из которых всегда действительный).

Существование единственного действительного решения можно показать также с помощью производной x'_y:

$$x'_y = 3 + 3y^2 > 0,$$

которая ни в одной точке не обращается в нуль, т. е. функция $x(y)$ — монотонная. Поэтому существует единственная монотонная дифференцируемая обратная функция $y(x)$ с производной

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(1 + y^2)}.$$

73. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$, и найти производную y'_x.

Решение. Поступая аналогичным образом как и при решении примера 72, получаем

$$y_1 - y_2 - \varepsilon(\sin y_1 - \sin y_2) \equiv 0,$$

или

$$y_1 - y_2 - 2\varepsilon \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \cos \frac{y_1 + y_2}{2} \equiv 0,$$

откуда

$$|y_1 - y_2| = 2\varepsilon \left| \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \right| \left| \cos \frac{y_1 + y_2}{2} \right| \leqslant \varepsilon |y_1 - y_2|.$$

Далее,

$$|y_1 - y_2|(1 - \varepsilon) \leqslant 0;$$

но $1 - \varepsilon > 0$, поэтому $|y_1 - y_2| \leqslant 0$, т. е. $y_1 \equiv y_2$.

Находим производную y'_x:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

74. Определить область существования обратных функций $x = x(y)$ и найти их производные, если:

а) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$; в) $y = \operatorname{sh} x$;

б) $y = x + e^x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

Решение. а) Предположив существование двух обратных функций $x_1(y)$, $x_2(y)$, имеем $x_1 - x_2 = \ln \frac{x_2}{x_1}$; откуда следует $x_1 \equiv x_2$. При $0 < x < +\infty$ имеем $-\infty < y < +\infty$. Производная $y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$, поэтому $x'_y = \frac{x}{x+1}$.

б) $y'_x = 1 + e^x > 0$ при всех x. Следовательно, существует однозначная функция $x(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$ с производной

$$x'_y = \frac{1}{1 + e^x}.$$

в) Очевидно, $-\infty < y < +\infty$; $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ при всех x; поэтому обратная функция однозначна и дифференцируема:

$$x'_y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

г) $y'_x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$ при всех x; поэтому обратная функция однозначна и дифференцируема:

$$x'_y = \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{1 - y^2} \quad (|y| < 1).$$

75. Выделить однозначные непрерывные ветви обратных функций $x = x(y)$, найти их производные и построить графики, если:

а) $y = 2x^2 - x^4$; б) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$; в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

Решение. а) Найдем нули производной $y'_x : y'_x = 4x - 4x^3$;

$$4x - 4x^3 = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \pm 1.$$

В интервалах $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < +\infty$ производная y'_x сохраняет знак; следовательно, функция y монотонна в этих интервалах и существуют однозначные ветви обратной функции $x = x(y)$ в интервалах $-\infty < y \leqslant 1$ и $0 \leqslant y < 1$. Из формулы а) имеем

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y},$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \qquad (-\infty < y \leqslant 1);$$

$$x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \qquad (-\infty < y \leqslant 1);$$

$$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1);$$

$$x_4 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1).$$

б) Производная функции y обращается в нуль при $x = 0$; при $x > 0$ — положительна и при $x < 0$ — отрицательна. Следовательно, существуют две однозначные ветви функции $x = x(y)$ в интервале $0 < y < 1$. Из формулы б) получаем

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

в) Аналогично предыдущим случаям получаем

$$y'_x = -2e^{-x} + 2e^{-2x} = 0,$$

откуда $x = 0$. При $x < 0$ производная $y' > 0$; при $x > 0$ $y' < 0$. Поэтому существуют две однозначные ветви в интервалах $0 < y \leqslant 1$ и $-\infty < y \leqslant 1$. Обращая формулу в), имеем

$$x_1 = -\ln(1+\sqrt{1-y}) \quad (-\infty < y \leqslant 1),$$

$$x_2 = \ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y} \quad (0 < y \leqslant 1).$$

Производные имеют вид:

а) $x'_y = \dfrac{1}{4x(1-x^2)}$; б) $x'_y = \dfrac{x^3}{2y^2}$; в) $x'_y = \dfrac{1}{2(e^{-2x}-e^{-x})}$.

На рис. 79, *а*, *б*, *в* построены графики обратных функций для всех трех случаев.

76. Показать, что функция $y = y(x)$, определяемая системой уравнений $x = 2t + |t|$; $y = 5t^2 + 4t|t|$, дифференцируема при $t = 0$, однако ее производная в этой точке не может быть найдена по обычной формуле.

Решение. По определению производной имеем

$$y'(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} = 0.$$

По обычной формуле имеем $y'_t = 10t + 8|t|$; $x'_t = 2 + \operatorname{sgn} t$ $(t \neq 0)$, т. е. $y'_x = \dfrac{10t+8|t|}{2+\operatorname{sgn} t}$ при $t = 0$ не существует.

Найти производные y'_x от следующих функций, заданных в неявном виде:

77. $y^2 = 2px$.

Решение. Пусть $y(x)$ — дифференцируемое решение этого уравнения. Тогда дифференцируя тождество $y^2(x) \equiv 2px$, получаем $2yy' \equiv 2p$, откуда $y' = \frac{p}{y}$, $y \neq 0$.

78. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

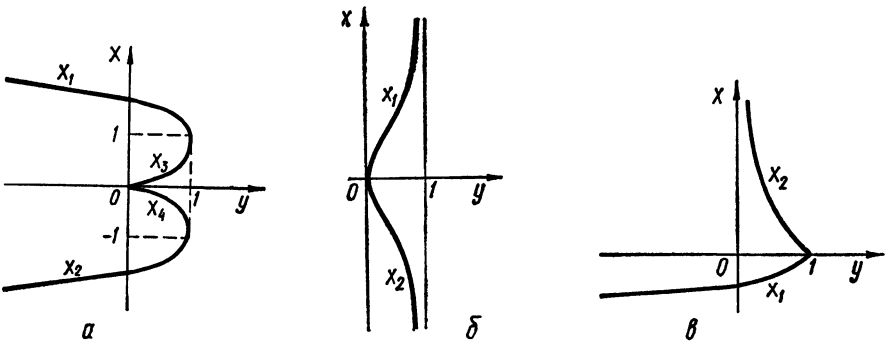

Рис. 79

Решение. Пусть $y(x)$ удовлетворяет данному уравнению. Тогда, дифференцируя тождество $\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x} \equiv \ln\sqrt{x^2+y^2(x)}$, получим

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

откуда

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y).$$

79. Найти y'_x, если:

а) $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда);

б) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида);

в) $\rho = ae^{m\varphi}$ (логарифмическая спираль);

где ρ, φ — полярные координаты.

Решение. Поскольку $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то

$$1 = \frac{d\rho}{dx}\cos\varphi - \rho\frac{d\varphi}{dx}\sin\varphi;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\rho}{dx}\sin\varphi + \rho\frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{x+yy'}{\rho}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{xy'-y}{\rho^2}.$$

Используя эти производные, а также а) — в), получаем

а) $\frac{d\rho}{dx} = a\frac{d\varphi}{dx}$, откуда $y'_x = \frac{\rho x + ay}{ax - \rho y} = \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arctg}\varphi)$;

б) $\frac{d\rho}{dx} = -a\frac{d\varphi}{dx}\sin\varphi$, откуда $y'_x = \frac{ay\sin\varphi - x\rho}{ax\sin\varphi + \rho y} =$

$$= -\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2} \quad \left(\varphi \neq 0,\ \varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3}\right);$$

в) $\frac{d\rho}{dx} = ame^{m\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$, откуда $y'_x = \frac{my + x}{mx - y} =$

$$= \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right), & m \neq 0; \\ -\operatorname{ctg}\varphi, & m = 0 \\ (\varphi \neq 0; \quad \varphi \neq \pi). \end{cases}$$

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. В случае, когда функция $f(x)$ n-кратно дифференцируема, имеют место формулы:

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

$$d^n f = d(d^{n-1}f) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Если x — независимая переменная, то

$$d^2x = d^3x = \cdots = 0.$$

В этом случае справедлива формула: $d^n f = f^{(n)}(dx)^n$.

2°. Основные формулы:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0);$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)\,x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3°. Формула Лейбница. Если u и v — n-кратно дифференцируемые функции, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}.$$

Найти y'', если:

80. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

Решение. Последовательно дифференцируя, находим

$$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - (1+2x^2)\,x\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

81. $y = \ln f(x)$.

Решение. Последовательно дифференцируя, находим

$$y' = \frac{f'}{f}; \quad y'' = \left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{f''f - f'^2}{f^2} \quad (f > 0).$$

Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y'', если:

82. $y = u^2$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y' = 2uu', \quad y'' = (2uu')' = 2(u'^2 + uu'').$$

83. $y = u^v \quad (u > 0)$.

Решение. Дифференцируя степенно-показательную функцию u^v, имеем

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{u'v}{u}\right).$$

Далее,

$$y'' = \left[u^v\left(v' \ln u + \frac{u'v}{u}\right)\right]' = (u^v)'\left(v' \ln u + \frac{u'v}{u}\right) +$$

$$+ u^v\left(v' \ln u + \frac{u'v}{u}\right)' = u^v\left(v' \ln u + \frac{u'v}{u}\right)^2 +$$

$$+ u^v\left(v'' \ln u + \frac{v'u'}{u} + \frac{u(u'v)' - u'^2v}{u^2}\right) = u^v\left[\left(v' \ln u + \frac{u'v}{u}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + v'' \ln u + \frac{uu''v + 2uu'v' - u'^2v}{u^2}\right].$$

Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция.

Найти y'' и y''', если:

84. $y = f(x^2)$.

Решение. Последовательно вычисляя производные, получаем

$$y' = 2xf'; \quad y'' = (2xf')' = 2(f' + 2x^2f'');$$

$$y''' = 2\frac{d}{dx}(f' + 2x^2f'') = 4xf'' + 8xf'' + 8x^3f''' = 4x(3f'' + 2x^2f'''),$$

где штрих у f означает производную по аргументу x^2.

85. $y = f(e^x)$.

Решение. Поступая аналогично тому, как при решении предыдущего примера, находим

$$y' = e^x f'; \quad y'' = f'e^x + e^{2x}f'';$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(e^x f' + e^{2x}f'') = e^x f' + e^{2x}f'' + 2e^{2x}f'' + e^{3x}f''' = e^x f' + 3e^{2x}f'' + \\ + e^{3x}f''',$$

где штрих у f означает дифференцирование по аргументу e^x.

86. Найти d^2y для функции $y = e^x$ в двух случаях:

а) x — независимая переменная; б) x — промежуточный аргумент.

Решение. а) По правилу п.1 находим

$$dy = d(e^x) = e^x dx, \quad d^2y = d(e^x dx) = (e^x)''(dx)^2 = e^x(dx)^2.$$

б) По определению дифференциала $dy = d(e^x) = e^x dx$. Дифференцируя произведение $e^x dx$, имеем

$$d^2y = d(e^x dx) = e^x(dx)^2 + e^x d^2x.$$

Считая x независимой переменной, найти d^2y, если:

87. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Решение. Используя определение дифференциала, а также правило дифференцирования дроби, находим

$$dy = d(\sqrt{1 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$d^2y = d\left(\frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1 + x^2}(dx)^2 - x^2(dx)^2(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{(dx)^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции от переменной x. Найти d^2y, если:

88. $y = uv$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения находим:

$$dy = d(uv) = udv + vdu;$$

$$d^2y = d(udv + vdu) = dudv + ud^2v + dudv + vd^2u =$$

$$= ud^2v + 2dudv + vd^2u.$$

89. $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Решение. Используя инвариантность формы дифференциала, имеем

$$dy = d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2};$$

$$d^2y = d\left(\frac{vdu - udv}{u^2+v^2}\right) = \frac{(u^2+v^2)\, d\,(vdu - udv)}{(u^2+v^2)^2} -$$

$$- \frac{2\,(vdu - udv)\,(udu + vdv)}{(u^2+v^2)^2} = \frac{vd^2u - ud^2v}{u^2+v^2} -$$

$$- \frac{2\,[uv\,(du)^2 - u^2dudv + v^2dudv - uv\,(dv)^2]}{(u^2+v^2)^2}.$$

Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

90. $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$.

Решение. Последовательно дифференцируя, имеем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{(3-3t^2)\,dt}{(2-2t)\,dt} = \frac{3}{2}(1+t)\;(t \neq 1);$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}(1+t)\right] = \frac{3}{2}\,\frac{d\,(1+t)}{dx} = \frac{3}{2}\,\frac{dt}{(2-2t)\,dt} = \frac{3}{4\,(1-t)};$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4\,(1-t)}\right) = \frac{3}{4}\,\frac{d\left(\frac{1}{1-t}\right)}{dx} = \frac{3}{4}\,\frac{\frac{dt}{(1-t)^2}}{2\,(1-t)\,dt} =$$

$$= \frac{3}{8\,(1-t)^3}\;(t \neq 1).$$

91. $x = f'(t), \; y = tf'(t) - f(t)$.

Решение. Дифференцируя последовательно, находим

$$y'_x = \frac{d\,[tf'(t) - f(t)]}{d\,[f'(t)]} = \frac{f''}{tf''} = \frac{1}{t}\;(f'' \neq 0);$$

$$y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dx} = \frac{-t^{-2}dt}{f''dt} = -\frac{1}{t^2f''};$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d\,(-t^{-2}\,(f'')^{-1})}{dx} = -\frac{d\,(t^{-2}\,(f'')^{-1})}{f''dt} = \frac{2tf'' + t^2f'''}{t^4\,(f'')^3}.$$

92. Пусть функция $y = f(x)$ — дифференцируемая достаточное число раз. Найти производные x', x'', x''', $x^{(IV)}$ обратной функции $x = f^{-1}(y)$, предполагая, что эти производные существуют.

Решение. Применяя формулу для вычисления производной от обратной функции, а также правило вычисления старших производных, находим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{1}{f'}\right)}{dy} = \frac{-\frac{f''}{(f')^2}\,dx}{f'dx} = -\frac{f''}{(f')^3};$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{d\left(\frac{f''}{(f')^3}\right)}{dy} = \frac{\frac{f'''\,(f')^3 - 3\,(f')^2\,(f'')^2}{(f')^6}\,dx}{f'dx} =$$

$$= \frac{3\,(f'')^2 - f'f'''}{(f')^5}\;(f' \neq 0).$$

Найти y'_x, y''_{x^2} и y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной неявно:

93. $x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Пусть $y(x)$ — трижды дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда дифференцируя тождество $x^2 + y^2(x) \equiv 25$ по x, получаем $2x + 2yy' \equiv 0$; откуда $y' = -\frac{x}{y}$. Далее используем правило вычисления старших производных с учетом уже имеющегося значения y':

$$y'' = \frac{-d\left(\frac{x}{y}\right)}{dx} = -\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3};$$

$$y''' = \left(-\frac{25}{y^3}\right)' = \frac{75}{y^4}y' = -\frac{75x}{y^5} \quad (y \neq 0).$$

94. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \leqslant x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a, b и c, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \leqslant x_0; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, \text{ если } x > x_0, \end{cases}$$

была дважды дифференцируема?

Решение. Для существования первой производной в точке $x = x_0$ необходимы и достаточны равенства односторонних производных в точке x_0 непрерывности функции $F(x)$. Поэтому необходимо потребовать:

а) $f(x_0) = c$ (непрерывность функции $F(x)$);

б) $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) = b$, т. е. $F'(x_0) = b$ (существование первой производной $F'(x_0)$).

Далее должно выполняться равенство

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{F'(x_0 + \Delta x) - F'(x_0)}{\Delta x},$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f'_-(x_0 + \Delta x) - f'_-(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{2a\Delta x + b - b}{\Delta x} = 2a$

(существование второй производной $F''(x_0)$).

Итак,

$$c = f(x_0), \quad b = f'_-(x_0), \quad a = \frac{1}{2} f''_-(x_0).$$

Найти производные указанного порядка:

95. $y = ax^{-m}$. Найти y'''.

Решение. Дифференцируя последовательно, имеем:

$$y' = -max^{-m-1}; \quad y'' = -ma(x^{-m-1})' = am(m+1)x^{-(m+2)};$$

$$y''' = am(m+1)(x^{-(m+2)})' = -am(m+1)(m+2)x^{-(m+3)}.$$

96. $y = \frac{x^2}{1-x}$. Найти $y^{(8)}$.

Решение. Для удобства вычтем и прибавим в числителе единицу. Тогда получим

$$y = -(1+x) + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}.$$

Очевидно,

$$y^{(8)} = [(1-x)^{-1}]^{(8)} = 8!\ (1-x)^{-9}\ (x \neq 1).$$

97. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Найти $y^{(100)}$.

Решение. Преобразуем данную функцию к виду, удобному для дифференцирования:

$$y = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

После 100-кратного дифференцирования получим

$$y^{(100)} = \frac{(199)!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{(197)!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}} =$$

$$= \frac{(197)!!}{2^{100}} \cdot \frac{399-x}{(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} \quad (x < 1).$$

98. $y = x^2 e^{2x}$. Найти $y^{(20)}$.

Решение. Здесь удобнее всего воспользоваться формулой Лейбница. Пусть $u = x^2$, $v = e^{2x}$. Найдем u', u'', ... Имеем: $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = \cdots = u^{(20)} = 0$. Вычислим, далее, $v^{(20)}$, $v^{(19)}$, $v^{(18)}$, ... Имеем $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 4e^{2x}$, ..., $v^{(20)} = 2^{20}e^{2x}$. По формуле Лейбница находим

$$(x^2e^{2x})^{(20)} = u^{(0)}v^{(20)} + C_{20}^1 u'v^{(19)} + C_{20}^2 u''v^{(18)} =$$

$$= x^2 \cdot 2^{20}e^{2x} + 20 \cdot 2x \cdot 2^{19}e^{2x} + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 2 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} =$$

$$= 2^{20}(x^2 + 20x + 95)\,e^{2x}.$$

99. $y = \frac{e^x}{x}$. Найти $y^{(10)}$.

Решение. Пусть $u = \frac{1}{x}$, $v = e^x$; как и в предыдущем примере, воспользуемся формулой Лейбница. Тогда получим

$$\left(\frac{1}{x}e^x\right)^{(10)} = \frac{e^x}{x} - C_{10}^1\frac{e^x}{x^2} + 2C_{10}^2\frac{e^x}{x^3} - 2\cdot 3C_{10}^3\frac{e^x}{x^4} +$$

$$+ 2\cdot 3\cdot 4C_{10}^4\frac{e^x}{x^5} - 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5C_{10}^5\frac{e^x}{x^6} + 6!\,C_{10}^6\frac{e^x}{x^7} - 7!\,C_{10}^7\frac{e^x}{x^8} +$$

$$+ 8!\,C_{10}^8\frac{e^x}{x^9} - 9!\,C_{10}^9\frac{e^x}{x^{10}} + 10!\,\frac{e^x}{x^{11}} = e^x\sum_{n=0}^{10}(-1)^n C_{10}^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

100. $y = x\,\mathrm{sh}\,x$. Найти $y^{(100)}$.

Решение. По формуле Лейбница находим

$$y^{(100)} = x \operatorname{sh} x + C_{100}^{1} \operatorname{ch} x = x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x.$$

Найти дифференциал указанного порядка, считая x независимой переменной:

101. $y = x^5$. Найти d^5y.

Решение. По формуле п. 1° находим

$$dy = 5x^4dx;\quad d^2y = 20x^3(dx)^2;\ \ldots;\quad d^5y = 5!\,(dx)^5.$$

102. $y = x\cos 2x$. Найти $d^{10}y$.

Решение. По формуле Лейбница получаем

$$d^{10}y = (-x\cdot 2^{10}\cos 2x - C_{10}^{1}\cdot 2^9\sin 2x)(dx)^{10} =$$
$$= -2^{10}(x\cos 2x + 5\sin 2x)(dx)^{10}.$$

Найти дифференциалы указанного порядка, если u — функция от x, дифференцируемая достаточное число раз:

103. $y = u^2$. Найти $d^{10}y$.

Решение. Применим формулу Лейбница к произведению $y = u\cdot u$. Имеем

$$d^{10}y = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i} d^iu\cdot d^{10-i}u = 2\sum_{i=0}^{4} C_{10}^{i} d^iu\cdot d^{10-i}u + C_{10}^{5}(d^5u)^2 =$$
$$= 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u + 240d^3ud^7u + 420d^4ud^6u +$$
$$+ 252(d^5u)^2.$$

104. $y = \ln u$. Найти d^3y.

Решение. Находим последовательно:

$$dy = -\frac{du}{u};\quad d^2y = \frac{ud^2u - (du)^2}{u^2};$$

$$d^3y = \frac{u^2d(ud^2u - (du)^2) - 2udu(ud^2u - (du)^2)}{u^4} =$$

$$= \frac{1}{u^3}[u(dud^2u + ud^3u - 2dud^2u) - 2udud^2u + 2(du)^3] =$$

$$= u^{-3}(u^2d^3u - 3udud^2u + 2(du)^3).$$

105. Найти d^2y, d^3y и d^4y от функции $y = f(x)$, считая x функцией от некоторой независимой переменной.

Решение. Исходя из определения дифференциалов высших порядков, имеем

$$dy = f'dx;\quad d^2y = d(f'dx) = f''(dx)^2 + f'd^2x;$$
$$d^3y = d(f''(dx)^2 + f'd^2x) = f'''(dx)^3 + 2f''dx\,d^2x + f''dxd^2x + f'd^3x =$$
$$= f'''(dx)^3 + 3d^2xdxf'' + f'd^3x;$$
$$d^4y = f^{(IV)}(dx)^4 + f'''\,3(dx)^2d^2x + 3d^3xdxf'' + 3(d^2x)^2f'' +$$
$$+ 3d^2x(dx)^2f''' + f''dxd^3x + f'd^4x = f^{(IV)}(dx)^4 + 6f'''(dx)^2d^2x +$$
$$+ 4dxd^3xf'' + 3(d^2x)^2f'' + f'd^4x.$$

106. Выразить производные y'' и y''' от функции $y = f(x)$ через последовательные дифференциалы переменных x и y, не предполагая x независимой переменной.

Решение. Используя определение дифференциала, а также правило дифференцирования произведения, получаем

$$dy = f'dx, \qquad (1)$$

$$d^2y = f''(dx)^2 + f'd^2x, \qquad (2)$$

$$d^3y = f'''(dx)^3 + 3d^2xdxf'' + f'd^3x. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) имеем последовательно

$$y' = f' = \frac{dy}{dx};$$

$$y'' = f'' = \frac{d^2y - y'd^2x}{(dx)^2} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{(dx)^3};$$

$$y''' = f''' = \frac{d^3y - 3d^2xdx\dfrac{d^2y - y'd^2x}{(dx)^2} - \dfrac{dy}{dx}d^3x}{(dx)^3} =$$

$$= \frac{1}{(dx)^5}\left[(dx)^2 d^3y - 3d^2xdxd^2y + 3(d^2x)^2 dy - dxdyd^3x\right].$$

107. Показать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

Решение. После двухкратного дифференцирования получаем

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x \equiv -y.$$

108. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную n-го порядка, то $[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$.

Доказательство проведем по методу математической индукции. Имеем, очевидно:

$$[f(ax + b)]' = af',$$

где штрих у функции f означает производную по аргументу $(ax + b)$.

Пусть справедливо тождество

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b) \qquad (1)$$

и требуется доказать, что

$$[f(ax + b)]^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax + b). \qquad (2)$$

Дифференцируя (1) по x, получим (2), что и требовалось доказать.

109. Найти $P^{(n)}(x)$, если $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.

Решение. Дифференцируя последовательно, имеем

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1};$$

$$P''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + a_{n-2};$$

. . . .

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)a_0x^{n-k} +$$

$$+ (n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k)a_1x^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k}.$$

Положив $k = n$, находим $P^{(n)}(x) = n!a_0$

Найти $y^{(n)}$, если:

110. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Решение. Приведем сначала функцию y к виду, удобному для дифференцирования:

$$y = \frac{a}{c}\,\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right) =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\left(b - \frac{ad}{c}\right)\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-1} \quad (c \neq 0).$$

После этого получаем без труда

$$y^{(n)} = \frac{1}{c}\left(b-\frac{ad}{c}\right)(-1)^n\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-n-1} n!.$$

111. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

Решение. Представляя единицу в числителе в виде

$$1 \equiv (x-1)-(x-2)$$

и разлагая на множители квадратный трехчлен в знаменателе

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2),$$

получаем

$$y = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Дифференцируя y n раз, находим

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

112. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

Решение. Запишем функцию в виде

$$y = (1+x)^{-\frac{1}{3}}x.$$

Производная k-го порядка функции $y_1(x) = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$ равна

$$y_1^{(k)} = (-1)^k\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\dots\left(\frac{1}{3}+k-1\right)(1+x)^{-\frac{1}{3}-k}. \qquad (1)$$

Производную функции $y(x)$ вычислим с помощью формулы Лейбница, использовав формулу (1) при $k = n$ и $k = n-1$:

$$y^{(n)} = y_1^{(n)}x + ny_1^{(n-1)} = (-1)^n\frac{1\cdot 4\dots(3n-2)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}x +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-5)\,n}{3^{n-1}(1+x)^{\frac{1}{3}+(n-1)}}=(-1)^n\frac{1\cdot 4\ldots(3n-5)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}[(3n-2)\,x-$$

$$-3n(1+x)]=(-1)^n\frac{1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{\frac{1}{3}+n}}.$$

113. $y=\sin^2 x$.

Решение. Представляя y в виде

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

и пользуясь формулой п.2°, находим

$$y^{(n)}=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

114. $y=\sin^3 x$.

Решение. Представляя y в виде

$$y=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

и пользуясь формулой п.2°, получаем

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

115. $y=\sin ax\sin bx$.

Решение. Представляя y в виде

$$y=\frac{1}{2}[\cos(a-b)\,x-\cos(a+b)\,x]$$

и применяя формулу п.2°, находим

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^n\cos\left[(a-b)\,x+\frac{n\pi}{2}\right]-(a+b)^n\cos\left[(a+b)\,x+\frac{n\pi}{2}\right]\right..$$

116. $y=\sin^2 ax\cos bx$.

Решение. Представляя y в виде

$$y=\frac{1-\cos 2ax}{2}\cos bx=\frac{\cos bx}{2}-\frac{1}{4}[\cos(2a+b)\,x+\cos(2a-b)\,x]$$

и пользуясь формулой п.2°, имеем

$$y^{(n)}=\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\left[(2a+b)^n\cos\left((2a+b)\,x+\frac{n\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(2a-b)^n\cos\left((2a-b)\,x+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

117. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Решение. Преобразовав y к виду

$$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

получаем

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

118. $y = x\cos ax$.

Р е ш е н и е. По формуле Лейбница имеем

$$y^{(n)} = xa^n\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + C_n^1 a^{n-1}\cos\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) =$$

$$= xa^n\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + na^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

119. $y = x^2\sin ax$.

Р е ш е н и е. По формуле Лейбница получаем

$$y^{(n)} = x^2a^n\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + 2xC_n^1a^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right) +$$

$$+ 2C_n^2a^{n-2}\sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right) = x^2a^n\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) -$$

$$- 2xna^{n-1}\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) - (n-1)\,na^{n-2}\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

120. $y = e^x\cos x$.

Р е ш е н и е. Представляя функцию $\cos x$ по формуле Эйлера, получим

$$y = \frac{1}{2}\left[e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\right].$$

Далее, берем n-ю производную:

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[(1+i)^n e^{(i+1)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2})^n e^{x+i\left(x+\frac{\pi n}{4}\right)} + (\sqrt{2})^n e^{x-i\left(x+\frac{\pi n}{4}\right)}\right] =$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} e^x\cos\left(x + \frac{\pi n}{4}\right).$$

121. $y = \ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$.

Р е ш е н и е. Взяв производную, имеем

$$y' = \frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)} = \left(\frac{a}{b} + x\right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} - x\right)^{-1}.$$

Продифференцировав функцию y' $(n-1)$ раз, получаем

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{b} + x\right)^{-n} + (n-1)!\left(\frac{a}{b} - x\right)^{-n} =$$

$$= (n-1)!\,b^n\left[\frac{1}{(a-bx)^n} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}\right] =$$

$$= \frac{(n-1)!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left[(a+bx)^n + (-1)^n(a-bx)^n\right].$$

122. $y = e^{ax}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен.

Решение. Применяя формулу Лейбница, находим

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ax})^{(n-k)} (P(x))^{(k)} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k a^{n-k} [P(x)]^{(k)} e^{ax}, & n \geqslant m; \\ \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} [P(x)]^{(k)} e^{ax}, & n < m, \end{cases}$$

где m — степень многочлена.

Найти $d^n y$, если:

123. $y = x^n e^x$.

Решение. По формуле Лейбница находим

$$d^n y = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k (x^n) d^{(n-k)} (e^x) =$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (dx)^{n-k} n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) x^{n-k} (dx)^k =$$

$$= e^x (dx)^n \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 k! \, x^{n-k}.$$

124. Доказать равенства:

1) $[e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)$;

2) $[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi)$,

где $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Доказательство. Умножив левую часть первого равенства на i, сложим произведение с левой частью второго равенства; получим:

$$[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} + [ie^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ic} [e^{(a+bi)x}]^{(n)} =$$

$$= e^{ic} (a + bi)^n e^{(a+bi)x} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{(a+bi)x + ic + ni\varphi} =$$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} [\cos(bx + c + n\varphi) + i \sin(bx + c + n\varphi)] =$$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(bx + c + n\varphi) + i (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + n\varphi).$$

Комплексные выражения равны в том и только в том случае, когда равны их действительные и мнимые части. Приравняв их между собой, убеждаемся в справедливости формул, написанных в условии задачи.

125. Найти $y_j^{(n)}$ $(j = 1, 2)$, если:

а) $y_1 = \operatorname{ch} ax \cos bx$;

б) $y_2 = \operatorname{ch} ax \sin bx$.

Р е ш е н и е. Умножим y_2 на мнимую единицу i и сложим с y_1; получим

$$z(x) = y_1 + iy_2 = \frac{1}{2}\left[e^{(a+bi)x} + e^{-(a-bi)x}\right].$$

Дифференцируя n раз комплекснозначную функцию $z(x)$, находим

$$z^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left[(a+bi)^n e^{(a+bi)x} + (-1)^n (a-bi)^n e^{-(a-bi)x}\right]. \qquad (1)$$

Записав

$$a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\varphi}, \quad a - bi = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\varphi}, \quad (-1)^n = e^{in\pi},$$

где $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и подставив в (1), получим

$$z^{(n)}(x) = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}{2}\left[e^{ax}e^{i(n\varphi+bx)} + e^{-ax}e^{i(bx-n\varphi+n\pi)}\right]. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) $e^{ax} = \operatorname{ch} ax + \operatorname{sh} ax$, $e^{-ax} = \operatorname{ch} ax - \operatorname{sh} ax$, найдем

$$z^{(n)}(x) = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}{2}\left[\operatorname{ch} ax\left(e^{i(n\varphi+bx)} + e^{i(n\pi-n\varphi+bx)}\right) + \operatorname{sh} ax\left(e^{i(n\varphi+bx)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{i(n\pi-n\varphi+bx)}\right)\right] = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}{2}\left\{\operatorname{ch} ax\left[(\cos(n\varphi+bx) + \cos(n\pi - n\varphi + \right.\right.$$

$$+ bx)) + i(\sin(n\varphi+bx) + \sin(n\pi - n\varphi + bx))] + \operatorname{sh} ax\left[(\cos(n\varphi + \right.$$

$$+ bx) - \cos(n\pi - n\varphi + bx) + i(\sin(n\varphi + bx) - \sin(n\pi - n\varphi +$$

$$+ bx))]\} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\operatorname{ch} ax \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\left[\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + i\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right] - \operatorname{sh} ax \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\left[\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - i\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right]\right\}.$$

Отделяя действительную и мнимую части полученного выражения, окончательно находим

$$y_1^{(n)}(x) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\operatorname{ch} ax \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} a x \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right\},$$

$$y_2^{(n)}(x) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\operatorname{ch} ax \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh} ax \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

126. Преобразовав функцию $f(x) = \sin^{2p} x$, где p — натуральное число, в тригонометрический многочлен $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx$, найти $f^{(n)}(x)$.

Р е ш е н и е. С помощью формул Эйлера имеем

$$\sin^{2p} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k e^{ikx} e^{-i(2p-k)x} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(k-p)x} + \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(k-p)x}\right) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

Во второй сумме, стоящей в скобке, введем новый индекс суммирования k', полагая $k = 2p - k'$. При этом, использовав известную формулу $C_{2p}^k = C_{2p}^{2p-k}$, получим

$$\sin^{2p} x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k e^{2i(k-p)x} + \sum_{k'=0}^{p-1} (-1)^{k'} C_{2p}^{2p-k'} e^{2i(p-k)'x}\right) +$$

$$+ \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \left(e^{2i(k-p)x} + e^{-2i(k-p)x}\right) +$$

$$+ \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k \cos 2(k-p)x + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

Взяв n-ю производную от полученного выражения, находим

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k 2^n (k-p)^n \cos\left[2(k-p)x + \frac{n\pi}{2}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+p} C_{2p}^k 2^{n-2p+1} (k-p)^n \cos\left[2(k-p)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

127. Найти $f^{(n)}(x)$, если:

а) $f(x) = \cos^{2p} x$; б) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; в) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

где p — целое положительное число (см. предыдущий пример).

Решение. а) Представляя функцию $y(x) = \cos x$ с помощью формул Эйлера в виде $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, получим, повторяя рассуждения, проводившиеся при решении предыдущего примера:

$$\cos^{2p} x = \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \cos 2(k-p)x + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

Дифференцируя полученное выражение n раз, находим

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k 2^{n-2p+1} (k-p)^n \cos\left[2(k-p)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

Для вычисления производных n-го порядка в случаях б) и в) можно представить функции в виде

$$\sin^{2p+1} x = \sin^{2p} x \sin x, \quad \cos^{2p+1} x = \cos^{2p} x \cos x$$

и воспользоваться результатами предыдущего и настоящего примеров. Читателю будет полезно самому проделать все выкладки, поэтому ограничимся лишь приведением ответов:

б) $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^{k} \sin\left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2}\right];$$

в) $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^{k} \cos\left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

128. Используя тождество $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$, доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arcctg} x].$$

Доказательство. Возьмем n-ю производную. Переходя к тригонометрической форме записи комплексного числа и используя формулу Муавра, получим

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi) -\right.$$

$$\left. - (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1)\varphi,$$

$$\varphi = \arg(x+i) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x,$$

что и требовалось доказать.

Найти $f^{(n)}(0)$, если:

129. а) $f(x) = x^2 e^{ax}$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = \arcsin(x)$.

Решение. а) По формуле Лейбница находим

$$f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + C_n^1 2x a^{n-1} e^{ax} + 2C_n^2 a^{n-2} e^{ax},$$

откуда

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2}.$$

б) Непосредственное последовательное дифференцирование затруднительно, поэтому поступаем следующим образом. Дифференцируя f

два раза, получаем

$$f' = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2xf'}{1+x^2},$$

откуда

$$(1+x^2)f'' + 2xf' \equiv 0.$$

Применяем к полученному тождеству формулу Лейбница (взяв производную $(n-2)$-го порядка):

$$(1+x^2)f^{(n)} + 2(n-2)xf^{(n-1)} + (n-2)(n-3)f^{(n-2)} +$$
$$+ 2xf^{(n-1)} + 2(n-2)f^{(n-2)} \equiv 0,$$

откуда при $x = 0$ находим

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

При n четном имеем

$$f^{(2k)}(0) = 0.$$

При $n = 2k+1$ получаем

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)! \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

в) Применяя тот же прием, что и при решении б), приходим к тождеству

$$(1-x^2)f'' - xf' \equiv 0,$$

дифференцируя которое $(n-2)$ раза с использованием формулы Лейбница, имеем

$$(1-x^2)f^{(n)} + C_{n-2}^1(-2x)f^{(n-1)} - (n-2)(n-3)f^{(n-2)} -$$
$$- xf^{(n-1)} - C_{n-2}^1 f^{(n-2)} \equiv 0,$$

откуда при $x = 0$ получаем

$$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0).$$

Полагая последовательно $n = 2, 3, \ldots$ и принимая во внимание, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, находим

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

130. а) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; б) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

Решение. Дифференцируя $f(x)$ и возводя обе части найденного в квадрат, затем дифференцируя полученное еще раз, для случаев а) и б) одновременно находим

$$(1-x^2)f'' - xf' + m^2 f \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $(n-2)$ раза с помощью формулы Лейбница, получим

$$(1-x^2)f^{(n)} - 2x(n-2)f^{(n-1)} - (n-2)(n-3)f^{(n-2)} - xf^{(n-1)} -$$
$$-(n-2)f^{(n-2)} + m^2 f^{(n-2)} \equiv 0,$$

откуда при $x = 0$ следует

$$f^{(n)}(0) = [(n-2)^2 - m^2]\, f^{(n-2)}(0).$$

а) $f(0) = 1, \quad f'(0) = 0;$

$$f^{(2k)}(0) = [(2k-2)^2 - m^2]\, f^{(2k-2)}(0); \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0,$$

или, окончательно

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \ldots [m^2 - (2k-2)^2].$$

б) $f(0) = 0; \quad f'(0) = m; \quad f^{(2k)}(0) = 0;$

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k m (m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2) \ldots [m^2 - (2k-1)^2]$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

131. а) $y = (\operatorname{arctg} x)^2$; б) $y = (\arcsin x)^2$.

Решение. При вычислении производной n-го порядка от функции $y = f^2(x)$ с помощью формулы Лейбница получим

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} f^{(n-k)}. \tag{1}$$

При n четном в сумме (1) на четных местах будут стоять произведения производных нечетного порядка от функции $f(x)$, а на нечетных местах — произведения производных этой функции четных порядков. Если же n — нечетное, то в формуле (1) каждый член суммы содержит произведение производной четного порядка функции $f(x)$ на производную нечетного порядка этой функции.

При решении примера 129 показано, что производные четного порядка функций $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$ в точке $x = 0$ равны нулю, а их производные нечетного порядка в этой точке отличны от нуля. На основании проведенного анализа формулы (1) приходим к выводу, что

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} (\operatorname{arctg} x)^2 \bigg|_{x=0} = 0, \qquad \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} (\arcsin x)^2 \bigg|_{x=0} = 0.$$

Пусть $n = 2m$, $f^2(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$. На основании вышеизложенного и результатов, полученных при решении примера 129 найдем

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (\operatorname{arctg} x)^2 \big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (\operatorname{arctg} x)^{(k)} (\operatorname{arctg} x)^{(2m-k)} \big|_{x=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2m}^{2j+1} (\operatorname{arctg} x)^{(2j+1)} (\operatorname{arctg} x)^{(2m-2j-1)} \big|_{x=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2m}^{2j+1} (-1)^j (2j)!\, (-1)^{m-j-1} [2(m-j-1)]! =$$
$$= (-1)^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{2m(2m-1)\ldots(2m-2j)}{(2j+1)!} (2j)!\, [2(m-j-1)]! =$$

$$= (-1)^{m-1}(2m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2m-2j-1}+\frac{1}{2j+1}\right) =$$

$$= (-1)^{m-1}(2m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{2}{2j+1}.$$

Символ подстановки $|_{x=0}$, которым мы воспользовались, означает, что значение соответствующей функции берем в точке $x = 0$. При вычислении производной $2m$-го порядка от функции $f^2(x) = \arcsin^2 x$ можно также воспользоваться формулой (1) и результатом решения примера 129. Тогда получим

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(\arcsin x)^2\Big|_{x=0} = \sum_{j=0}^{m-1} C_{2m}^{2j+1}(\arcsin x)^{(2j+1)}(\arcsin x)^{(2m-2j-1)}\Big|_{x=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} C_{2m}^{2j+1}[(2j-1)!!]^2\cdot[(2m-2j-3)!!]^2.$$

Результат можно получить в более компактной форме. Для этого поступаем следующим образом. Обозначим $y = (\arcsin x)^2$. Тогда $\arcsin x = \pm\sqrt{y}$. Дифференцируя левую и правую части этого равенства по x, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'.$$

Возводя обе части полученного равенства в квадрат, находим

$$(y')^2(1-x^2) = 4y.$$

Дифференцируя последнее равенство и сокращая левую и правую части полученного на $2y' \neq 0$, приходим к тождеству, справедливому при $|x| < 1$:

$$y''(1-x^2) - xy' = 2,$$

дифференцируя которое $n-2$ раза, получим по формуле Лейбница:

$$y^{(n)}(1-x^2) - 2x(n-2)y^{(n-1)} - (n-2)(n-3)y^{(n-2)} -$$

$$- xy^{(n-1)} - (n-2)y^{(n-2)} \equiv 0.$$

Полагая в последней формуле $x = 0$, находим

$$y^{(n)}(0) = (n-2)^2 y^{(n-2)}(0) \qquad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots).$$

Принимая во внимание, что $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$, окончательно получим

$$y^{(2m)}(0) = 2\cdot 2^2\cdot 4^2\ \ldots\ (2m-2)^2 = 2^{2m-1}[(m-1)!]^2$$

$$(m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Сравнивая этот результат с полученным ранее, убеждаемся в справедливости тождества

$$\sum_{j=0}^{m-1} C_{2m}^{2j+1}[(2j-1)!!]^2[(2m-2j-3)!!]^2 = 2^{2m-1}[(m-1)!]^2$$

$$(m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

132. Найти $f^{(n)}(a)$, если $f(x) = (x - a)^n \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n - 1)$-го порядка в окрестности точки $x = a$.

Решение. Производную $(n - 1)$-го порядка функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, вычисленную по формуле Лейбница, можно, очевидно, записать в виде

$$f^{(n-1)}(x) = n!\,(x-a)\,\varphi(x) + o[(x-a)].$$

При $x = a$ имеем $f^{(n-1)}(a) = 0$. По определению производная n-го порядка функции $f(x)$ в точке $x = a$ равна пределу

$$f^{(n)}(a) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+\Delta x) - f^{(n-1)}(a)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{n!\,\Delta x\varphi(a+\Delta x) + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(n!\,\varphi(a+\Delta x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = n!\,\varphi(a)$$

(в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке $x = a$).

133. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

(n — натуральное число), в точке $x = 0$ имеет производные до n-го порядка включительно и не имеет производной $(n + 1)$-го порядка.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$, то $f'(0) = 0$. Вычислим с помощью формулы Лейбница $(n - 1)$-ю производную функции $f(x)$ при $x \neq 0$:

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (x^{2n})^{(n-k-1)}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\, 2n(2n-1)\,\ldots\,(n+k+2)\,x^{n+k+1}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)}.$$

Производная $(n - 1)$-го порядка функции $\sin\dfrac{1}{x}$ содержит член вида $\dfrac{1}{x^{2n-2}}\sin\dfrac{1}{x}$ или $\dfrac{1}{x^{2n-2}}\cos\dfrac{1}{x}$ (в зависимости от того, четное или нечетное n). Таким образом, можно записать

$$f^{(n-1)}(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} + \alpha_1(x), & \text{если } n \text{ нечетное}; \\ x^2\cos\dfrac{1}{x} + \alpha_2(x), & \text{если } n \text{ четное}, \end{cases}$$

где $\alpha_j(x)$ $(j = 1,\ 2)$ — такие функции, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha_j(x)}{x^2} = 0$.

Мы показали ранее, что производная функции $f(x)$ при $x = 0$ существует и равна нулю. Предположим, что производная функции $(n - 1)$-го порядка при $x = 0$ существует и равна нулю. Тогда

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x} + \frac{\alpha_1}{x}\right) = 0 & \text{при } n \text{ нечетном;} \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} + \frac{\alpha_2}{x}\right) = 0 & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

С помощью метода математической индукции мы показали, что $f^{(n)}(0) = 0$. Покажем теперь, что $f(x)$ не имеет производной $(n + 1)$-го порядка при $x = 0$. При $x \neq 0$ имеем

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \alpha_1'(x), & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} + \alpha_2'(x), & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

причем $\alpha_j'(x) \to 0$ при $x \to 0$, а отношения $\frac{\alpha_j'(x)}{x}$ при $x \to 0$ предела не имеют. Таким образом, выражение

$$\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \begin{cases} 2\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \frac{\alpha_1'(x)}{x}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ 2\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} + \frac{\alpha_2'(x)}{x}, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

при $x \to 0$ предела не имеет, следовательно, $f(x)$ не имеет производной $(n + 1)$-го порядка при $x = 0$.

Примечание. Из представления функции $f^{(n)}(x)$ видно, что она разрывна при $x = 0$.

134. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x = 0$.

Построить график этой функции.

Доказательство. Последовательно дифференцируя $f(x)$ при $x \neq 0$, имеем

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) =$$

$$= Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен $3n$-й степени по степеням $\frac{1}{x}$. Применяя правило Лопиталя, получим при любом натуральном m:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^{\frac{m}{2}}}{e^z}=0. \qquad (1)$$

В частности, имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$. Таким образом, функция $f(x)$ имеем производную при $x=0$, причем $f'(0)=0$.

Допустим, что $(n-1)$-я производная функции $f(x)$ при $x=0$ существует и $f^{(n-1)}(0)=0$. Тогда по определению производной n-го порядка

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}Q_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

на основании (1).

С помощью метода математической индукции мы показали, что $f(x)$ имеет при $x=0$ производную n-го порядка, где n — любое целое положительное число. Таким образом, $f(x)$ бесконечно дифференцируема при $x=0$.

Эскиз графика функции $f(x)$ дан на рис. 14.

135. Доказать, что многочлены Чебышева

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

Доказательство. Последовательно дифференцируя функцию $T_m(x)$ два раза, находим

$$T_m'(x)=\frac{m}{2^{m-1}}\frac{\sin(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}};\quad T_m''(x)=-\frac{m^2\cos(m\arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)}+$$

$$+\frac{xm\sin(m\arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{m^2}{1-x^2}T_m(x)+\frac{xT_m'(x)}{1-x^2}.$$

Подставляя найденные значения производных в левую часть исходного дифференциального уравнения, получим

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=$$
$$=-m^2T_m(x)+xT_m'(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0,$$

что и требовалось доказать.

136. Доказать, что многочлены Лежандра

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)} \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$(x^2-1)u'=2mxu, \text{ где } u=(x^2-1)^m,$$

и продифференцируем его $(m+1)$ раз. Имеем

$$(x^2-1)u^{(m+2)}+2(m+1)xu^{(m+1)}+(m+1)mu^{(m)}=$$
$$=2mxu^{(m+1)}+2m(m+1)u^{(m)},$$

откуда

$$(1-x^2)u^{(m+2)}-2xu^{(m+1)}+m(m+1)u^{(m)}=0.$$

Подставляя в последнее тождество значения

$$u^{(m+2)}=2^m m!\,P_m''(x);\quad u^{(m+1)}=2^m m!\,P_m'(x);\quad u^{(m)}=2^m m!\,P_m(x),$$

убеждаемся в том, что многочлены Лежандра удовлетворяют исходному уравнению.

137. Многочлены Чебышева — Лагерра определяются формулой

$$L_m(x)=e^x(x^m e^{-x})^{(m)}\qquad (m=0,\ 1,2,\ldots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$. Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=0.$$

Доказательство. Явное выражение для многочлена $L_m(x)$ находим, применив формулу Лейбница m-кратного дифференцирования функции $x^m e^{-x}$:

$$L_m(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}.$$

Дифференцируя $(m+1)$ раз очевидное тождество $xu'+(x-m)u=0$, где $u=x^m e^{-x}$, получим

$$xu^{(m+2)}+(x+1)u^{(m+1)}+(m+1)u^{(m)}=0. \qquad (1)$$

Поскольку $u^{(m)}=e^{-x}L_m(x)$, то

$$u^{(m+1)}=e^{-x}(L_m'(x)-L_m(x)),\quad u^{(m+2)}=e^{-x}(L_m''(x)-2L_m'(x)+L_m(x)).$$

Подставив найденные $u^{(m)}$, $u^{(m+1)}$ и $u^{(m+2)}$ в (1) после сокращения на e^{-x}, получим

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=0.$$

138. Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — n-кратно дифференцируемые функции. Доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_{kn}(x)f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_{kn}(x)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ не зависят от функции $f(u)$.

Доказательство. Дифференцируя сложную функцию $y = f(u)$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\, u'(x) = A_{11}(x)\, f'(u), \text{ где } A_{11}(x) = u'(x).$$

Предположим, что для производной $(n-1)$-го порядка функции y справедлива формула

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} A_{k\,n-1}(x)\, f^{(k)}(u),$$

где $A_{k\,n-1}(x)$ — функции, не зависящие от $f(u)$. Дифференцируя это равенство, находим

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(A'_{k\,n-1}(x)\, f^{(k)}(u) + A_{k\,n-1}(x)\, f^{(k+1)}(u)\, u'(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{kn}(x)\, f^{(k)}(u),$$

где $A_{1n}(x) = A'_{1\,n-1}(x)$; $A_{kn}(x) = A'_{k\,n-1}(x) + u' A_{k-1\,n-1}(x)$ $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$; $A_{nn}(x) = A_{n-1\,n-1}(x)\, u'$. Формула доказана с помощью метода математической индукции.

139. Доказать, что для n-й производной сложной функции $y = f(x^2)$ справедлива формула

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \cdots$$

Доказательство. Формула доказывается с помощью метода математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2).$$

Предполагая формулу справедливой для натурального n, получим, продифференцировав ее по x:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = (2x)^{n+1} f^{(n+1)}(x^2) + \frac{(n+1)n}{1!}(2x)^{n-1} f^{(n)}(x^2) +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!}(2x)^{n-3} f^{(n-1)}(x^2) + \cdots$$

140. Многочлены Чебышева — Эрмита определяются формулой

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найти явное выражение многочленов $H_m(x)$. Доказать, что $H_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Доказательство. Пользуясь формулой примера 139, получим

$$(e^{-x^2})^{(m)} = e^{-x^2}(-1)^m\left[(2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4} - \cdots\right],$$

откуда

$$H_m(x) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4} + \cdots .$$

Дифференцируя $m+1$ раз тождество $u' + 2xu \equiv 0$, где $u = e^{-x^2}$, имеем

$$u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)} \equiv 0.$$

Принимая во внимание равенства

$$u^{(m)} = (-1)^m e^{-x^2} H_m(x), \quad u^{(m+1)} = (-1)^m e^{-x^2}(H_m'(x) - 2xH_m(x)),$$
$$u^{(m+2)} = (-1)^m e^{-x^2}(H_m''(x) - 4xH_m'(x) + (4x^2-2)H_m(x))$$

и подставляя $u^{(m)}$, $u^{(m+1)}$, $u^{(m+2)}$ в последнее тождество, получим

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2_m H_m(x) = 0,$$

что и требовалось доказать.

141. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \qquad (x > 0).$$

Доказательство. Применив формулу Лейбница n-кратного дифференцирования произведения двух функций, получим

$$\frac{d^n(x^n \ln x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)} = (x^n)^{(n)}\ln x +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x^n)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)} = n!\ln x +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^k n(n-1)\ldots(k+1)x^k(k-1)!\frac{(-1)^{k-1}}{x^k} =$$
$$= n!\ln x + \sum_{k=1}^{n} n!\, C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Покажем, применив метод математической индукции, что справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \qquad (1)$$

При $n = 1$ оно очевидно. Считая, что равенство (1) выполняется, докажем справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{n+1}^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Прибавив к левой и правой частям равенства (1) по $\frac{1}{n+1}$, получим

$$\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \tag{3}$$

Остается лишь доказать, что справедливо тождество

$$\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k \equiv \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_{n+1}^k. \tag{4}$$

Тождество (4), если оно справедливо, эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{n+1} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (C_{n+1}^k - C_n^k) + \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{5}$$

Поскольку $C_{n+1}^k - C_n^k = \frac{k}{n+1} C_{n+1}^k$, то (5) можно записать в виде

$$\frac{1}{n+1} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1} C_{n+1}^k + \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_{n+1}^k. \tag{6}$$

Тождество (6) будет выполняться, если

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_{n+1}^k = 1.$$

Для доказательства последнего рассмотрим разложение по формуле бинома Ньютона

$$(1-x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k x^k.$$

Положив в нем $x = 1$, получим $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k = 0$, откуда следует, что $1 - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} C_{n+1}^k = 0$. Этим доказательство завершается.

142. Доказать формулу

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x],$$

где

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

и $$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Доказательство. Применяя формулу Лейбница, получаем

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(2n)} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(2n-k)} (\sin x)^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{x^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k (2n-k)!\, x^k \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} \left[\sin x \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \cos\frac{k\pi}{2} + \cos x \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \sin\frac{k\pi}{2}\right].$$

Вводя обозначения

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \cos\frac{k\pi}{2}, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \sin\frac{k\pi}{2}.$$

имеем

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

что и требовалось доказать.

143. Пусть $\frac{d}{dx} = D$ обозначает операцию дифференцирования и $f(D) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^k$ — символический дифференциальный многочлен, где $P_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — некоторые непрерывные функции от x.

Доказать, что

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda)\, u(x),$$

где λ — постоянное.

Доказательство. Исходя из определения многочлена $f(D)$, имеем

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) D^k \{e^{\lambda x} u(x)\}.$$

Поскольку $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$, то применив формулу Лейбница, получим

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \sum_{j=0}^{k} C_k^j (e^{\lambda x})^{(k)} u^{(k-j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^k e^{\lambda x} u^{(k-j)} = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^k u^{(k-j)} =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)^k u = e^{\lambda x} f(D+\lambda)\, u(x),$$

что и требовалось доказать.

144. Доказать, что если в уравнении $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)}_{x^k} = 0$ положить $x = e^t$, где t — независимая переменная, то это уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1) \ldots (D-k+1)\, y = 0,$$

где $D = \frac{d}{dt}$.

Доказательство проводим по методу математической индукции. Выражаем y'_x через y'_t. Имеем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = e^{-t} y'_t = e^{-t} Dy;$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx}(e^{-t}Dy) = e^{-t}D(e^{-t}Dy) = e^{-2t}(D^2 - D)\,y = e^{-2t}D(D-1)\,y.$$

Пусть

$$y^{(k)}_{x^k} = e^{-kt}D(D-1) \ldots (D-k+1)\,y. \tag{1}$$

Докажем, что

$$y^{(k+1)}_{x^{k+1}} = e^{-(k+1)t}D(D-1) \ldots (D-k)\,y.$$

Дифференцируя (1) по x, получаем

$$y^{(k+1)}_{x^{k+1}} = \frac{d}{dx}[e^{-kt}D(D-1) \ldots (D-k+1)]\,y =$$

$$= e^{-t}\frac{d}{dt}[e^{-kt}D(D-1) \ldots (D-k+1)]\,y =$$

$$= e^{-t}\{[-ke^{-kt}D(D-1) \ldots (D-k+1)\,y] + [e^{-kt}D^2(D-1) \ldots$$

$$\ldots (D-k+1)]\,y\} = e^{-(k+1)t}D(D-1) \ldots (D-k+1)(D-k)\,y,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

1°. Теорема Ролля. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента. Пусть, кроме того, $f(a) = f(b)$. Тогда внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, такая, что значение производной в этой точке $f'(\xi)$ равно нулю.*

2°. Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную во внутренних точках этого сегмента, то внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, такая, что справедлива формула*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

С л е д с т в и е и з т е о р е м ы Л а г р а н ж а. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $[a, b]$ и если всюду на этом интервале $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ является постоянной на интервале $[a, b]$.

3°. Т е о р е м а К о ш и. *Если каждая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную во всех внутренних точках этого сегмента и если, кроме того, производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду внутри сегмента $[a, b]$, то внутри этого сегмента найдется такая точка ξ, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq g(b)$, то условие $g'(x) \neq 0$ можно заменить более слабым: $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 \neq 0$ при $x \in (a, b)$.

145. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Р е ш е н и е. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[1, 3]$ и обращается в нуль в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$ этого отрезка. Следовательно, на отрезках $[1, 2]$ и $[2, 3]$ для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Существует по меньшей мере две точки интервала $(1, 3)$, в которых $f'(x) = 0$. Дифференцируя функцию $f(x)$ и приравнивая к нулю ее производную, получаем квадратное уравнение

$$3x^2 - 12x + 11 = 0,$$

решая которое, находим упомянутые точки: $c_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Очевидно, $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$.

146. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

Р е ш е н и е. Противоречия с теоремой Ролля нет, так как не выполнено одно из требований этой теоремы: функция $f(x)$ не имеет производной при $x = 0$. В самом деле,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = +\infty, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -\infty.$$

147. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доказать, что $f'(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть интервал (a, b) конечен и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = c$, $c = \text{const}$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (a, b); \\ c & \text{при } x = a \text{ и } x = b. \end{cases}$$

Она непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную производную на интервале (a, b), причем $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля на интервале (a, b) найдется такая точка c, что $F'(c) = f'(c) = 0$.

В случае, когда интервал (a, b) бесконечный, в силу существования конечной производной функции $f(x)$, непрерывности функции $f(x)$ и существования конечных, равных между собой, ее предельных значений при $x \to a+0$ и $x \to b-0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ прямая $y = c + \varepsilon$ (если $c \geqslant 0$) или прямая $y = c - \varepsilon$, (если $c \leqslant 0$) пересечет кривую $y = f(x)$ по меньшей мере в двух точках, которые обозначим c_1 и c_2. Для функции $f(x)$ на отрезке $[c_1, c_2]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому на интервале (c_1, c_2) (а значит, и на интервале (a, b)) найдется такая точка c, что $f'(c) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Тогда как в случае конечного, так и бесконечного интервала (a, b), уравнение $f(x) = A$ (где $A > 0$ — любое, фиксированное, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$) или уравнение $f(x) = -A$ (в случае, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = -\infty$) всегда имеет два равных корня, которые обозначим α_1 и α_2. Применяя теорему Ролля к функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, приходим к выводу, что на интервале (α_1, α_2) (а значит, и на (a, b)) существует по меньшей мере одна такая точка c, что $f'(c) = 0$.

148. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале (x_0, x_n); 3) выполнены равенства $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$. Доказать, что в интервале (x_0, x_n) существуют по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Доказательство. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выполнены все условия теоремы Ролля для функции $f(x)$, следовательно, существует по меньшей мере n точек $\xi_j \in (x_0, x_n)$ таких, что $f'(\xi_j) = 0$. Для функции $f'(x)$ на каждом из отрезков $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует по меньшей мере $n-1$ точка $\eta_k \in (x_0, x_n)$ такая, что $f''(\eta_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Продолжая рассуждать таким же образом, приходим к выводу, что по меньшей мере в $n - (n-2) = 2$ точках интервала (x_0, x_n) $f^{(n-1)}(\zeta_i) = 0$ $(i = 1, 2)$. Применяя теорему Ролля к функции $f^{(n-1)}(x)$ на отрезке $[\zeta_1, \zeta_2]$, получаем, что существует по меньшей мере одна точка $\xi \in (x_0, x_n)$ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

149. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(p+q)$-го порядка $f^{(p+q)}(x)$ на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет производную $(p+q+1)$-го порядка $f^{(p+q+1)}(x)$ в интервале (a, b); 3) выполнены равенства

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0;$$

$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Доказать, что в таком случае $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

Доказательство. Предположим для определенности, что $p < q$. Функция $f(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$, следовательно, существует по меньшей мере одна точка $\xi_1 \in (a, b)$, такая, что $f'(\xi_1) = 0$. Поскольку $f'(x) = 0$ также при $x = a$ и $x = b$, мы можем применить теорему Ролля к функции $f'(x)$ на сегментах $[a, \xi_1]$ и $[\xi_1, b]$: существуют по меньшей мере две точки $\xi_2 \in (a, \xi_1)$, $\xi_3 \in (\xi_1, b)$ такие, что $f''(\xi_j) = 0$ $(j = 2, 3)$. Но, кроме того, $f''(a) = f''(b) = 0$, поэтому функция $f''(x)$ обращается в нуль не менее чем в четырех точках сегмента $[a, b]$. Продолжая те же рассуждения, убеждаемся в том, что по меньшей мере в $p + 2$ точках сегмента $[a, b]$ функция $f^{(p+1)}(x)$ обращается в нуль. Эти точки являются концами $(p + 1)$-го отрезка, на каждом из которых выполняются все условия теоремы Ролля для функции $f^{(p)}(x)$, следовательно, по меньшей мере в $p + 1$ точке интервала (a, b) функция $f^{(p+1)}(x)$ обращается в нуль. Кроме того, $f^{(p+1)}(b) = 0$, поэтому по меньшей мере в $p + 2$ точках сегмента $[a, b]$ функция $f^{(p+1)}(x)$ обращается в нуль. Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что функция $f^{(q)}(x)$ обращается в нуль по меньшей мере в $p + 2$ точках сегмента $[a, b]$. Эти точки являются концами $p + 1$ отрезка, на каждом из которых выполнены все условия теоремы Ролля для функции $f^{(q)}(x)$, поэтому функция $f^{(q+1)}(x)$ обращается в нуль по меньшей мере в $p + 1$ точке интервала (a, b). Поскольку для функции $f^{(q+1)}(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля на p отрезках, принадлежащих интервалу (a, b), то функция $f^{(q+2)}(x)$ обращается в нуль не менее чем в p точках этого интервала. Продолжая эти рассуждения, убеждаемся в том, что функция $f^{(q+j)}(x)$ $(j = 3, 4, \ldots, p)$ обращается в нуль по меньшей мере в $[p - (j - 2)] = x$ точках интервала (a, b). Таким образом, функция $f^{(p+q)}(x)$ обращается в нуль по меньшей мере в $p - (p - 2) = 2$ точках интервала (a, b). Обозначим их η_1 и η_2. Применяя теорему Ролля к функции $f^{(p+q)}(x)$ на отрезке $[\eta_1, \eta_2]$ получаем: на интервале (η_1, η_2) (а значит и на интервале (a, b)) найдется точка ξ такая, что $f^{(p+q+1)}(\xi) = 0$.

150. Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вещественны, то его последовательные производные $P'_n, P''_n, \ldots, P_n^{(n-1)}$ также имеют лишь вещественные корни.

Доказательство. Предполагая, что все корни различные, по теореме Ролля получаем, что $P'_n(x)$ имеет $n - 1$ вещественный корень; $P''_n(x)$ будет иметь уже $n - 2$ вещественных корня и т. д. Но так как при дифференцировании многочлена степень многочлена уменьшается на единицу, то получается, что все корни производных будут вещественны. Если какой-то корень многочлена кратный, то он же будет корнем и для производной от многочлена, т. е. также действительным.

151. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

все корни вещественны и заключены в интервале $(-1, 1)$.

Доказательство. Многочлен $U_n(x) = (x^2 - 1)^n$ имеет на сегменте $[-1, 1]$ $2n$ вещественных корней: $x_1 = x_2 = \dots x_n = -1$; $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots x_{2n} = 1$. Согласно предыдущей теореме многочлен $P_n(x)$ имеет n вещественных корней, расположенных по теореме Ролля в интервале $(-1, 1)$, что и требовалось доказать.

152. Доказать, что у многочлена Чебышева — Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

все корни положительны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^n e^{-x}$. Поскольку $\varphi(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, то существует такая точка $\xi_1 \in (0, +\infty)$, что $\varphi'(\xi_1) = 0$ (см. пример 147). Очевидно, $\varphi'(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$, поэтому в силу теоремы Ролля и на основании решения примера 147, найдутся точки $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ и $\xi_3 \in (\xi_1, +\infty)$ такие, что $\varphi''(\xi_i) = 0$ $(i = 2, 3)$. Кроме того, $\varphi''(0) = 0$. Таким образом, $\varphi''(x)$ обращается в нуль в трех точках полуоси $x \geqslant 0$. Так как $\varphi^{(j)}(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi^{(j)}(x) = 0$ при $j = 0, 1, \dots, n-1$, то, применяя теорему Ролля и пользуясь результатом решения примера 147 еще $n - 3$ раза, получим, что функция $\varphi^{(n-1)}(x)$ обращается в нуль в $n + 1$ точках, лежащих на полуоси $x \geqslant 0$, причем одна из этих точек — $x = 0$. Эти точки являются концами n отрезков, на каждом из которых к функции $\varphi^{(n-1)}(x)$ применима теорема Ролля, поэтому существует по меньшей мере n таких точек $\eta_k > 0$, что $\varphi^{(n)}(\eta_k) = 0$. Очевидно, $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$. Поскольку $L_n(x) = e^x \varphi^{(n)}(x)$ есть многочлен n-й степени, имеющий n корней, то его корни-точки η_k, причем $\eta_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

153. Доказать, что у многочлена Чебышева — Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

все корни действительны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x) = e^{-x^2}$. Очевидно, $\lim\limits_{x \to \infty} u^{(j)}(x) = 0$ $(j = 0, 1, \dots, n)$, поэтому функции $u^{(j)}(x)$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ удовлетворяют условиям примера 147 на интервале $(-\infty, +\infty)$. Повторяя рассуждения, проводившиеся при решении предыдущего примера, приходим к выводу, что $u'(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке этого интервала; $u''(x)$ — в двух точках; ...; $u^{(n)}(x)$ — в n точках. Так как $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} u^{(n)}(x)$

есть многочлен n-й степени, имеющий ровно n корней, то его корни совпадают с корнями функции $u^{(n)}(x)$ и все эти корни вещественны.

154. Найти функцию $\theta = \theta(x, \Delta x)$ такую, что $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x)$ $(0 < \theta < 1)$, если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = e^x$.

Решение. Применяя формулу конечных приращений Лагранжа к каждой из функций а) — г), имеем:

а) $a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) = \Delta x[2a(x + \theta\Delta x) + b]$,

откуда $\theta = \frac{1}{2}$.

б) $(x+\Delta x)^3 - x^3 = 3\Delta x(x+\theta\Delta x)^2$,

откуда $\theta = \dfrac{-x + \sqrt{x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2 + x^2}}{\Delta x}$ $(x > 0,\ \Delta x > 0)$.

в) $\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^2}$,

откуда $\theta = \dfrac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1 + \dfrac{\Delta x}{x}} - 1\right)$ $(x(x+\Delta x) > 0)$

г) $e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta\Delta x}$,

откуда $\theta = \dfrac{1}{\Delta x} \ln \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

155. Доказать, что если $x \geqslant 0$, то

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

где $\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) < \frac{1}{2}$,

причем $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \frac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. По формуле конечных приращений имеем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \qquad (x \geqslant 0)$$

(здесь $\Delta x = 1$). Из полученного равенства находим $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x(x+1)} - x\right),$$

откуда $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \frac{1}{4}$. Записав $\theta(x)$ в виде $\theta(x) = \frac{1}{4} + \dfrac{x}{2(\sqrt{x(x+1)} + x)}$, получим $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$. При $x > 0$ можем записать $\theta(x)$ в виде $\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$, откуда следует, что $\theta(x)$ монотонно возрастает на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому $\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) < \frac{1}{2}$.

156. Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество:

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x). \qquad (1)$$

Доказать, что

$$f(x) = ax + b,$$

где a и b — постоянные.

Доказательство. Полагая в (1) $x = 0$, получим тождество

$$f(h) \equiv hf'(0) + f(0),$$

справедливое при всех $h \in (-\infty, +\infty)$, следовательно, обозначая $h = x$, $f'(0) = a$, $f(0) = b$, получим

$$f(x) \equiv ax + b,$$

что и требовалось доказать.

157. Пусть $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right). \qquad (1)$$

Доказать, что

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c — постоянные.

Доказательство. Дифференцируя (1) по h, получим тождество

$$f'(x+h) \equiv \frac{h}{2} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) + f'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

полагая в котором $x = -\frac{h}{2}$, имеем

$$f'\left(\frac{h}{2}\right) \equiv \frac{h}{2} f''(0) + f'(0). \qquad (2)$$

Полагая в тождестве (1) $x = 0$, получаем тождество

$$f(h) \equiv hf'\left(\frac{h}{2}\right) + f'(0),$$

подставив в которое значение $f'\left(\frac{h}{2}\right)$, найденное из (2), приходим к тождеству

$$f(h) \equiv h^2 \frac{f''(0)}{2} + hf'(0) + f(0), \quad -\infty < h < +\infty.$$

Обозначая $h = x$, $\frac{f''(0)}{2} = a$, $f'(0) = b$, $f(0) = c$, окончательно получим представление функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

158. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции $f(x)$ на сегменте $[0, 2]$.

Решение. Исследуем функцию $f(x)$ на дифференцируемость в точке $x = 1$. По определению односторонних производных имеем

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{3-(1+\Delta x)^2}{2} - 1\right) = -1;$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{1+\Delta x} - 1\right) = -1.$$

Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0, 2]$. Применяя формулу конечных приращений к функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2]$, находим

$$f(2) - f(0) = 2f'(c); \quad 0 < c < 2.$$

Поскольку $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$,

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{при } 1 < x < 2, \end{cases}$$

то

$$-1 = \begin{cases} -2c & \text{при } 0 < c \leqslant 1; \\ -\dfrac{2}{c^2} & \text{при } 1 < c < 2, \end{cases}$$

откуда

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \sqrt{2}.$$

159. Пусть $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, где $0 < \xi(x) < x$. Доказать, что если $f(x) = x \sin(\ln x)$ при $x > 0$ и $f(0) = 0$, то функция $\xi = \xi(x)$ разрывна в любом как угодно малом интервале $(0, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное и x — любое число из интервала $(0, \varepsilon)$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на сегменте $[0, x]$, получим

$$x \sin \ln x = x(\sin \ln \xi(x) + \cos \ln \xi(x)),$$

откуда

$$\sin \ln x = \sqrt{2} \cos\left(\ln \xi(x) - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1)$$

Возьмем произвольное $x_0 \in (0, x)$, а Δx выберем так, чтобы $x_0 + \Delta x \in (0, x)$. Подставляя эти значения в равенство (1), получим

$$\sin \ln x_0 = \sqrt{2} \cos\left(\ln \xi(x_0) - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sin \ln (x_0 + \Delta x) = \sqrt{2} \cos\left(\ln \xi(x_0 + \Delta x) - \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда

$$\ln \xi (x_0) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \arccos \frac{\sin \ln x_0}{\sqrt{2}} \qquad (k = 0, -1, -2, \ldots);$$

$$\ln \xi (x_0 + \Delta x) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \pm \arccos \frac{\sin \ln (x_0 + \Delta x)}{\sqrt{2}}$$

$$(n = 0, -1, -2, \ldots).$$

Из этих равенств получаем

$$\ln \xi (x_0 + \Delta x) - \ln \xi (x_0) = 2\pi (n - k) \pm$$

$$\pm \left[\arccos \frac{\sin \ln (x_0 + \Delta x)}{\sqrt{2}} - \arccos \frac{\sin \ln \xi (x_0)}{\sqrt{2}}\right].$$

Оценивая эту разность по абсолютной величине, получим неравенство $|\ln \xi (x_0 + \Delta x) - \ln \xi (x_0)| \geqslant 2\pi |n - k| - \pi \geqslant \pi$, справедливое при любом как угодно малом Δx, если $|n - k| \geqslant 1$. Из этого неравенства вытекает, что функция $\xi (x)$ разрывна на интервале $(0, \varepsilon)$. Заметим, что в каждой из областей, определяемых неравенствами

$$0 < x < \varepsilon, \quad e^{n\pi} < \xi < e^{\frac{n}{4} + n\pi} \qquad (n = 0, -1, -2, \ldots)$$

или неравенствами

$$0 < x < \varepsilon, \quad e^{\frac{\pi}{4} + n\pi} < \xi < e^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \qquad (n = 0, -1, -2, \ldots),$$

существует единственная непрерывная функция $\xi = \xi (x)$, участвующая в равенстве (1). Ее можно найти из равенства (1):

$$\xi (x) = e^{\frac{\pi}{4} + 2n\pi - \arccos \frac{\sin \ln x}{\sqrt{2}}}; \quad \xi (x) = e^{\frac{\pi}{4} + 2n\pi + \arccos \frac{\sin \ln x}{\sqrt{2}}}$$

$$(n = 0, -1, -2, \ldots).$$

160. Пусть функция $f (x)$ имеет непрерывную производную $f' (x)$ в интервале (a, b). Можно ли для всякой точки ξ из (a, b) указать такие две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала, что $\frac{f (x_2) - f (x_1)}{x_2 - x_1} = f' (\xi) \ (x_1 < \xi < x_2)$?

Решение. Если на интервале (a, b) $f' (x) \geqslant 0$ и $f (x)$ отлична от постоянной на любом отрезке, являющимся частью (a, b), то $f (x)$ возрастает на (a, b). Тогда для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, $(x_2 > x_1)$ имеем

$$\frac{f (x_2) - f (x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

и для тех точек интервала, в которых $f' (x) = 0$, равенство

$$\frac{f (x_2) - f (x_1)}{x_2 - x_1} = f' (\xi) = 0$$

невозможно. Например, для функции $f (x) = x^3 \ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ при любых $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ выполняется неравенство

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0;$$

следовательно, для точки $\xi = 0$ значений аргумента x_1 и x_2, о которых говорилось в условии задачи, не существует. Приведенные рассуждения не исключают, однако, положительного ответа на поставленный вопрос для некоторых классов функций, удовлетворяющих всем условиям теоремы Лагранжа.

161. Доказать неравенства:

а) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;

б) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$, если $0 < y < x$;

в) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|$;

г) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, если $0 < b < a$.

Доказательство. По формуле Лагранжа имеем:

а) $\sin x - \sin y = (x - y)\cos\xi$,

откуда $|\sin x - \sin y| = |\cos\xi|\,|x - y| \leqslant |x - y|$;

б) $x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x - y)$, $\quad y < \xi < x$,

откуда $(x - y)\,py^{p-1} \leqslant x^p - y^p \leqslant (x - y)\,px^{p-1}$;

в) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \dfrac{1}{1+\xi^2}(a - b)$,

откуда $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|$;

г) $\ln a - \ln b = \dfrac{1}{\xi}(a - b)$, $\quad a < \xi < b$,

откуда $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$.

162. Объяснить, почему теорема Коши: а) неправильна для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$; б) правильна для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$. Найти точку ξ в случае б).

Решение. В случае а) нарушено условие теоремы Коши $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 \neq 0$ при всех $x \in [-1, 1]$. В точке $x = 0$ имеем $[f'(0)]^2 + [g'(0)]^2 = 0$.

В случае б) все условия теоремы Коши выполнены: $g(-1) \neq g(1)$; $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 \neq 0$ при $x \in [-1, 1]$. Здесь $\xi = -\dfrac{1}{3}$.

163. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $x_1 \cdot x_2 > 0$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

Решение. Обозначая через $D(x_1, x_2)$ определитель и раскрывая его, получим

$$\frac{D(x_1, x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2} - \dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}}.$$

Обозначим $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$, $\psi(x)=\frac{1}{x}$. Поскольку точка $x=0$ сегменту $[x_1, x_2]$ не принадлежит, то функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют на этом сегменте всем условиям теоремы Коши, поэтому существует такое $\xi\in(x_1, x_2)$, что

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Таким образом,

$$\frac{D(x_1, x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

что и требовалось доказать.

164. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале (a, b), то ее производная $f'(x)$ также не ограничена на интервале (a, b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и не ограничена при $x\to b-0$. Возьмем произвольную последовательность x_n, сходящуюся к b слева. Тогда существует такой номер N, что при $n>N$ выполняется неравенство $|f(x_n)|>A$, каким бы $A>0$ ни было. Фиксируем любое число $m>N$ и рассмотрим при $n>m$ разность $f(x_n)-f(x_m)$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_m, x_n]$, находим

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_m)}{x_n-x_m}\right|=|f'(\xi_{mn})|,$$

где $x_m<\xi_{mn}<x_n$. При достаточно больших n левая часть в силу условия задачи больше любого наперед заданного положительного числа, откуда следует неограниченность производной $f'(x)$ при $x\to b-0$.

Обратное утверждение не правильно: из неограниченности производной в интервале не следует неограниченность функций на этом интервале, например: $y=\sqrt{x}$; $0<x<a$.

165. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

Доказательство. По формуле Лагранжа для всякой пары точек $x_1, x_2\in(a, b)$ имеем

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|\leqslant M|x_2-x_1|$$

(в силу ограниченности производной $|f'(x)|\leqslant M$). Взяв по заданному $\varepsilon>0$ такое $\delta>0$, что $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{M}$, получим при $|x_2-x_1|<\delta$

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon;$$

а это означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

166. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

т. е. $f(x)=o(x)$ при $x\to+\infty$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента такая, что $x_n\to+\infty$. Тогда существует такое N, что при $n>N$ справедливо неравенство

$$|f'(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное, наперед заданное. Фиксируем любое $n_0>N$ и, взяв $n>n_0$, применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на сегменте $[x_{n_0}, x_n]$:

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_{n_0}}\right|=|f'(\xi_n)|, \tag{2}$$

где $x_{n_0}<\xi_n<x_n$.

В силу неравенства (1) из (2) имеем

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_{n_0}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Из (3) получаем неравенства

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n}-\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x_n)}{x_n}<\frac{f(x_{n_0})}{x_n}+\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

При больших n, очевидно, справедливо неравенство

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x_{n_0})}{x_n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

а $\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$ всегда при $n>n_0$, поэтому из неравенства (4) при $n_0>N$ и при достаточно больших $n>n_0$ получим неравенство

$$-\varepsilon<\frac{f(x_n)}{x_n}<\varepsilon, \tag{5}$$

откуда

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|<\varepsilon.$$

Так как $\{x_n\}$ — произвольная бесконечно большая последовательность, все члены которой положительны, то имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0, \text{ т. е. } f(x)=o(x) \text{ при } x\to+\infty.$$

167. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и $f(x)=o(x)$ при $x\to+\infty$, то

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

В частности, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k$, то $k=0$.

Доказательство. Допустим, что

$$\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = A; \quad A \neq 0;$$

тогда существует такое $B > 0$, что при $x > B$ выполняется неравенство

$$|f'(x)| \geqslant A. \qquad (1)$$

Фиксируем $x_0 > B$ и возьмем $x > x_0$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$, получим, принимая во внимание неравенство (1):

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\xi)| \geqslant A, \quad x_0 < \xi < x. \qquad (2)$$

Переходя в неравенстве (2) к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \geqslant A,$$

а это противоречит условию $f(x) = o(x)$. Таким образом, $A = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$.

Допустим теперь, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$. Тогда для произвольной последовательности $x_m > 0$, $(x_m \to +\infty$ при $m \to \infty)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} f'(x_m) = k,$$

т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M$ такое, что при $m > M$ выполняется неравенство

$$k - \varepsilon < f'(x_m) < k + \varepsilon. \qquad (3)$$

Взяв $m_0 > M$ и $m > m_0$, получим, применив теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на сегменте $[x_{m_0}, x_m]$:

$$\frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} = f'(\xi_m), \quad x_{m_0} < \xi_m < x_m.$$

Из неравенства (3) следует неравенство

$$k - \varepsilon < \frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} < k + \varepsilon. \qquad (4)$$

Переходя к пределу в неравенстве (4) при $m \to +\infty$, получим

$$k - \varepsilon \leqslant \lim_{m\to+\infty} \frac{f(x_m)}{x_m} \leqslant k + \varepsilon.$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{f(x_m)}{x_m} = 0$, то получаем $k - \varepsilon \leqslant 0$, $k + \varepsilon \geqslant 0$, откуда в силу произвольности ε следует, что $k = 0$.

168. а) Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале (x_0, X); 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0),$$

то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

б) Показать, что для функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1) \text{ и } f(1) = 0$$

существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$, однако функция $f(x)$ не имеет конечных односторонних производных $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

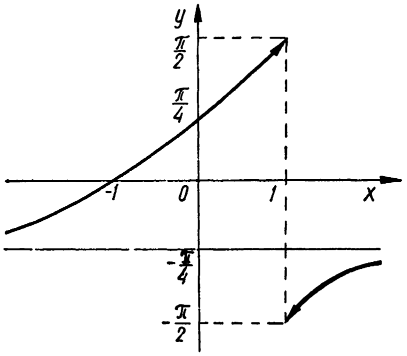

Рис. 80

Доказательство. а) По формуле конечных приращений имеем для функции $f(x)$ на любом сегменте $[x_0, x_1]$, где $x_1 \in (x_0, X)$:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x_0+\theta(x_1-x_0)) \quad (0<\theta<1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x_1 \to x_0$, получим

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x_0+0) = f'_+(x_0),$$

так как по определению

$$f'_+(x_0) = \lim_{x_1\to x_0+0}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x_0}.$$

б) Пусть $x \neq 1$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad \lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Исходя из определения односторонних производных, получим в точке $x = 1$:

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\Delta x}\operatorname{arctg}\frac{2+\Delta x}{-\Delta x} = -\infty;$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\operatorname{arctg}\frac{2+\Delta x}{-\Delta x} = -\infty.$$

Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 80.

169. Доказать тождество

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi\operatorname{sgn} x \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 1.$$

Доказательство. При $|x| > 1$ имеем

$$\left(2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} \equiv 0.$$

Таким образом, при $|x| \geqslant 1$ справедливо тождество

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} C_1 & \text{при} \quad x \geqslant 1; \\ C_2 & \text{при} \quad x \leqslant -1. \end{cases}$$

Полагая $x = 1$, находим $c_1 = \pi$; полагая $x = -1$, получаем $c_2 = -\pi$. Поэтому $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ при $|x| \geqslant 1$.

170. Доказать, что единственная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, имеющая постоянную производную $f'(x) = k$, есть линейная: $f(x) = kx + b$.

Доказательство. Если $f(x) = kx + b$, то $f'(x) = k$. Требуется доказать, что функция $f(x)$ — единственная. Допустим, существует функция $\varphi(x)$, отличная от линейной и такая, что $\varphi'(x) = k$. Образуем функцию $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$. Производная этой функции на всей числовой оси равна нулю, следовательно, согласно следствию из теоремы Лагранжа $\psi(x) = \text{const}$ при $-\infty < x < +\infty$. Таким образом, $\varphi(x) = f(x) + c = kx + b + c$ есть линейная функция. Получили противоречие, источник которого — в предположении, что существуют функции, отличные от линейной и такие, что $\varphi'(x) = k$.

171. Что можно сказать о функции $f(x)$, если $f^{(n)}(x) = 0$?

Решение. На основании следствия из теоремы Лагранжа заключаем, что $f^{(n-1)}(x) = c$, где $c = \text{const}$. Принимая во внимание результат, полученный при решении примера 170, приходим к выводу, что функция $f^{(n-2)}(x)$ — линейная, т. е. многочлен первой степени: $f^{(n-2)}(x) = cx + d$.

Допустим, что функция $f^{(n-k)}(x)$ есть многочлен $(k-1)$-й степени:

$$f^{(n-k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^{k-1-j}. \qquad (1)$$

Покажем, что при таком предположении функция $f^{(n-k-1)}(x)$ есть многочлен k-й степени. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f^{(n-k-1)}(x) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{x^{k-j}}{k-j}.$$

Производная этой функции тождественно равна нулю на всей числовой оси, следовательно, имеем $\varphi(x) = c$, где $c = \text{const}$;

$$f^{(n-k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{x^{k-j}}{k-j} + c = \sum_{j=0}^{k} \tilde{a}_j x^{k-j}.$$

Мы показали с помощью метода математической индукции, что при всех k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ функция $f^{(n-k)}(x)$ есть многочлен $(k-1)$-й степени. Полагая в формуле (1) $k = n$, получим

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{a}_j x^{n-1-j},$$

т. е. функция $f(x)$ есть многочлен $(n-1)$-й степени.

172. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) имеет конечную производную внутри него; 3) не является линейной, то в интервале (a, b) найдется по меньшей мере одна такая точка c, что

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

Доказательство. Разбивая произвольным образом сегмент $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

получим

$$|f(b) - f(a)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

По формуле Лагранжа имеем

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Таким образом, приходим к неравенству

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)|\,\Delta x_i.$$

Функция $f(x)$ отлична от линейной, поэтому существует такое разбиение сегмента $[a, b]$, что среди чисел $|f'(\xi_i)|$ найдется наибольшее, отличное от нуля, которое обозначим $|f'(\xi)|$. Тогда получим неравенство

$$|f(b) - f(a)| < |f'(\xi)| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = (b - a)\,|f'(\xi)|,$$

откуда

$$|f'(\xi)| > \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}, \qquad a < \xi < b.$$

173. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a, b]$ и 2) $f'(a) = f'(b) = 0$, то в интервале (a, b) существует по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

Доказательство. Если $f(x) = \text{const}$, то утверждение очевидно. Предположим, что функция $f(x)$ отлична от постоянной. Из условия $f'(a) = f'(b) = 0$ следует, что $f(x)$ отлична от линейной функции. Применяя формулу Коши конечных приращений к функциям $f(x)$ и $\varphi(x) = \dfrac{(x-a)^2}{2}$ на сегменте $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ и к функциям $f(x)$ и $\psi(x)=\frac{(b-x)^2}{2}$ на сегменте $\left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$, получим:

$$\frac{8\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a},\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2};$$

$$\frac{8\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2},\quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

Складывая полученные равенства, находим

$$\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}.$$

Поскольку $f'(a)=f'(b)=0$, то правую часть последнего равенства можно записать в виде

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}-\frac{f'(b)-f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=f''(\eta_1)-f''(\eta_2),$$

где $a<\eta_1<\xi_1$; $\xi_1<\eta_2<b$.

Оценивая по абсолютной величине, имеем

$$\frac{8|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leqslant|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|.$$

Предположим, что $f(b)\neq f(a)$ (в противном случае доказательство тривиально: точкой c может служить любая точка интервала $(a,\ b)$). В силу нашего предположения, хотя бы одно из чисел $|f''(\eta_1)|$ и $|f''(\eta_2)|$ отлично от нуля. Обозначим

$$|f''(c)|=\max\{|f''(\eta_1)|,\ \ |f''(\eta_2)|\}.$$

Тогда имеем

$$\frac{8|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leqslant 2|f''(c)|,$$

откуда

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

(знак равенства не исключаем, так как возможен случай, когда $|f''(\eta_1)|=|f''(\eta_2)|$).

§ 6. Возрастание и убывание функции. Неравенства

1°. Возрастание и убывание функции. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на сегменте $[a,\ b]$, если $f(x_2)>f(x_1)$ при $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ (или соответственно $f(x_2)<f(x_1)$ при $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$).

2°. Для того чтобы имеющая конечную или бесконечную на промежутке X производную функция $f(x)$ возрастала (убывала) на нем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: а) $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$); б) $f'(x)$ не обращается в нуль ни на каком отрезке $[\alpha,\ \beta]$, составляющем часть промежутка X ($[\alpha,\ \beta]\subset X$).

Определить промежутки возрастания или убывания следующих функций:

174. $y = x + |\sin 2x|$.

Решение. Очевидно,

$$y = \begin{cases} x + \sin 2x \text{ при } k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ x - \sin 2x \text{ при } \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \pi + k\pi; \\ \frac{k\pi}{2} \qquad \text{при } x = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

Дифференцируя y, находим

$$y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x \text{ при } k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ 1 - 2\cos 2x \text{ при } \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi. \end{cases}$$

Решая системы неравенств

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 2x > 0; \\ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - 2\cos 2x > 0; \\ \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \end{cases}$$

получаем, что $y' > 0$ при $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ и при $\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \frac{\pi}{3} + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$. Обе полученные системы неравенств объединяются в одну:

$$\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}.$$

Таким образом, $y(x)$ возрастает на интервалах

$$\left(\frac{k\pi}{2}, \ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

На интервалах $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \ \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y(x)$ убывает (так как в каждом из этих интервалов $y' < 0$).

175. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

Решение. Продифференцировав $y(x)$, получим

$$y' = x2^{-x}(2 - x\ln 2).$$

Так как $y'(x) > 0$ при $x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$, то на этом интервале $y(x)$ возрастает. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ производная функции $y(x)$ отрицательна, следовательно, $y(x)$ убывает на каждом из этих интервалов.

176. $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right)$, если $x > 0$ и $f(0) = 0$.

Решение. Дифференцируя $f(x)$, находим

$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда $f'(x) > 0$ при $\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решая записанное неравенство, находим интервалы возрастания функции $f(x)$:

$$e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi} < x < e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}.$$

В интервалах $e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi} < x < e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}$ функция $f(x)$ убывает ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

177. Доказать, что при увеличении числа сторон n периметр p_n правильного n-угольника, вписанного в окружность, возрастает, а периметр P_n правильного n-угольника, описанного около этой окружности, убывает. Пользуясь этим, доказать, что p_n и P_n имеют общий предел при $n \to \infty$.

Доказательство. Воспользуемся формулами, известными из школьного курса геометрии:

$p_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}$, $P_n = 2Rn\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, где R — радиус окружности.

Рассмотрим функции $p(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$, $P(x) = x\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$ $(x > 2)$.

Дифференцируя, находим

$$p'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x} = \cos\frac{\pi}{x}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\right);$$

$$P'(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{x}}\left(\sin\frac{2\pi}{x} - \frac{2\pi}{x}\right).$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} > \frac{\pi}{x}$, $\sin\frac{2\pi}{x} < \frac{2\pi}{x}$ при $x > 2$, то функция $p(x)$ возрастает, а функция $P(x)$ убывает при $x > 2$. Поскольку $p_n = 2Rp(n)$, $P_n = 2RP(n)$, то последовательность p_n — возрастающая, а последовательность P_n — убывающая. В силу того, что $p_n < P_n$ (при $n > 2$) и $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n - p_n) = 0$, то, на основании утверждения леммы о вложенных промежутках, приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n.$$

178. Доказать, что функция $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

Доказательство. Покажем, что в указанных интервалах производная функции положительна. При $x > 0$ имеем

$$y' = y\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) = y\left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right).$$

По формуле конечных приращений на отрезке $[x, x+1]$ получаем

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}, \qquad \text{где } x < \xi < x + 1.$$

Таким образом, $y' = y\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x+1}\right) > 0$ при $x > 0$. При $x < -1$ имеем

$$y' = y\left[\ln\left(1 - \left(-\frac{1}{x}\right)\right) - \frac{1}{1-(-x)}\right] =$$

$$= y(x)\left|\ln(t-1) - \ln t - \frac{1}{1-t}\right|,$$

где $t = -x$; $1 < t < +\infty$. По формуле Лагранжа на отрезке $[t - 1, t]$ получаем

$$\ln(t-1) - \ln t = -\frac{1}{\xi_1},$$

где $t - 1 < \xi_1 < t$, откуда $y' = y(-t)\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\xi_1}\right) > 0$ при $1 < t < +\infty$ или $y' > 0$ при $-\infty < x < -1$.

179. Доказать, что целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \qquad (n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$$

является строго монотонной в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

Доказательство. Записав при $n > 0$ производную функции $P(x)$ в виде

$$P'(x) = na_nx^{n-1}\left[1 + \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx} + \cdots + \frac{a_1}{na_nx^{n-1}}\right],$$

приходим к выводу, что при достаточно больших $|x| > x_0$ знак функции $P'(x)$ полностью определяется знаком коэффициента a_n, следовательно, функция $P(x)$ строго монотонна при $|x| > x_0$.

180. Доказать, что рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \qquad (a_nb_m \neq 0),$$

отличная от тождественной постоянной, строго монотонна в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

Доказательство. Предположим для определенности, что $m \neq n$. Записав функцию $R(x)$ в виде

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

получим, продифференцировав ее:

$$R'(x) = \frac{P'_n(x)\,Q_m(x) - Q'_m(x)\,P_n(x)}{Q_m^2(x)} =$$

$$= \frac{a_n b_m x^{m+n-1}\left[(n-m) + O^*\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{Q_m^2(x)}.$$

При достаточно больших $|x| > x_0$ знак функции $R'(x)$ определяется знаком коэффициента $a_n b_m\,(n-m)$ и будет постоянным. Следовательно, $R(x)$ строго монотонна при $|x| > x_0$.

181. Обязательно ли производная монотонной функции является монотонной?

Решение. Не обязательно. Функция $f'(x)$ может сохранять постоянный знак на интервале, не будучи сама монотонной на нем. Например, функция $f(x) = x + \sin x$ монотонно возрастает на всей числовой оси (так как $f'(x) \geqslant 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$), однако функция $f''(x) = -\sin x$ меняет свой знак при переходе через точки $x_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$, поэтому $f'(x)$, являясь монотонной на каждом интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$, не является монотонной на всей оси.

182. Доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция и $|f'(x)| \leqslant \varphi'(x)$ при $x \geqslant x_0$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0) \quad \text{при} \quad x \geqslant x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

Доказательство. Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем значении, то справедливо равенство

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\right| \leqslant 1 \qquad (x_0 < c < x),$$

откуда

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Геометрически это неравенство означает, что приращение монотонно возрастающей дифференцируемой функции будет не меньше приращения всякой другой дифференцируемой функции с меньшим или равным абсолютным значением производной.

183. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и, сверх того, $f'(x) > k > 0$ при $x > a$, где k — постоянная. Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $\left(a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right)$.

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $\left[a,\ a + \frac{|f(a)|}{k}\right]$, имеем

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) - f(a) = \frac{|f(a)|}{k}\, f'\left(a + \theta\,\frac{|f(a)|}{k}\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Из условия $f'(x) > k > 0$ находим

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) - f(a) > |f(a)|,$$

откуда

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) > 0.$$

Функция $f(x)$ на концах отрезка $\left[a, a + \frac{|f(a)|}{k}\right]$ принимает значения разных знаков, поэтому по теореме Коши о промежуточных значениях существует такая точка $\xi \in \left(a, a + \frac{|f(a)|}{k}\right)$, что $f(\xi) = 0$. Докажем, что она единственна на этом интервале. Если допустить, что на нем найдется такая точка ξ_1, что $f(\xi_1) = 0$, то по теореме Ролля на интервале (ξ, ξ_1) (если $\xi_1 > \xi$) или на интервале (ξ_1, ξ) (если $\xi_1 < \xi$) найдется такая точка ξ_2, что $f'(\xi_2) = 0$, а это противоречит условию $f'(x) > k > 0$ при $x > a$.

184. Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если в некоторой окрестности ее $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(a < x < b)$ возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала (a, b), то она является возрастающей на этом интервале.

Доказательство. Если функция $f(x)$ возрастает на некотором интервале, то в каждой точке этого интервала знак приращения функции совпадает со знаком приращения аргумента в этой точке. Допустим, что функция $f(x)$ возрастает в каждой точке интервала (a, b) и вместе с тем не является возрастающей на всем интервале. Тогда существует по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$ и некоторая окрестность этой точки $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, в пределах которой знак приращения функции не совпадает со знаком приращения аргумента в этой точке или не имеет определенного знака. С другой стороны, в силу возрастания $f(x)$ в точке x_0 существует такое $\delta_2 > 0$, что в пределах окрестности $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ знак приращения функции в точке x_0 совпадает со знаком приращения аргумента. Тогда, в силу предположения в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, знак приращения функции не совпадает со знаком приращения аргумента в точке x_0 или не имеет определенного знака, а это противоречит тому, что функция возрастает в точке x_0.

185. Показать, что функция $f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Построить эскиз графика функции.

Решение. Вычислим приращение функции $f(x)$ в точке $x = 0$:
$\Delta f(0) = x\left(1 + x \sin \frac{2}{x}\right)$.

Очевидно, при достаточно малых по абсолютной величине значениях x имеем: $\Delta f(0) < 0$ при $x < 0$ и $\Delta f(0) > 0$ при $x > 0$, поэтому функция $f(x)$ возрастает при $x = 0$. Дифференцируя $f(x)$ при $x \neq 0$, находим

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{2}{x} - 2 \cos \frac{2}{x} \cdot$$

Каким бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно выбрать настолько большое k, что точки $x_k' = \frac{1}{k\pi}$ и $x_k'' = \frac{2}{\pi + 2k\pi}$ будут принадлежать интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Поскольку $f'(x_k') = -1$, $f'(x_k'') = 3$, приходим к выводу, что $f(x)$ не возрастает в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (так как ее производная в этом интервале не сохраняет определенный знак). Вывод: если функция $f(x)$ возрастает в некоторой точке, то она не обязательно возрастает и в некоторой окрестности этой точки. Эскиз графика функции дан на рис. 81.

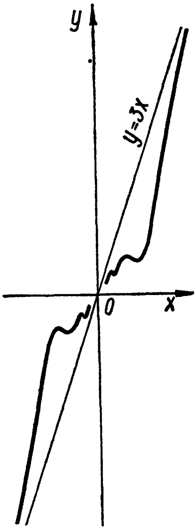

Рис. 81

186. Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ n-кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, (n-1))$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то справедливо неравенство $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$.

Доказательство. Применим к функции $u^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)$ теорему Лагранжа о среднем на отрезке $[x_0, x]$. Имеем

$$u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(x_0) = u^{(n)}(\xi)(x - x_0),$$

откуда в силу условий 2) и 3) находим $u^{(n-1)}(x) > 0$ $(x > x_0)$. Аналогично доказываем, что $u^{(n-2)}(x) > 0$ и т. д., $u(x) > 0$, т. е. $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$.

187. Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

Дать геометрическую иллюстрацию неравенств а) — г).

Доказательство. а) Обозначив $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = 1 + x$ и, замечая, что $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $x > 0$ на основании доказанной теоремы в примере 186 заключаем, что $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > 0$.

Полагая $x = -t$ при $x \leqslant 0$, получим

$$\varphi(t) = e^{-t}; \quad \psi(t) = 1 - t; \quad t \geqslant 0.$$

Поскольку $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) > \psi'(t)$ при $t > 0$, то $\varphi(t) > \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $e^x > 1 + x$ при $x < 0$.

б) Обозначим

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}; \qquad \psi(x) = \ln(1+x); \qquad \eta(x) = x \quad (x \geqslant 0).$$

Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$; $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ при $x > 0$, поэтому на основании неравенства примера 186 имеем

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x) \quad \text{при } x > 0.$$

в) Пользуясь, как и при доказательстве неравенств пункта б), обозначениями

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad \psi(x) = \sin x, \quad \eta(x) = x,$$

имеем $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$; $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ при $x > 0$ и $x \neq 2k\pi$. На основании неравенства примера 186 справедливы неравенства

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x); \quad x > 0, \quad x \neq 2k\pi \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

При $x = 2k\pi$ имеем неравенства

$$2k\pi\left(1 - \frac{4k^2\pi^2}{6}\right) < 0 < 2k\pi,$$

т. е.

$$\varphi(2k\pi) < \psi(2k\pi) < \eta(2k\pi) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, при $x > 0$ выполняются неравенства

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x).$$

г) Обозначим

$$\varphi(x) = \operatorname{tg} x; \quad \psi(x) = x + \frac{x^3}{3} \qquad \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (так как $\varphi'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; $\psi'(x) = 1 + x^2$; $\operatorname{tg}^2 x > x^2$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Пользуясь неравенством примера 186, можем утверждать, что $\varphi(x) > \psi(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

д) Неравенство

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

при любых фиксированных $x > 0$, $y > 0$ и всех $0 < \alpha < \beta$ эквивалентно неравенству

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} + 1\right]^{\frac{1}{\alpha}} > \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta} + 1\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Для доказательства последнего обозначим $\frac{x}{y} = t$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = (t^z + 1)^{\frac{1}{z}}.$$

при $0 < z < +\infty$.

Ее производная

$$\varphi'(z) = \varphi(z)\left[\frac{t^z \ln t}{z(1+t^z)} - \frac{\ln(1+t^z)}{z^2}\right] = \frac{\varphi(z)}{z^2(1+t^z)} \ln \frac{(t^z)^{t^z}}{(1+t^z)^{1+t^z}}$$

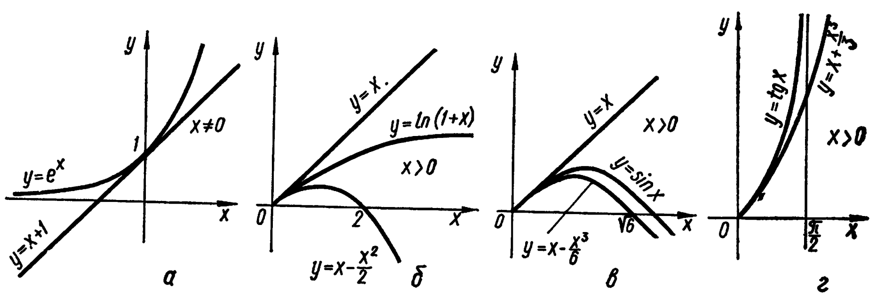

Рис. 82

отрицательна при $0 < z < +\infty$, поэтому функция $\varphi(z)$ убывает; следовательно, $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ при $0 < \alpha < \beta < +\infty$, т. е. справедливо неравенство

$$(x^{\alpha} + y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} > (x^{\beta} + y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$$

при $x > 0$; $y > 0$; $0 < \alpha < \beta$, что и требовалось доказать.

Геометрическая иллюстрация неравенств а) — г) приведена на рис. 82.

188. Доказать неравенство $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Правая часть неравенства доказана при решении примера 187, в). Докажем левую часть неравенства. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Утверждается, что $\varphi(x)$ не имеет нулей в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле, если бы $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ было корнем уравнения $\varphi(x) = 0$, то применяя теорему Ролля к функции $\varphi(x)$ на отрезках $[0, x_1]$ и $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right]$, мы получили бы, что $\varphi'(x)$ обращается в нуль в двух точках интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Но на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет лишь один корень $x = \arccos\frac{2}{\pi}$. Поэтому $\varphi(x)$ сохраняет на указанном интервале вполне определенный знак. Возьмем любое $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и определим знак $\varphi(x_0)$; в силу предыдущих рассуждений приходим к выводу, что знак $\varphi(x)$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ совпадает со знаком числа $\varphi(x_0)$. Пусть, например, $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6} > 0$. Мы доказали, что $\varphi(x) > 0$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

189. Доказать, что при $x > 0$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Доказательство. Если неравенство выполняется, то, логарифмируя его, придем к неравенству

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},$$

которое требуется доказать. Обозначая $\frac{1}{x} = t$ $(t > 0)$, получаем неравенство

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1 + t) < t.$$

Правая его часть доказана при решении примера 187; докажем теперь левую часть неравенства. Обозначим $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$; $\psi(t) = \ln(1 + t)$ и рассмотрим эти функции при $t \geqslant 0$. Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} < \psi'(t) = \frac{1}{1+t}$ при $t > 0$. Следовательно, на основании неравенства, доказанного в примере 186, можно утверждать, что $\varphi(t) < \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ при $x > 0$, что и требовалось доказать.

190. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены прогрессий положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим первый член прогрессий через a, сумму n членов арифметической прогрессии через S_n, а сумму n членов геометрической прогрессии — через S_n'; тогда получим

$$S_n = \frac{n(2a + d(n-1))}{2}; \qquad S_n' = \frac{a(q^n - 1)}{q-1},$$

где d — разность арифметической прогрессии, а q — знаменатель геометрической прогрессии. Из условия задачи следует, что $q > 0$, $q \neq 1$. Приравнивая n-е члены прогрессий, находим

$$d = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{n-1}.$$

Подставляя найденное d в выражение для S_n, получим

$$S_n = \frac{na(1 + q^{n-1})}{2}.$$

Требуется доказать справедливость неравенства

$$\frac{n(1+q^{n-1})}{2} > 1 + q + \cdots + q^{n-1} \text{ при } 0 < q < 1 \text{ и при } q > 1.$$

При $n = 3$ имеем $3(1 + q^2) > 2(1 + q + q^2)$, что эквивалентно неравенству $(q-1)^2 > 0$. Допустим, что справедливо неравенство

$$n(1 + q^{n-1}) > 2(1 + q + \cdots + q^{n-1}),$$

и покажем, что при этом предположении будет выполняться также неравенство

$$(n+1)(1+q^n) > 2(1 + q + \cdots + q^n).$$

Имеем в силу нашего предположения

$$(n+1)(1+q^n) = n(1+q^{n-1}) + (n+1)q^n - nq^{n-1} + 1 >$$

$$> 2(1 + q + \cdots + q^{n-1}) + (n+1)q^n - nq^{n-1} + 1 =$$

$$= 2(1 + q + \cdots + q^n) + (n-1)q^n - nq^{n-1} + 1.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(q) = (n-1)q^n - nq^{n-1} + 1$ и вычислим ее производную: $\varphi'(q) = n(n-1)q^{n-2}(q-1)$. При $0 < q < 1$ имеем $\varphi'(q) < 0$, а при $q > 1$, очевидно, $\varphi'(q) > 0$, следовательно, функция $\varphi(q)$ монотонно убывает на интервале $(0, 1)$ и монотонно возрастает при всех $q > 1$. Далее, $\varphi(1) = 0$, следовательно, $\varphi(q) > 0$ при $q > 0$ $(q \neq 1)$. Поэтому справедливо неравенство

$$(n+1)(1+q^n) > 2(1 + q + \cdots + q^n).$$

Мы доказали с помощью метода математической индукции, что $S_n > S_n'$.

191. Исходя из неравенства $\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$, где x, a_k, b_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) вещественны, доказать неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

Доказательство. Возводя в квадрат выражение, стоящее под знаком суммы, получаем

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0,$$

где

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2; \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k; \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

Квадратный трехчлен неотрицателен тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен: $B^2 - AC \leqslant 0$ $(A > 0)$. Подставляя в последнее неравенство значения A, B и C, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 ,$$

что и требовалось доказать.

192. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел не больше среднего квадратичного этих же чисел, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2} .$$

Доказательство. Полагая в неравенстве Коши $a_k = x_k$, $b_k = \frac{1}{n}$, получим

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 ,$$

откуда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2} .$$

193. Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x}{n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x}} .$$

Ее производная $\varphi'(x) = \frac{1}{xn^2\sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}x}}\left[(n-1)x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right]$ равна нулю при $x_0 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$, отрицательна при $0 < x < x_0$, положительна при $x > x_0$, поэтому $\varphi(x)$ убывает на интервале $(0, x_0)$ и возрастает при $x > x_0$; а при $x = x_0$ достигает наименьшего значения

$$\varphi(x_0) = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}.$$

Таким образом, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ при всех $x > 0$ (в том числе и при $x = x_n$):

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \geqslant \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}. \qquad (1)$$

Доказывать неравенство, приведенное в условии задачи, будем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$ имеем $x_1 = x_1$. Допустив справедливость неравенства

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \geqslant \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}},$$

из неравенства (1) немедленно получаем неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \geqslant 1,$$

откуда

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

194. Средней порядка s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad \text{если} \quad s \neq 0;$$

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s\to 0} \Delta_s(a, b).$$

В частности, получаем: при $s = -1$ — среднее гармоническое; при $s = 0$ — среднее геометрическое (доказать это); при $s = 1$ — среднее арифметическое; при $s = 2$ — среднее квадратичное.

Доказать, что

1) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s(a, b) \leqslant \max(a, b)$;

2) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s;

3) $\lim\limits_{s\to-\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$; $\lim\limits_{s\to+\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Доказательство. При $s \to 0$ получаем

$$\Delta_0(a, b) = e^{\lim\limits_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{a^s+b^s}{2}-1\right)} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{s\to 0}\left(\frac{a^s-1}{s}+\frac{b^s-1}{s}\right)} = e^{\frac{\ln ab}{2}} = \sqrt{ab}$$

и убеждаемся в том, что при $s = 0$ функция $\Delta_s(a, b)$ есть среднее геометрическое чисел a и b.

Обозначая $\beta = \frac{\min(a,\ b)}{\max(a,\ b)}$ $(0<\beta<1)$, можем записать функцию $\Delta_s(a,\ b)$ в виде

$$\Delta_s(a,\ b) = \max(a,\ b)\cdot\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Покажем, что функция $\Delta_s(a,\ b)$ монотонно возрастает при $-\infty < s < +\infty$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad s>0$$

и покажем, что функция $\ln\varphi(s)$ возрастает при $s>0$. Имеем

$$\frac{d}{ds}[\ln\varphi(s)] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{\beta^s\ln\beta^s}{1+\beta^s} - \ln\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)\right].$$

Обозначим

$$\varphi_1(s) = \frac{s\beta^s\ln\beta}{1+\beta^s}, \quad \psi_1(s) = \ln\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right).$$

При $s=0$ функции $\varphi_1(s)$ и $\psi_1(s)$ обращаются в нуль. Вычислим производные этих функций:

$$\varphi_1'(s) = \frac{\beta^s(1+\ln\beta^s+\beta^s)\ln\beta}{(1+\beta^s)^2}; \quad \psi_1'(s) = \frac{\beta^s\ln\beta}{1+\beta^s}.$$

Принимая во внимание неравенства

$$\ln\ \beta<0; \frac{\beta^s(1+\ln\beta^s+\beta^s)}{(1+\beta^s)^2} < \frac{\beta^s}{1+\beta^s},$$

получаем неравенство $\varphi_1'(s) > \psi_1'(s)$, справедливое при $s>0$. Поскольку $\varphi_1(0)=\psi_1(0)=0$, а $\varphi_1'(s)>\psi_1'(s)$ при $s>0$, то на основании неравенства примера 186 можем утверждать, что $\varphi_1(s)>\psi_1(s)$ при $s>0$, откуда следует, что функция $\ln\varphi(s)$, а с ней и $\varphi(s)$ и $\Delta_s(a,\ b)$ возрастают при всех положительных s. Если же $-\infty<s\leqslant 0$, то, полагая $s=-t$ $(0\leqslant t<+\infty)$, получим

$$\varphi_1(s) = \frac{-t\ln\beta}{1+\beta^t} = \varphi_2(t), \quad \psi_1(s) = \ln\left(\frac{1+\beta^t}{2\beta^t}\right) = \psi_2(t).$$

При $t=0$ функции $\varphi_2(t)$ и $\psi_2(t)$ обращаются в нуль. Вычислим их производные:

$$\varphi_2'(t) = \frac{(\beta^t t\ln\beta - 1 - \beta^t)\ln\beta}{(1+\beta^t)^2}; \quad \psi_2'(t) = -\frac{\ln\beta}{1+\beta^t}.$$

Очевидно, $\varphi_2'(t) > \psi_2'(t)$ при $t>0$. Принимая во внимание равенство $\varphi_2(0)=\psi_2(0)=0$, на основании неравенства примера 186 можем утверждать, что $\varphi_1(s)>\psi_1(s)$ при $-\infty<s<0$; откуда следует, что функция $\Delta_s(a,\ b)$ возрастает при всех отрицательных s.

Таким образом, функция $\Delta_s(a, b)$ — возрастающая. Поскольку

$$\lim_{s\to+\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b) \cdot e^{\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \ln\left(\frac{1+\beta^s}{2}\right)} = \max(a, b),$$

то, принимая во внимание монотонность функции $\Delta_s(a, b)$, справедливо неравенство

$$\Delta_s(a, b) \leqslant \max(a, b),$$

причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $a = b$.

Записав функцию $\Delta_s(a, b)$ в виде

$$\Delta_s(a, b) = \min(a, b) \cdot \left(\frac{1+\alpha^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},$$

где

$$\alpha = \frac{\max(a, b)}{\min(a, b)} \qquad (\alpha > 1),$$

находим

$$\lim_{s\to-\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b) \cdot e^{\lim\limits_{s\to-\infty} \frac{1}{s} \ln\left(\frac{1+\alpha^s}{2}\right)} = \min(a, b);$$

причем в силу возрастания $\Delta_s(a, b)$ при $-\infty < s < +\infty$ справедливо неравенство: $\Delta_s(a, b) \geqslant \min(a, b)$, в котором знак равенства возможен лишь при $a = b$.

195. Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \geqslant 2,\ x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$ при $n > 1,\ x > a > 0$;

в) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$.

Доказательство. а) Обозначив $\varphi(x) = x^\alpha - 1$, $\psi(x) = \alpha(x-1)$, имеем: $\varphi(1) = \psi(1) = 0$; $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $\alpha \geqslant 2$; $x > 1$. На основании неравенства примера 186 заключаем, что

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant 2; \quad x > 1.$$

б) Аналогично доказательству а) имеем при $n > 1$; $x > a > 0$:

$$\varphi(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}, \quad \psi(x) = \sqrt[n]{x-a}; \quad \varphi(a) = \psi(a) = 0;$$

$\varphi'(x) < \psi'(x)$, поэтому $\varphi(x) < \psi(x)$.

в) Обозначим $\varphi(x) = 1 + 2\ln x$, $\psi(x) = x^2$. При $x = 1$ значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ совпадают, а при $x > 1$ выполнено неравенство $\varphi'(x) < \psi'(x)$, поэтому на основании неравенства примера 186 справедливо неравенство $\varphi(x) < \psi(x)$ при $x > 1$. Пусть $0 < x < 1$; полагая $t = \frac{1}{x}$ $(1 < t < +\infty)$, имеем $\varphi(x) = 1 - 2\ln t = \varphi_1(t)$; $\psi(x) = \frac{1}{t^2} = \psi_1(t)$; $\varphi_1(1) = \psi_1(1) = 1$; $\varphi_1'(t) <$

$\psi_1'(t)$, откуда $\varphi_1(t) < \psi_1(t)$ при $1 < t < +\infty$, т. е. $\varphi(x) < \psi(x)$ при $0 < x < 1$. Поскольку $\varphi(1) = \psi(1)$, то принимая во внимание доказанные неравенства, имеем $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ при $x > 0$, что и требовалось доказать.

§ 7. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

1°. Достаточные условия выпуклости. График дифференцируемой на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ имеет на этом интервале выпуклость, направленную вниз (вверх), если он лежит в пределах указанного интервала не ниже (не выше) любой своей касательной. Достаточным условием выпуклости графика функции вниз (вверх), если функция всюду на интервале (a, b) имеет конечную вторую производную, является выполнение неравенств $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) при $a < x < b$.

2°. Достаточное условие точки перегиба. Точка $M_0(x_0, y_0)$ графика функции $y = f(x)$ называется *точкой перегиба* этого графика, если существует такая окрестность точки x_0 оси абсцисс, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от x_0 имеет разные направления выпуклости. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

196. Исследовать направление выпуклости кривой $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ в точках $A(-1, 0)$; $B(1, 2)$ и $C(0, 1)$.

Решение. Вычислим вторую производную функции $y(x)$ и исследуем ее знак в точках $x = -1$ и $x = 1$ (в точке $x = 0$ $y''(x)$ не существует). Имеем

$$y''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}; \quad y''(-1) > 0; \quad y''(1) < 0,$$

следовательно, в точке A кривая имеет выпуклость, направленную вниз, а в точке B — направленную вверх. При переходе через точку $x = 0$ функция $y''(x)$ меняет знак, поэтому точка C является точкой перегиба графика функции $y = 1 + \sqrt[3]{x}$.

Найти промежутки выпуклости определенного направления и точки перегиба графиков следующих функций:

197. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

Решение. Вторая производная функции $y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$ положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$, поэтому график функции имеет при $x < 0$ выпуклость, направленную вверх, а при $x > 0$ — направленную вниз. Точка $M_0(0, 0)$ является точкой перегиба графика функции.

198. $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение. Замечая, что вторая производная функции

$$y''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

отрицательна при $|x| > 1$ и положительна при $|x| < 1$, приходим к выводу, что при $|x| > 1$ график функции имеет выпуклость, направленную вверх, а при $|x| < 1$ — направленную вниз. Точки A_1 $(-1, \ln 2)$; A_2 $(1, \ln 2)$ являются точками перегиба графика функции.

199. $y = x\sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

Решение. Дважды дифференцируя, находим

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y'' > 0 \text{ при } -\frac{3\pi}{4} +$$

$$+ 2k\pi < \ln x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi;$$

$$y'' < 0 \text{ при } \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Таким образом, в интервалах

$$e^{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi} < x < e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$$

график функции имеет выпуклость, направленную вниз; в интервалах

$$e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} < x < e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}$$

— выпуклость, направленную вверх, а точки

$$\left(e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}, \ \frac{(-1)^k e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}}{\sqrt{2}}\right)$$

являются точками перегиба графика $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

200. $y = x^x$ $(x > 0)$.

Решение. Имеем при $x > 0$: $y'' = x^x\left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right] >$ > 0, откуда следует, что при всех положительных значениях x кривая выпукла вниз.

201. Исследовать направление выпуклости циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0).$$

Решение. Применяя правило дифференцирования функций, заданных параметрически, находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

откуда следует, что при $a > 0$ имеем $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, если $t \neq 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, т. е. на каждом из интервалов $(2ak\pi, (2k+2)a\pi)$ циклоида выпукла вверх.

202. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке $a \leqslant x < +\infty$, причем: 1) $f(a) = A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \leqslant 0$ при $x > a$. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a, +\infty)$.

Доказательство. При $x > a$ получаем по формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x) = A + (x-a) f'(\xi_1(x)); \quad a < \xi_1 < x; \tag{1}$$

$$f'(x) = f'(a) + (x-a) f''(\xi_2(x)); \quad a < \xi_2 < x. \tag{2}$$

Из условия $f''(\xi_2) \leqslant 0$ следует, что $f'(x) < 0$ при $x > a$, поэтому функция $f(x)$ убывает на интервале $(a, +\infty)$. Из формул (1) и (2) находим

$$f(x) = A + (x-a) f'(a) + (x-a)(\xi_1 - a) f''(\xi_2(\xi_1)). \tag{3}$$

В силу условий $f'(a) < 0$, $f''(\xi_2(\xi_1)) \leqslant 0$ из формулы (3) следует, что при достаточно большом $x_0 > a$ значение функции будет отрицательно. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, x_0]$, то по теореме Коши о промежуточных значениях существует такое $x_1 \in (a, x_0)$, что $f(x_1) = 0$. Функция $f(x)$ не может обратиться в нуль ни в какой другой точке, отличной от x_1, так как убывает на интервале $(a, +\infty)$.

203. Функция $f(x)$ называется выпуклой снизу (сверху) на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 > 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказать, что: 1) функция $f(x)$ выпукла снизу на (a, b), если $f''(x) > 0$ при $a < x < b$; 2) $f(x)$ выпукла сверху на (a, b), если $f''(x) < 0$ при $a < x < b$.

Доказательство. Пусть $f''(x) > 0$; $x \in (a, b)$ и пусть $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Если x_1 и x_2 — любые точки интервала (a, b) и $x_1 < x_2$, то точка $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, очевидно, лежит между ними. По формуле Лагранжа имеем

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) = \lambda_2 (x_2 - x_1) f'(\xi_1), \tag{1}$$

где $x_1 < \xi_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$;

$$f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 (x_2 - x_1) f'(\xi_2), \tag{2}$$

где $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_2 < x_2$.

Умножим левую и правую части равенств (2) и (1) на λ_2 и λ_1 соответственно и вычтем друг из друга полученное. Находим

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1) f''(\xi_3),$$

где $\xi_1 < \xi_3 < x_2$. В силу условий $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $f''(\xi_3) > 0$ имеем

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) > f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

т. е. $f(x)$ выпукла снизу на (a, b).

Если же $f''(x) < 0$ на (a, b), то функция $\varphi(x) = -f(x)$ по доказанному выпукла снизу на (a, b): $\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) > \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, откуда $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, а это означает, что $f(x)$ выпукла сверху на (a, b).

204. Показать, что функции $\varphi_1(x) = x^n$ $(n > 1)$, $\varphi_2(x) = e^x$, $\varphi_3(x) = x\ln x$ выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции $\psi_1(x) = x^n$ $(0 < n < 1)$, $\psi_2(x) = \ln x$ выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

Решение. Дифференцируя дважды, находим

$$\varphi_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \varphi_2''(x) = e^x, \quad \varphi_3''(x) = \frac{1}{x},$$

$$\psi_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \psi_2''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

При $x \in (0, +\infty)$ имеем $\varphi_j''(x) > 0$ $(j = 1, 2, 3)$, $\psi_k''(x) < 0$ $(k = 1, 2)$, поэтому на основании результата, полученного при решении предыдущего примера, можем утверждать, что функции $\varphi_j(x)$ выпуклы снизу, а функции $\psi_k(x)$ выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

205. Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ $\quad (x > 0, \quad y > 0, \quad x \neq y, \quad n > 1)$;

б) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $\quad (x \neq y)$;

в) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$, $\quad$ если $x > 0$, $y > 0$.

Доказательство. Решая задачу 204, мы показали, что функции t^n $(n > 1)$, e^t и $t\ln t$ выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, откуда следует, что для любых $x > 0$, $y > 0$ $(x \neq y)$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ справедливы неравенства:

а) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$; б) $\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}$;

в) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$,

что и требовалось доказать. Геометрический смысл доказанных неравенств следующий: если функция $f(x)$ выпукла снизу на некотором интервале, то хорда, соединяющая две точки: $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$ рассматриваемой кривой, лежит выше дуги, стягиваемой этой хордой; в частности, точка, лежащая на середине хорды, лежит выше точки на кривой с абсциссой $\frac{x+y}{2}$ (рис. 83).

206. Пусть $f''(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

Доказательство. По формуле (3) примера 203 имеем $\left(\text{при } \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{4}(x_2-x_1)f''(\xi) \qquad (x_1<\xi<x_2),$$

откуда в силу условия $f''(\xi) \geqslant 0$ получаем неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

207. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

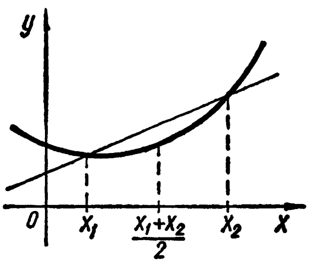

Рис. 83

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $f(x)$ выпукла снизу на интервале (a, b). В силу ограниченности $f(x)$ на (a, b) существует такое $c > 0$, что $|f(x)| \leqslant c$; $x \in (a, b)$. Пусть x_0 — любая точка интервала (a, b) и приращение аргумента $\Delta x > 0$ в этой точке взято такое, что точки $x_0-\Delta x$ и $x_0+\Delta x$ также принадлежат (a, b). Так как $f(x)$ выпукла снизу, то справедливо неравенство $f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x) > 2f(x_0)$, которое перепишем в виде

$$f(x)-f(x_0-\Delta x) < f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (1)$$

Из неравенства (1) получаем систему неравенств:

$$f(x_0-k\Delta x)-f(x_0-(k+1)\Delta x) < f(x_0+\Delta x)-f(x_0) <$$
$$< f(x_0+(k+1)\Delta x)-f(x_0+k\Delta x) \qquad (2)$$

$(k=0, 1, \ldots, n-1)$ при условии, что точки $x_0-(k+1)\Delta x$, $x_0+(k+1)\Delta x$; $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ принадлежат интервалу (a, b). Суммируя неравенства (2) по k от 0 до $n-1$, приходим к неравенству

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-n\Delta x)}{n} < f(x_0+\Delta x)-f(x_0) < \frac{f(x_0+n\Delta x)-f(x_0)}{n} \qquad (3)$$

и, принимая во внимание ограниченность функции $f(x)$, получаем оценку

$$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)| < \frac{2c}{n}. \qquad (4)$$

Каким бы ни было $\varepsilon > 0$, при всех $n > \left[\frac{2c}{\varepsilon}\right]$ имеем

$$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)| < \varepsilon, \qquad (5)$$

если Δx удовлетворяет условию

$$0 < \Delta x < \min\left\{\frac{b - x_0}{n}, \quad \frac{x_0 - a}{n}\right\}.$$

Непрерывность функции $f(x)$ в любой точке интервала (a, b) доказана. Докажем существование односторонних производных функции. Пусть $\Delta x > h > 0$. Тогда справедливы неравенства

а) $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

б) $\dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} > \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$.

В самом деле, записав $h = \theta\Delta x$ $(0 < \theta < 1)$, видим, что неравенство а) эквивалентно неравенству

$$\theta f(x_0 + \Delta x) + (1 - \theta) f(x_0) > f(x_0 + h);$$

а неравенство б) эквивалентно неравенству

$$\theta f(x_0 - \Delta x) + (1 - \theta) f(x_0) > f(x_0 - h),$$

каждое из которых справедливо в силу выпуклости снизу функции $f(x)$. Таким образом, функция $\varphi(\Delta x) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ убывает при $\Delta x \to +0$ и ограничена снизу числом $-\dfrac{2c}{h}$, а функция $\psi(\Delta x) = \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$ возрастает при $\Delta x \to +0$ и ограничена сверху числом $\dfrac{2c}{h}$. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \to +0} \varphi(\Delta x) = f'_+(x_0), \quad \lim_{\Delta x \to +0} \psi(\Delta x) = f'_-(x_0).$$

208. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$. Доказать, что в интервале (a, b) можно найти два значения x_1 и x_2 такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $f''(\xi) < 0$; $\xi \in (a, b)$. Тогда функция $f'(x)$ убывает в точке $x = \xi$: существует такое $\delta > 0$, что $f'(x) > f'(\xi)$ при $x \in (\xi - \delta, \xi)$; $f'(x) < f'(\xi)$ при $x \in (\xi, \xi + \delta)$. Рассмотрим в интервале $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ функцию $\varphi(x) = f(\xi) - f(x) + f'(\xi)\cdot(x - \xi)$. Ее производная $\varphi'(x) = -f(x) + f'(\xi)$ удовлетворяет условиям: $\varphi'(x) < 0$ при $\xi - \delta < x < \xi$; $\varphi'(x) > 0$ при $\xi < x < \xi + \delta$. Поэтому функция $\varphi(x)$ убывает на интервале $(\xi - \delta, \xi)$ и возрастает на интервале $(\xi, \xi + \delta)$. При $x = \xi$ имеем $\varphi(\xi) = 0$. Таким образом, $\varphi(x) \geqslant 0$ при $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Обозначим $A = \varphi(\xi - \delta + 0)$; $B = \varphi(\xi + \delta - 0)$ и рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = \varepsilon, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число, удовлетворяющее условиям $0 < \varepsilon < \min(A, B)$. Из изложенного выше ясно, что уравнение (1) всегда имеет два корня: $\xi - \delta < x_1 < \xi$ и $\xi < x_2 < \xi + \delta$. Таким образом, на интервале (a, b) (в окрестности точки ξ) найдутся два значения x_1 и x_2 $(a < x_1 < \xi < x_2 < b)$ такие, что

$$f(\xi) - f(x_1) + f'(\xi)(x_1 - \xi) = \varepsilon, \tag{2}$$

$$f(\xi) - f(x_2) + f'(\xi)(x_2 - \xi) = \varepsilon. \tag{3}$$

Вычитая почленно (3) из (2), получаем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Если предположить, что $f''(\xi) > 0$, то следует рассмотреть уравнение $\varphi(x) = -\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \min(|A|, |B|)$.

209. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна такая точка ξ, что $f''(\xi) = 0$.

Доказательство. В силу выполнения условий задачи 147 в интервале $(x_0, +\infty)$ найдется такая точка ξ_1, что $f'(\xi_1) = 0$. Так как $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то на основании решения примера 167 заключаем, что $\varliminf\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = 0$. Тогда на основании результата решения примера 147 на интервале $(\xi_1, +\infty)$ найдется по меньшей мере одна такая точка ξ, что $f''(\xi) = 0$.

§ 8. Раскрытие неопределенностей

1-е правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки a, где a — число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю, а производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в упомянутой окрестности, за исключением, быть может, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$, и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-е правило Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности, а производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности точки a и отличных от a, причем $f'^2 + g'^2 \neq 0$ в упомянутой окрестности и $x \neq a$, и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Найти пределы:

210. $w = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$.

Решение. Здесь имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя дважды, получаем

$$w = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \left[1 - x^{x+1}(\ln x + 1)\left(1 + \frac{1}{x} + \ln x\right) - x^x\right] = -2.$$

211. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

Решение. Здесь имеется неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразовывая данное выражение к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и применяя правило Лопиталя, находим

$$w = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{\operatorname{th} x \operatorname{tg} x + \dfrac{x \operatorname{tg} x}{\operatorname{ch}^2 x} + x \operatorname{th} x \cos^{-2} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 + \operatorname{th}^2 x}{x^2}}{\dfrac{\operatorname{th} x}{x}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{\operatorname{th} x}{x}\cos^{-2} x} = \frac{2}{3}.$$

212. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}$.

Решение. Налицо неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя четырежды, находим

$$w = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{ch} x - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{ch} x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{sh} x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\operatorname{ch} x + \cos x} = 1.$$

Заметим, что в процессе решения примера мы избавлялись от радикала известным способом, а также переходили к пределу, когда $x \to 0$, в выражении $\cos x + \sqrt{1 + \sin^2 x}$.

213. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-100}$.

Решение. Непосредственное применение правила Лопиталя неэффективно, поэтому, произведя замену $\frac{1}{x^2} = y$ и применив правило Лопиталя к полученному выражению, находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{50}}{e^y} = 50! \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0.$$

214. $w = \lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

Решение. Здесь имеется неопределенность вида 0^0, поэтому предварительно воспользуемся представлением $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0,$ $v > 0)$, а также соотношением $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$. После очевидных преобразований и применения правила Лопиталя получаем

$$w = \lim_{x\to+0} e^{x \ln^2 x \left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x \ln x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x \ln^2 x \cdot \lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln^2 x \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x \ln^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(-2x\ln x)} = 1$$

$$(\lim_{x\to+0} x \ln x = 0, \text{ поэтому } x \ln x = t \to 0).$$

215. $w = \lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x} - 1)$.

Решение. Налицо неопределенность вида 0^0. Поэтому, используя формулу $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0, v > 0)$, получаем

$$w = \lim_{x\to+0} (e^{x^x \ln x} - 1) = e^{\lim\limits_{x\to+0} x^x \cdot \lim\limits_{x\to+0} \ln x} - 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$, то $\lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x} - 1) = -1$.

216. $w = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Применяя формулу $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0, v > 0)$, находим

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}.$$

217. $w=\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, имеем

$$w=e^{\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

218. $w=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

Решение. Здесь также неопределенность вида 1^{∞}. Применяя формулу $u^v=e^{v\ln u}$ $(u>0,\ v>0)$ и пользуясь возможностью перехода к пределу в показателе функции e^x, находим

$$w=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 2x}{\operatorname{tg}x\cos^2 x}}=e^{-1}.$$

219. $w=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Налицо неопределенность вида ∞^0. Используя те же приемы, что и при решении предыдущего примера, получаем

$$w=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1}\cos^{-2}\frac{\pi x}{2x+1}\,\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}=$$

$$=e^{2\pi\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sin\frac{2\pi x}{2x+1}\right)^{-1}(2x+1)^{-2}\right]}=e^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{\pi}{2x+1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x+1}}=1.$$

220. $w=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Здесь имеется неопределенность вида 1^{∞}. Поэтому, применяя уже упомянутые формулы, а также пользуясь некоторыми известными пределами, находим

$$w=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}[(a^x-1)(b^x-x\ln b)\ln a-\ln b(b^x-1)(a^x-x\ln a)]}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\ln a-\frac{b^x-1}{x}\ln b\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}.$$

Итак

$$w=e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}.$$

221. $w = \lim\limits_{x \to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Решение. В данном примере функция имеет неопределенность вида $\infty - \infty$ в точке $x = 0$. Приведя эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ и применяя правило Лопиталя, имеем

$$w = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{x \cos x + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

222. $w = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

Решение. Необходимо раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Здесь удобнее всего воспользоваться представлением функции в виде $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0\ v > 0)$ и возможностью перехода к пределу в показателе функции e^z. Тогда, применяя правило Лопиталя, получим

$$w = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e}{x} = e \lim_{x \to 0} \frac{x - (1 + x)\ln(1 + x)}{x^2(1 + x)} =$$

$$= e \lim_{x \to 0} \frac{-\ln(1 + x)}{2x + 3x^2} = e \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{1 + x}}{2} = -\frac{e}{2}.$$

223. $w = \lim\limits_{x \to 0}\left[\frac{1}{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)} - \frac{1}{\ln(1 + x)}\right]$.

Решение. Приведя неопределенность вида $\infty - \infty$ к виду $\frac{0}{0}$ и применяя правило Лопиталя, находим

$$w = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{1 + x}{x + \sqrt{1 + x^2}}}{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\ln(1 + x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{1 + x}\left[\frac{x + \sqrt{1 + x^2} - (1 + x)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^2}\right]}{\frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{1 + x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - (1 + x)}{(1 + x)\ln(1 + x) + \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

224. $w = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$ $(a > 0)$.

Решение. Дважды применяя правило Лопиталя, получаем

$$w = \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x}\right] - a^x \ln a}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x}\right]^2 + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2}\right]}{2} -$$

$$- \frac{a^x \ln^2 a}{2} = \frac{1}{a}.$$

225. $w = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$.

Решение. Данную неопределенность приводим к виду $e^{\frac{0}{0}}$ и затем применяем правило Лопиталя:

$$w = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)} = e^z,$$

$$z = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}; \quad w = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

226. $w = \lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{th} x)^x$.

Решение. Имеем $w = e^z$, где

$$z = \lim_{x\to+\infty} x \ln(\operatorname{th} x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} =$$

$$= -2 \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} 2x} = 0; \quad w = 1.$$

227. $w = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение.

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\arcsin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\arcsin x} \cdot \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}}{2x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{2x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{6x\sqrt{1-x^2}}} = e^{\frac{1}{6} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}} = e^{\frac{1}{6}}.$$

Здесь мы воспользовались формулой $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$, предельным переходом $\lim e^x = e^{\lim x}$, а также некоторыми известными пределами.

228. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Решая этот пример так же, как и предыдущий, имеем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

229. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Используя формулу $u^v = e^{v\ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$ и дважды применяя правило Лопиталя, получаем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^3}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{arctg} x}{3x}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

230. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Решая этот пример по аналогии с предыдущим, имеем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\operatorname{Arsh} x}\cdot\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\operatorname{Arsh} x}{x^2}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1+x^2}\operatorname{Arsh} x}{x^3}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{Arsh} x}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

231. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Пользуясь формулой $u^v = e^{v\ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-x+\ln(1+x)}{x^2}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2(1+x)x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

232. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Решая этот пример по аналогии с предыдущим, имеем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\arccos x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

233. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

Решение. Применяя формулу $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$, правило Лопиталя, а также теорему о пределе произведения, получаем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x} \cdot \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x} \cdot \frac{-\sin x \cdot \operatorname{ch} x - \cos x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{ch} x + \cos x \cdot \operatorname{sh} x}{x}} = e^{-1}.$$

234. $w = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

Решение. Здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Полагая $\operatorname{ch} x = t$ и применяя правило Лопиталя, находим

$$w = \lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t^{\frac{1}{m}} - t^{\frac{1}{n}}} = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{mn}{n-m}.$$

235. $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}.$

Решение. Действуя так же, как и при решении примера 231, получаем

$$w = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\operatorname{th} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x (1+e^x)^{-1}}{\operatorname{ch}^{-2} x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

236. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x) = x^{\ln x}$, $\psi(x) = (\ln x)^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = w,$$

где

$$w = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\ln x = +\infty,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{x}-\ln\ln x\right)=-\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

237. $z=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\,\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right].$

Решение. Приведя данную неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ и применяя правило Лопиталя, находим

$$z=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\ln(1+xe^{-x})}{x}+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{(1+t+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}}-(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\left[\frac{1}{3}(1+t+t^2+t^3)^{-\frac{2}{3}}(1+2t+3t^2)-\frac{1}{2}(1+t+t^2)^{-\frac{1}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times(1+2t)\right]=-\frac{1}{6}.$$

238. $z=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right].$

Решение. Преобразовывая данную неопределенность к виду $\frac{0}{0}$, пользуясь теоремой о пределе произведения функций и применяя правило Лопиталя, получаем

$$z=\lim_{x\to+\infty}x\left[(x+a)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{a}{x}+1\right)-x^{\frac{1}{x+a}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x^{\frac{a}{x(x+a)}}}\right]=\lim_{t\to+0}\frac{(1+at)^{t+1}-t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\left\{(1+at)^{t+1}\left[\ln(1+at)+a\frac{t+1}{at+1}\right]-\right.$$

$$\left.-t^{\frac{at^2}{1+at}}\left[2at\ln(1+at)+\frac{a^2t^2}{1+at}\right]\right\}=a.$$

239. Найти $\lim_{x\to0}\frac{y}{x}$, если кривая $y=f(x)$ входит при $x\to0$ в начало координат $(0,0)$ $(\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0)$ под углом α.

Р е ш е н и е. Отношение $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta$, где β — угол, образованный хордой, соединяющей точки (x, y) и $(0, 0)$, и осью Ox. Поскольку по условию кривая входит в начало координат под углом α, то при движении по кривой в направлении начала координат $\beta \to \alpha$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

240. Доказать, что

$$\lim_{x\to +0} x^{f(x)} = 1,$$

если непрерывная кривая $y = f(x)$ входит при $x \to +0$ в начало координат ($\lim\limits_{x\to+0} (f(x) = 0)$ и при $0 < x < \varepsilon$ целиком остается внутри острого угла, образованного прямыми $y = -kx$ и $y = kx$ ($k \neq \infty$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $0 < x < \varepsilon$ можно записать неравенство

$$x^{kx} < x^{f(x)} < x^{-kx} \qquad (k > 0, \quad \varepsilon < 1)$$

(по условию, $-kx < f(x) < kx$), откуда, совершая предельный переход, получаем

$$1 = \lim_{x\to+0} x^{kx} \leqslant \lim_{x\to+0} x^{f(x)} \leqslant \lim_{x\to+0} x^{-kx} = 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} x^{f(x)} = 1$, что и требовалось доказать.

241. Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right] = f''(x).$$

242. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & \text{если } x \neq 0; \\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

И с с л е д о в а н и е. Докажем, прежде всего, что

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x\,(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

Исходя из определения производной функции в точке $x = 0$, найдем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^2(e^x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-1-e^x-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{4(e^x-1)+8xe^x+2x^2e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-xe^x}{12e^x+12xe^x+2x^2e^x}=-\frac{1}{12}.$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке $x=0$ и $f'(0)=-\frac{1}{12}$.

243. Найти асимптоту кривой

$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\quad (x>0).$$

Решение. Уравнение наклонной асимптоты имеем вид: $y = kx + b$. Найдем k. Имеем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}.$$

Находим b:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{1}{e}\right]=$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to+0}\left[\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}\right]=$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{1}{t(t+1)}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=$$

$$=-\frac{1}{e^2}\lim_{t\to+0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}=-\frac{1}{e^2}\lim_{t\to+0}\frac{-\ln(1+t)}{2t+3t^2}=\frac{1}{2e}.$$

Запишем уравнение асимптоты:

$$y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}.$$

244. Исследовать возможность применения правила Лопиталя к следующим примерам:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

Исследование. а) Все условия применимости первого правила Лопиталя выполнены, за исключением последнего: существования предела отношения производных.

б) и г) То же самое.

в) Нарушено требование одновременного необращения в нуль производных при $x \neq a$. Как раз при $x = k\pi \in u_\varepsilon$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 0$.

Следовательно, во всех случаях правило Лопиталя неприменимо.

§ 9. Формула Тейлора

1°. Формула Тейлора на промежутке. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$; 2) дифференцируема на $[a, b]$ вплоть до $(n-1)$-го порядка; 3) при $a < x < b$ существует конечная производная $f^{(n)}(x)$. Тогда для каждого $x \in [a, b]$ и $p > 0$ найдется такое θ ($0 < \theta < 1$), что справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$$

(остаточный член в форме Шлемильха — Роша).

При $p = n$ получаем остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a+\theta_1(x-a)] \qquad (0<\theta_1<1).$$

При $p = 1$ получаем остаточный член в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta_2)^{n-1} f^{(n)}[a+\theta_2(x-a)] \qquad (0<\theta_2<1).$$

2°. Локальная формула Тейлора. Если: 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0; 2) в точке x_0 существует конечная производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n].$$

3°. Положив во всех формулах $a = x_0 = 0$, получим соответствующие *формулы Маклорена*.

Из локальной формулы Маклорена получаем *пять важных разложений*:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots +$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Написать разложения следующих функций по целым положительным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:

245. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ до члена с x^2.

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60}.$$

Применяя разложение IV, имеем

$$(1+x)^{100} = 1 + 100x + 50\cdot 99x^2 + o(x^2),$$

$$(1-2x)^{-40} = 1 + 80x + 80\cdot 41x^2 + o(x^2),$$

$$(1+2x)^{-60} = 1 - 120x + 120\cdot 61x^2 + o(x^2).$$

Перемножив правые части полученных разложений и удержав лишь члены до x^2 включительно, получим

$$f(x) = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2).$$

246. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4. Чему равно $f^{(4)}(0)$?

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = 1 + (2x+2x^2)(1+x^3)^{-1}$$

и воспользуемся разложением IV: $(1+x^3)^{-1} = 1 - x^3 + o(x^5)$. Получим

$$f(x) = 1 + (2x+2x^2)(1 - x^3 + o(x^5)) =$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4); \quad f^{(4)}(0) = -48.$$

247. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ до члена с x^3.

Решение. Согласно разложению IV, имеем

$$f_1(x) = \sqrt{1-2x+x^3} = [1-(2x-x^3)]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2x-x^3) - \frac{1}{8}(2x-x^3)^2 - \frac{1}{16}(2x-x^3)^3 + o(x^3),$$

$$f_2(x)=\sqrt[3]{1-3x+x^2}=[1-(3x-x^2)]^{\frac{1}{3}}=$$
$$=1-\frac{1}{3}(3x-x^2)-\frac{1}{9}(3x-x^2)^2-\frac{5}{81}(3x-x^2)^3+o(x^3).$$

Итак, $f(x)=f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$.

248. e^{2x-x^2} до члена с x^5.

Решение. Согласно разложению I имеем

$$e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(2x-x^2)^2+\frac{1}{6}(2x-x^2)^3+$$
$$+\frac{1}{4!}(2x-x^2)^4+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+o(x^5)=$$
$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

249. $x(e^x-1)^{-1}$ до члена с x^4.

Решение. Согласно разложениям I и IV имеем

$$\frac{x}{e^x-1}=x\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)^{-1}=$$
$$=\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right]^{-1}\equiv[1+\alpha(x)]^{-1}=$$
$$=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4+o(x^4)=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-$$
$$-\frac{x^4}{120}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{36}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^4}{24}+$$
$$+\frac{x^4}{16}+o(x^4)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)\quad(x\neq 0).$$

250. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

Решение. Положим $x^3=t$ и воспользуемся разложением функции $\sin t$ по формуле Маклорена:

$$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o(t^6),$$

а также разложением IV.

Тогда получим

$$\sqrt[3]{\sin t}=t^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}+o(t^5)\right]^{\frac{1}{3}}\equiv$$
$$\equiv t^{\frac{1}{3}}[1+\alpha(t)]^{\frac{1}{3}}=t^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2+o(\alpha^2)\right]=$$
$$=t^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)^2+o(t^5)\right]=$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left[1 - \frac{t^2}{18} - \frac{t^4}{3240} + o(t^5)\right] = x\left[1 - \frac{x^6}{18} - \frac{x^{12}}{3240} + o(x^{15})\right] =$$

$$= x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{16}).$$

251. $\ln \cos x$ до члена с x^6.

Решение. Применяя разложения V и II, получаем

$$\ln \cos x = \ln \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln (1 - \sin^2 x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(- \sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} - \frac{\sin^6 x}{3} + o(x^7)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 +\right.$$

$$\left. + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right] = -\frac{1}{2}\left[x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} +\right.$$

$$\left. + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right] = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7).$$

252. $\sin (\sin x)$ до члена с x^3.

Решение. Пользуясь разложением II, имеем

$$\sin (\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^4 x) = \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right] -$$

$$- \frac{1}{6}[x^3 + o(x^4)] + o(\sin^4 x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

253. $\operatorname{tg} x$ до члена с x^5.

Решение. Имеем

$y = \operatorname{tg} x,\ y(o) = 0;\ y'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x,\ y'(0) = 1;$

$y''(x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad y''(0) = 0;$

$y'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x, \quad y'''(0) = 2;$

$y^{IV}(x) = 24\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x + 12\cos^{-3} x \cdot \sin x + 4\cos^{-3} x \cdot \sin x;$
$y^{IV}(0) = 0;$

$y^{(V)}(x) = 120\cos^{-6} x \cdot \sin^4 x - 24\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 16\cos^{-2} x$

$y^{(V)}(0) = 16.$

Итак, по формуле Маклорена, получаем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

254. $\ln \dfrac{\sin x}{x}$ до члена с x^6.

Решение. Применяя разложения II, V, находим

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7) \quad (x \neq 0),$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^3),$$

где

$$\alpha(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7).$$

Тогда

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360}\right) - $$

$$- \frac{x^6}{648} + o(x^7) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^7).$$

255. Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x \ (x > 0)$ разложить по целым положительным степеням дроби $\frac{1}{x}$ до члена с $\frac{1}{x^3}$.

Решение. Преобразовывая функцию $f(x)$ и пользуясь разложением IV, получаем

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] =$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) - 1\right] = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

256. Найти разложение функции $f(h) = \ln(x+h) \ (x > 0)$ по целым положительным степеням приращения h до члена с h^n (n — натуральное число).

Решение. Применяя разложение V, имеем

$$\ln(x+h) = \ln x + \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + $$

$$+ \frac{h^3}{3x^3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{h^n}{nx^n} + o\left[\left(\frac{h}{x}\right)^n\right].$$

257. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h) \qquad (1)$$

$(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \frac{1}{n+1}$.

Доказательство. Так как $f^{(n+1)}(x)$ существует и отлична от нуля, то справедлива формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x) +$$

$$+ o(h)^{n+1}. \qquad (2)$$

После почленного вычитания из равенства (1) равенства (2) и сокращения на $\frac{h^n}{n!}$ получаем

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{h}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h},$$

откуда

$$\theta=\frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}}.$$

Переходя к пределу при $h\to 0$ в данном выражении и принимая во внимание, что $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, получаем $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

258. Пусть при $x\to 0$ имеем $f(x)=1+kx+o(x)$.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^k$.

Доказательство. Представляя функцию $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ в виде

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln f(x)}\quad (f(x)>0 \text{ при } x\to 0),$$

в силу условия примера имеем

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+kx+o(x))},$$

откуда с помощью разложения V находим

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+kx+o(x))}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}(kx+o(x))}=e^k,$$

что и требовалось доказать.

259. Пусть $f(x)\in C^{(2)}[0,1]$ и $f(0)=f(1)=0$, причем $|f''(x)|\leqslant A$ при $x\in(0,1)$. Доказать, что $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+f''(\xi_1)\frac{x^2}{2},\quad 0<\xi_1<x;$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2},\quad x<\xi_2<1,$$

откуда

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

Оценивая это равенство по абсолютной величине, получаем

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}(2x^2-2x+1).$$

Но так как $0 \leqslant 2x^2 - 2x + 1 \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$, что и требовалось доказать.

260. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — дважды дифференцируемая функция и $M_k = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty$ $(k = 0, 1, 2)$.

Доказать равенство $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + f''(\xi)\frac{(x_0 - x)^2}{2},$$

откуда

$$|f(x_0)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)||x_0 - x| + |f''(\xi)|\frac{|x_0 - x|^2}{2} \leqslant$$

$$\leqslant M_0 + M_1y + M_2\frac{y^2}{2} \qquad (y = |x_0 - x|).$$

Так как $M_0 + M_1y + \frac{1}{2}M_2y^2 \geqslant 0$ при всех y, то $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

261. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

а) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ при $|x| \leqslant 0,5$;

в) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0,1$;

г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. а) Пользуясь остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} = R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

б) Пользуясь разложением II с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$\sin x - x + \frac{x^3}{3!} = R_5(x),$$

откуда

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| = |R_5(x)| < \frac{|x|^5}{5!} \leqslant \frac{1}{3840}.$$

в) По формуле остаточного члена в форме Лагранжа имеем

$$\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3} = R_5(x) = \frac{\operatorname{tg}^{(5)}(\xi)}{5!}x^5.$$

Если воспользоваться примером 253, то получим

$$|R_5(x)| = \frac{1}{120}|\operatorname{tg}^{(5)}(\xi)||x|^5 \leqslant \frac{1}{\cos^6(0,1)}\frac{16,012}{120}|x|^5 <$$

$$< \frac{16,012|x|^5}{120(1-0,005)^6} < \frac{16,012|x|^5}{120(1-6\cdot 0,005)} < \frac{16,6}{120}|x|^5 < 1,39\cdot 10^{-6}.$$

г) Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем оценку

$$0 \leqslant (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \leqslant \frac{x^3}{16} \leqslant \frac{1}{16},$$

откуда

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| < \frac{1}{16}.$$

262. Для каких x справедлива с точностью до 0,0001 приближенная формула $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$?

Решение. Используя выражение остаточного члена в форме Лагранжа, получаем

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{\cos\xi}{24}x^4 \leqslant \frac{x^4}{24} \leqslant 0,0001,$$

откуда находим оценку

$$|x| \leqslant 0,1\sqrt[4]{24} < 0,222.$$

263. Доказать формулу $\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$ $(n \geqslant 2, a > 0, x > 0)$, где $0 < r < \frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

Доказательство. Согласно неравенству, доказанному в примере 186, имеем

$$\varphi(x) = a + \frac{x}{na^{n-1}}, \quad \psi(x) = \sqrt[n]{a^n + x};$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = a, \quad \varphi'(0) = \psi'(0) = \frac{1}{na^{n-1}};$$

но $\varphi''(x) = 0$, а $\psi''(x) < 0$, поэтому

$$a + \frac{x}{na^{n-1}} - \sqrt[n]{a^n + x} = r > 0.$$

С другой стороны, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$r = \frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}} - \frac{\psi'''(\xi)}{6}x^3.$$

Так как

$$\psi'''(\xi)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)(a^n+\xi)^{\frac{1}{n}-3}>0,$$

то $r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

264. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить: а) $\sqrt[5]{250}$; б) $\sin 18°$; в) $\operatorname{arctg} 0{,}8$; г) $\arcsin 0{,}45$; д) $(1{,}1)^{(1{,}2)}$ и оценить погрешность.

Р е ш е н и е. а) Имеем

$$\sqrt[5]{250}=3\sqrt[5]{1+\frac{7}{243}}=3\left(1+\frac{7}{5\cdot 243}-R_3\right)=3{,}0171-3R_3,$$

где $3R_3$ согласно оценке, полученной при решении примера 263, оценивается следующим образом ($n=5$, $a=3$, $x=7$):

$$0<3R_3<\frac{4}{50}\cdot\frac{49}{3^9}<\frac{4}{3^9}<0{,}0002.$$

б) Согласно формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{6}\frac{\pi^3}{10^3}+\frac{1}{120}\frac{\pi^5}{10^5}+R_7,$$

где $|R_7|<\frac{1}{7!}\frac{\pi^7}{10^7}$.

Итак,

$$\sin 18°\approx\frac{\pi}{10}\left(1-\frac{\pi^2}{600}+\frac{\pi^4}{12\cdot 10^5}\right)\approx$$

$$\approx 0{,}314159\left(1-\frac{9{,}869604}{600}+\frac{(9{,}869404)^2}{12\cdot 10^5}\right)\approx$$

$$\approx 0{,}314159\,(1-0{,}016449+0{,}000079)\approx 0{,}309017.$$

в) Применение формул Тейлора дает ($x_0=1$):

$$\operatorname{arctg}\ 0{,}8=\operatorname{arctg}\ (x_0-0{,}2)\approx\operatorname{arctg}\ x_0-(\operatorname{arctg}\ x_0)'\cdot 0{,}2+\frac{1}{2}\times$$

$$\times\, 0{,}04\left(\operatorname{arctg} x_0\right)''-\frac{1}{6}\cdot 0{,}008\,(\operatorname{arctg} x_0)'''\approx\frac{\pi}{4}-0{,}1-0{,}01-$$

$$-\,0{,}00066\approx 0{,}67474.$$

Так как $(\operatorname{arctg} x_0)^{(4)}=0$, а $(\operatorname{arctg} x)^{(5)}=24\frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5}<12$ при $0{,}8<x<1$, то по формуле остаточного члена в форме Лагранжа получаем оценку погрешности

$$|R|<\frac{12}{5!}\,(0{,}2)^5<3{,}2\cdot 10^{-5}.$$

г) По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем $(0 \leqslant x \leqslant 0{,}5)$:

$$\arcsin 0{,}45 = \arcsin (0{,}5 - 0{,}05) = \arcsin 0{,}5 -$$

$$- 0{,}05 (\arcsin x)' \Big|_{x=0,5} + \frac{0{,}0025}{2!} (\arcsin x)'' \Big|_{x=0,5} -$$

$$- \frac{0{,}000125}{3!} (\arcsin x)''' \Big|_{x=0,5} + R_4 = \frac{\pi}{6} - \frac{0{,}05}{0{,}5\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{0{,}0025}{3 \cdot 0{,}5\sqrt{3}} - \frac{0{,}000125}{3 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}5\sqrt{3}} + R_4 \approx 0{,}523598 -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} (0{,}1 - 0{,}001666 + 0{,}000111) + R_4 \approx 0{,}46676 + R_4.$$

Абсолютная погрешность оценивается следующим образом:

$$|\arcsin 0{,}45 - 0{,}46676| = |R_4| < \frac{1}{4!} 0{,}00000625 (\arcsin x)^{(4)} \Big|_{x=\frac{1}{2}} <$$

$$< 0{,}000006.$$

д) Аналогично имеем $(0 \leqslant x \leqslant 1)$:

$$(1{,}1)^{1,2} = 1{,}1 (1 + 0{,}1)^{0,2} = 1{,}1 \left(1 + \frac{0{,}1}{5} - \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0{,}01 + \right.$$

$$\left. + \frac{6}{125} \cdot 0{,}001 + R_4\right) \approx 1{,}12117 + 1{,}1R_4,$$

где $1{,}1 |R_4| < 1{,}1 \cdot \frac{21}{625} \cdot 10^{-4} < 5 \cdot 10^{-6}$.

265. Вычислить:

а) $\sin 1°$ с точностью до 10^{-8}; б) $\lg 11$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. а) Определим число членов разложения функции $\sin x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{180}\right)$ по формуле Маклорена для достижения заданной точности. Его можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа. Имеем

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n-1} \frac{1}{(2n-1)!} < 10^{-8} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда $n \geqslant 3$.

Таким образом,

$$\sin 1° = \sin \frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{6\,(180)^3} \approx 0{,}01745241.$$

б) Поступая аналогично, находим $(f(x) = \ln (1 + x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$:

$$\lg 11 = \lg (10 + 1) = \lg 10 + \lg (1 + 0{,}1) =$$

$$= 1 + \lg (1 + 0{,}1) = 1 + \frac{1}{\ln 10} \ln (1 + 0{,}1) \approx$$

$$\approx 1+\frac{1}{\ln 10}(0,1-0,5\cdot 10^{-2}+0,3333\cdot 10^{-3}-0,25\cdot 10^{-4}+R_5)$$

$$\left(\frac{|R_5|}{\ln 10}<10^{-6}\right).$$

Итак, $\lg 11\approx 1,04139$.

Используя разложения I—V, найти следующие пределы:

266. $z=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right].$

Решение. Применяя разложения I и IV, находим

$$z=\lim_{x\to+\infty}x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^{11}}\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\right.$$

$$+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{6x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+$$

$$\left.+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{12x^5}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)-1-\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^{11}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{1}{6}.$$

267. $w=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$

Решение. Применение разложения V дает

$$w=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

268. $w=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right).$

Решение. Пользуясь разложениями II и III, получим

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{2}+o(x^4)}{x^2(x+o(x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3(x^3+o(x^4))}=\frac{1}{3}.$$

269. $w=\lim\limits_{x\to 0}x^{-5}[\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}].$

Решение. Воспользуемся разложениями II и IV. Тогда получим

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left[\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}+o(x^6)-\right.$$

$$\left.-x\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}+o(x^4)\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^5}{36}+\frac{x^5}{120}-x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{9}+o(x^5)\right]=\frac{19}{90}.$$

270. $w = \lim\limits_{x\to 0} x^{-3}[1-(\cos x)^{\sin x}]$.

Решение. Пользуясь представлением $u^v = e^{v\ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$ и разложениями I, V, находим

$$w = \lim_{x\to 0} x^{-3}[1-e^{\sin x \ln\cos x}] = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+\sin x\ln\cos x + o(x^3))}{x^3} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

271. $w = \lim\limits_{x\to 0} x^{-3}[\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x]$.

Решение. Здесь применяем разложение I, а также используем результат решения примера 253. Имеем

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3 x + o(x^3) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Для бесконечно малой при $x \to 0$ величины y определить главный член вида cx^n (c — постоянная), если:

272. $y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$.

Решение. Прежде всего установим разложение

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Действительно, представляя $\operatorname{tg} x$ в виде

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

и используя разложения II, III, IV, получаем

$$\operatorname{tg} x = \sin x\,(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin^5 x +$$

$$+ \frac{5}{16}\sin^7 x + o(x^8) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^5 + \frac{5}{16}x^7 + o(x^8) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8),$$

что и требовалось доказать.

Используя эту формулу, а также упомянутые разложения, получаем

$$y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x) = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{2}{15}\sin^5 x +$$
$$+ \frac{17}{315}\sin^7 x - \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5!} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7!} + o(x^8) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^5 +$$
$$+ \frac{17}{315}x^7 - x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5\right)^3 -$$
$$- \frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 + \frac{x^7}{7!} + o(x^8) = \frac{x^7}{30} + o(x^8);$$

отсюда $cx^n \equiv \frac{x^7}{30}$, $c = \frac{1}{30}$, $n = 7$.

273. $y = (1 + x)^x - 1$.

Решение. Применяя разложения I и V, получаем

$$y = e^{x \ln(1+x)} - 1 = x \ln(1 + x) + o(x^2) =$$
$$= x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).$$

Итак, $cx^n \equiv x^2$, $c = 1$, $n = 2$.

274. $y = 1 - \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

Решение. Используя формулу $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$, а также разложения V, I, находим

$$y = 1 - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1} = 1 - e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1} =$$
$$= 1 - e^{-\frac{x}{2} + o(x)} = 1 - \left[1 - \frac{x}{2} + o(x)\right] = \frac{x}{2} + o(x);$$
$$cx^n \equiv \frac{x}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad n = 1.$$

275. Подобрать коэффициенты A и B так, чтобы при $x \to 0$ было справедливо асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5).$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5),$$

откуда

$$(x + Bx^3)\cos x = (1 + Ax^2)\sin x + O(x^7).$$

Используя разложения II, III, получаем

$$(x + Bx^3)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) = (1 + Ax^2)\left(x - \frac{x^3}{6} +\right.$$
$$\left. + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)\right) + O(x^7),$$

откуда

$$x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}+O(x^7)+Bx^3-B\frac{x^5}{2}=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^7)+Ax^3-\frac{Ax^5}{6}+O(x^7).$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{2}B=A-\frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{24}-\frac{B}{2}=\frac{1}{120}-\frac{A}{6},$$

откуда

$$A=-\frac{2}{5},\quad B=-\frac{1}{15}.$$

276. При каких коэффициентах A, B, C и D справедлива при $x\to 0$ асимптотическая формула

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5)?$$

Решение. Имеем

$$e^x(1+Cx+Dx^2)=1+Ax+Bx^2+O(x^5). \tag{1}$$

Так как

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^5),$$

то из (1) получаем

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right](1+Cx+Dx^2)=$$

$$=1+Ax+Bx^2+O(x^5),$$

откуда, удерживая степени x не выше четвертой, находим

$$1+Cx+Dx^2+x+Cx^2+Dx^3+\frac{x^2}{2}+\frac{C}{2}x^3+$$

$$+\frac{D}{2}x^4+\frac{x^3}{6}+\frac{Cx^4}{6}+\frac{x^4}{24}=1+Ax+Bx^2+O(x^5).$$

Следовательно, имеем систему уравнений:

$$C+1=A;\quad D+\frac{1}{2}C+\frac{1}{6}=0;$$

$$D+C+\frac{1}{2}=B;\quad \frac{D}{2}+\frac{C}{6}+\frac{1}{24}=0,$$

откуда

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{12},\quad C=-\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{12}$$

277. Считая x малым по абсолютной величине, вывести приближенную формулу вида $x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$ с точностью до члена с x^5. Применить эту формулу для приближенного спрямления дуг малой угловой величины.

Решение. Применяя разложение II, а также разложение для $\operatorname{tg} x$ (см. пример 253), получаем

$$x = \alpha\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \beta\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + O(x^5),$$

откуда $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$.

Так как $\Delta s = \Delta\varphi$ ($R = 1$), а $\sin \Delta\varphi < \Delta\varphi < \operatorname{tg} \Delta\varphi$, то представляется возможным подобрать числа α и β так, чтобы равенство

$$\Delta\varphi = \alpha \sin \Delta\varphi + \beta \operatorname{tg} \Delta\varphi \qquad (\Delta\varphi \to 0)$$

было справедливо с наибольшей точностью, что и было сделано в этом примере.

278. Оценить относительную погрешность следующего правила Чебышева: круговая дуга приближенно равна сумме боковых сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде этой дуги и имеющего высотой $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ее стрелки.

Решение. Из геометрических построений легко получить, что

$$s^* = 2\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{4}{3}(1 - \cos\varphi)^2},$$

где 2φ — центральный угол дуги ($R = 1$); s^* — приближенное значение длины этой дуги, полученное по правилу Чебышева.

Итак, требуется оценить $\left|\frac{s - s^*}{s}\right|$. Имеем

$$\left|\frac{s - s^*}{s}\right| = \left|\frac{\varphi - \sqrt{\sin^2\varphi + \frac{4}{3}(1 - \cos\varphi)^2}}{\varphi}\right| \approx$$

$$\approx \left|1 - \sqrt{1 - \frac{\varphi^4}{90}}\right| \approx \frac{\varphi^4}{180}.$$

§ 10. Экстремум функции.
Наибольшее и наименьшее значения функции

1°. Пусть функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки c. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке c *локальный максимум* (минимум), если найдется такая окрестность точки c, в пределах которой значение $f(c)$ является *наибольшим* (наименьшим) среди всех других значений этой функции.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *экстремум*.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$. Корни уравнения $f'(x) = 0$ называют *точка-*

ми возможного экстремума, или *стационарными точками*. К точкам, подозрительным на экстремум, следует отнести и такие, в которых производная функции $f(x)$ не существует. Те и другие называются *критическими точками*.

2°. Достаточные условия экстремума. *Первое правило*. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c, и непрерывна в точке c. Тогда, если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ *положительна* (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция $f(x)$ имеет в точке c *локальный максимум* (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке нет.

Второе правило. Пусть функция $f(x)$ имеет в данной точке возможного экстремума конечную вторую производную. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке c максимум, если $f''(c) < 0$, и минимум, если $f''(c) > 0$.

Третье правило. Пусть n — некоторое целое положительное число и пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x = c$ производную порядка $n - 1$, а в самой точке c — производную n-го порядка. Пусть в точке $x = c$ выполняются следующие соотношения:

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Тогда, если n — четное число, то функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум в точке c, а именно: максимум, если $f^{(n)}(c) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(c) > 0$.

3°. Абсолютный экстремум. Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ достигается либо в критической точке этой функции, либо в граничных точках a и b этого сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

279. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n — натуральное число).

Решение. Исследование функции на экстремум будем проводить с помощью производной. Дифференцируя, получаем

$$y'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Приравнивая нулю производную, находим стационарную точку $x = 0$. Проверим достаточные условия. Для любого $\varepsilon > 0$ и четного n имеем

$$y'(-\varepsilon) = -\frac{1}{n!}(-\varepsilon)^n e^{\varepsilon} < 0, \quad y'(\varepsilon) = -\frac{1}{n!}\varepsilon^n e^{-\varepsilon} < 0.$$

Следовательно, при n четном экстремума нет.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое и n — нечетное; тогда

$$y'(-\varepsilon) = -\frac{1}{n!}(-\varepsilon)^n e^{\varepsilon} > 0, \quad y'(\varepsilon) = -\frac{1}{n!}\varepsilon^n e^{-\varepsilon} < 0.$$

Поэтому в этой точке функция имеет максимум, равный 1.

280. $y = x^m (1-x)^n$ (m и n целые положительные числа).

Решение. Находим производную и приравниваем ее нулю:

$$y'(x) = (m+n)\, x^{m-1} (1-x)^{n-1} \left(\frac{m}{m+n} - x\right) = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 0\,(m > 1)$, $x_2 = 1\,(n > 1)$, $x_3 = \frac{m}{m+n}$ будут стационарными точками. Проверим достаточные условия.

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{m}{m+n}$. При m четном $y'(-\varepsilon) < 0$, $y'(\varepsilon) > 0$, следовательно, в точке $x_1 = 0$ функция имеет минимум, равный 0. Если m — нечетное, то $y'(-\varepsilon) > 0$, $y'(\varepsilon) > 0$ и экстремума нет.

Аналогично для точки $x_2 = 1$: при n четном $y'(1-\varepsilon) < 0$, $y'(1+\varepsilon) > 0$, поэтому функция y в этой точке имеет минимум, равный 0. При n нечетном: $y'(1-\varepsilon) > 0$, $y'(1+\varepsilon) > 0$, т. е. экстремума нет. Наконец, для точки $x_3 = \frac{m}{m+n}$ имеем

$$y'\left(\frac{m}{m+n} - \varepsilon\right) > 0, \quad y'\left(\frac{m}{m+n} + \varepsilon\right) < 0.$$

Таким образом, в этой точке функция имеет максимум, равный

$$y\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

В случае $m = 1$ ($n = 1$) получим такие же результаты.

281. $y = x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Приравнивая нулю производную

$$y' = \frac{1}{9} \frac{\frac{1}{3} - x}{\sqrt[3]{x^2 (1-x)}} = 0,$$

находим стационарную точку $x_1 = \frac{1}{3}$. В точках $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ производная не существует. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$; тогда

$$y'\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) > 0, \quad y'\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right); \quad y'(-\varepsilon) > 0, \quad y'(\varepsilon) > 0;$$

$$y'(1-\varepsilon) < 0, \quad y'(1+\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, при $x_1 = \frac{1}{3}$ функция имеет максимум, равный $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. При $x_2 = 0$ экстремума нет, а при $x_3 = 1$ функция имеет минимум, равный 0.

282. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ (n — натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

Р е ш е н и е. Из непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 и условия $\varphi(x_0) \neq 0$ следует, что существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой эта функция сохраняет знак, равный знаку $\varphi(x_0)$. Поскольку при четном n разность $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ в δ-окрестности точки x_0 сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком $\varphi(x_0)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум при $\varphi(x_0) > 0$ и максимум при $\varphi(x_0) < 0$. Если же n — нечетное, то разность $f(x) - f(x_0)$ принимает разные по знаку значения в любой δ-окрестности точки x_0, т. е. экстремума нет.

283. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0$. Доказать, что $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$, предполагая, что $P_1'(x_0)$ существует и $Q(x) \in C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению второй производной в точке x_0 находим

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P_1(x_0 + \Delta x)}{\Delta x Q^2(x_0 + \Delta x)} = \frac{P_1'(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

Отсюда

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

284. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее — убывает.

Р е ш е н и е. Нельзя. Например, функция $f(x) = 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 2$, в точке $x_0 = 0$ имеет максимум, так как

$$f(x) - f(0) = -x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

В то же время ее производная

$$f'(x) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

в любом из интервалов $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, где $\delta > 0$ — произвольное, принимает разные по знаку значения и, следовательно, в каждом таком интервале функция не является монотонной.

285. Доказать, что функция $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция $g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$, если $x \neq 0$ и $g(0) = 0$, не имеет в точке $x = 0$ экстремума, хотя $f^{(n)}(0) = 0$, $g^{(n)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Построить графики этих функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим приращение функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = 0$. Имеем

$$\Delta f(0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}, \quad \Delta g(0) = \Delta x e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}.$$

Приращение функции $f(x)$ в любой окрестности точки $x = 0$ положительно, поэтому $f(x)$ имеет в этой точке минимум, равный нулю.

Приращение функции $g(x)$ в точке $x = 0$ не имеет определенного знака ни в какой окрестности этой точки ($\Delta g(0) < 0$ при $\Delta x < 0$ и $\Delta g(0) > 0$ при $\Delta x > 0$), следовательно, $g(x)$ не имеет экстремума при $x = 0$.

Графики функций $f(x)$ и $g(x)$ показаны на рис. 84, *а*, *б*.

286. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$;

б) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \cos\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Построить графики этих функций.

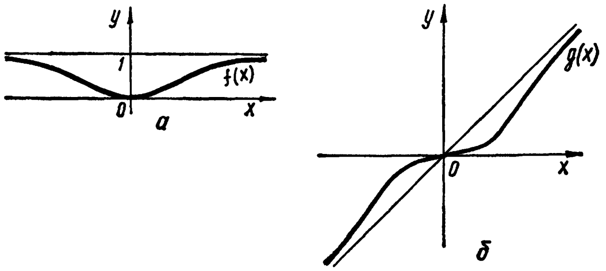

Рис. 84

Решение. а) Исследуем знак приращения функции $f(x)$ в точке $x = 0$. Имеем

$$\Delta f(0) = e^{-\frac{1}{|\Delta x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{\Delta x}\right) > 0$$

при всех $\Delta x \neq 0$, следовательно, функция имеет при $x = 0$ минимум, равный $f(0) = 0$. При $x \neq 0$ функция дифференцируема поэтому для отыскания стационарных точек рассмотрим уравнение $f'(x) = 0$. Очевидно,

$$y' = x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}\left[\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)\operatorname{sgn} x - \cos\frac{1}{x}\right], \quad x \neq 0.$$

Поскольку

$$\left|\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right| \leqslant \sqrt{2},$$

то производная функции $y'(x)$ при переходе через точки, в которых она равна нулю, знака не меняет, поэтому других экстремальных значений, кроме $f_{\min} = f(0) = 0$, функция не имеет.

В случае б) исследование приводит к аналогичным результатам: функция принимает единственное экстремальное значение, равное нулю при $x = 0$.

Графики функций построены на рис. 85, *а*, *б*.

Найти экстремумы следующих функций:

287. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Решение. Имеем

$$y' = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

Поскольку $y'(1) = 0$, то точка $x = 1$ — подозрительна на экстремум. Легко видеть, что при $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$.

Отсюда следует, что в точке $x = 1$ — максимум равный $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

288. $y = |x|\, e^{-|x-1|}$.

Решение. Имеем

$$y' = e^{-|x-1|}\operatorname{sgn} x - |x|\, e^{-|x-1|}\operatorname{sgn}(x-1) \quad (x \neq 0 \text{ и } x \neq 1).$$

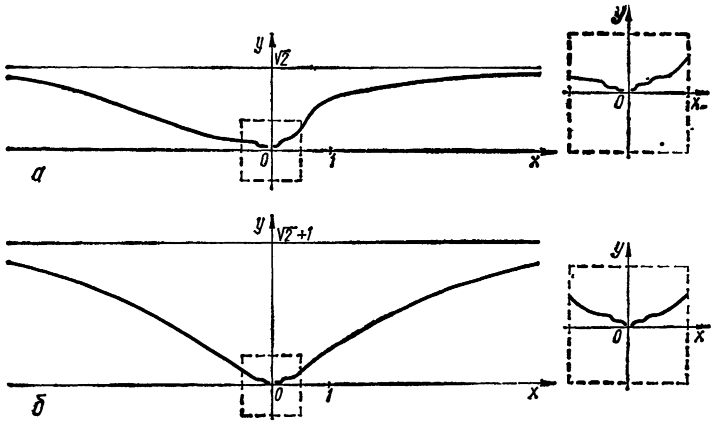

Рис. 85

Точки $x = 0$ и $x = 1$ подозрительны на экстремум, так как производная в них не существует. Кроме того, $y'(-1) = 0$.

Об экстремуме судим по перемене знака $y'(x)$ при переходе через точки $-1, 0, 1$. Имеем

$$y'(-1-\varepsilon) > 0, \quad y'(-1+\varepsilon) < 0 \text{ (максимум, равный } e^{-2});$$

$$y'(-\varepsilon) < 0, \quad y'(\varepsilon) > 0 \text{ (минимум, равный 0)};$$

$y'(1-\varepsilon) > 0$, $y'(1+\varepsilon) < 0$ (максимум, равный 1)
(ε — достаточно малое положительное число).

Найти наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

289. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на сегменте $[-10, 10]$.

Решение. Находим производную $f'(x)$:

$$f'(x) = (2x-3)\operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2) \qquad (x \neq 1,\ x \neq 2);$$

отсюда получаем точки, подозрительные на экстремум:

$$x_1 = \frac{3}{2}\left(f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0\right); \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

(производная не существует).

Сравнивая между собой числа

$$f(x_1)=\frac{1}{4};\quad f(x_2)=0;\quad f(x_3)=0;\quad f(-10)=132;\quad f(10)=72,$$

приходим к выводу, что наибольшее значение функции равно 132, а наименьшее равно 0.

290. $f(x)=\sqrt{5-4x}$ на сегменте $[-1, 1]$.

Решение. Поскольку производная

$$f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$$

существует и отлична от нуля на сегменте $[-1, 1]$, то наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах этого сегмента $f(-1)=3$, $f(1)=1$.

Найти нижнюю (inf) и верхнюю (sup) грани следующих функций:

291. $f(x)=\left(1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}\qquad x\in(0, +\infty)$.

Решение. Найдем производную

$$f'(x)=-e^{-x}\frac{x^n}{n!}<0\qquad (x>0).$$

Сравнивая два числа

$$\lim_{x\to+0} f(x)=1 \text{ и } \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

находим

$$\inf_{0<x<+\infty} f(x)=0,\quad \sup_{0<x<+\infty} f(x)=1$$

(в силу монотонного убывания $f(x)$ на $(0, +\infty)$).

292. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Принимая во внимание четность функции $f(x)$, будем рассматривать полуинтервал $x\geqslant 0$. Имеем

$$f'(x)=-2\sqrt{2}\,xe^{-x^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x^2\right).$$

Отсюда находим точки, подозрительные на экстремум:

$$x_1=0,\ x_k^2=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Сравнивая числа

$$f(0)=1,\ f(x_k)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}-2k\pi}\qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

получаем, что

$$\inf_{-\infty<x<+\infty} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}},\quad \sup_{-\infty<x<+\infty} f(x)=1.$$

293. Определить нижнюю и верхнюю грани функции $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на интервале $x < \xi < +\infty$ и построить график функций

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \text{ и } m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

Решение. Найдем производную

$$f'(\xi) = \frac{3-\xi^2-2\xi}{(3+\xi^2)^2};$$

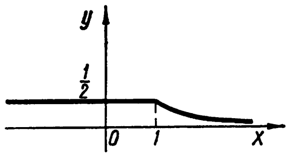

Рис. 86

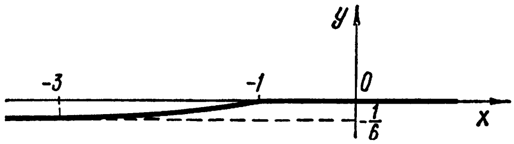

Рис. 87

отсюда получаем точки, подозрительные на экстремум:

$$\xi_1 = -3, \ \xi_2 = 1.$$

Рассмотрим числа

$$f(-3) = -\frac{1}{6}; \quad f(1) = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{\xi \to x+0} f(\xi) = \frac{1+x}{3+x^2}; \quad \lim_{\xi \to +\infty} f(\xi) = 0.$$

Находим, сравнивая их между собой:

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \leqslant 1; \\ \frac{1+x}{3+x^2}, & x > 1; \end{cases}$$

$$m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}, & x \leqslant -3; \\ \frac{1+x}{3+x^2}, & -3 < x \leqslant -1; \\ 0, & x > -1. \end{cases}$$

Графики функций $M(x)$ и $m(x)$ приведены на рис. 86, 87.

294. Пусть $M_k = \sup_x |f^{(k)}(x)|$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Найти M_0, M_1 и M_2, если $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Сравнивая значения $f(0) = 1$ (в точке $x = 0$ производная $f'(x)$ равна нулю) и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, находим, что $M_0 = 1$. Сравнивая значения $f'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(\text{в точках } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ вторая производная обращается в нуль}\right)$ и $\lim_{x\to\infty} |f'(x)| = 0$, получаем, что $M_1 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$. Аналогичным путем находим, что $M_2 = 2e$.

295. Определить наибольший член последовательности $\{a_n\}$, если:

а) $a_n = n^{10}2^{-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$

б) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 10\,000} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$

в) $a_n = \sqrt[n]{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

Решение. Полагая $n = x$, в нашем случае можно считать элементы последовательности $\{a_n\}$ значениями соответствующей дифференцируемой функции $f(x)$ при $x = n$, т. е. $a_n = f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть стационарная точка x_0 функции $f(x)$ удовлетворяет неравенствам $k \leqslant x_0 < k + 1$ (k — натуральное число). Тогда, если последовательность $\{a_n\}$ имеет наибольший член (который будем обозначать символом $\max a_n$), то он равен большему из чисел: a_1, a_k, a_{k+1}.

а) Имеем $f(x) = \dfrac{x^{10}}{2^x}$ $(1 \leqslant x < \infty)$. Производная $f'(x) = 2^{-x}(10 - x\ln 2)x^9$ обращается в нуль при $x = \dfrac{10}{\ln 2} \approx 14{,}5$. Сравнивая числа $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{14} = \dfrac{14^{10}}{2^{14}}$, $a_{15} = \dfrac{15^{10}}{2^{15}}$, находим, что $\max a_n = \dfrac{14^{10}}{2^{14}} \approx 1{,}77 \cdot 10^7$.

б) Аналогично

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 10\,000}, \quad f'(x) = \frac{10^4 - x}{2\sqrt{x}(x + 10^4)^2},$$

откуда $f'(x) = 0$ при $x = 10^4$.

Итак, $a_1 = \dfrac{1}{10\,001}$, $a_{10000} = 0{,}005$, т. е. $\max a_n = 0{,}005$.

в) Имеем $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $f'(x) = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \ln x)$. Отсюда находим, что производная $f'(x) = 0$ при $x = e$. Сравнивая числа $a_1 = 1$; $a_2 = \sqrt{2}$; $a_3 = \sqrt[3]{3}$, находим $\max a_n = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$.

296. Доказать неравенства:

а) $|3x - x^3| \leqslant 2$ при $|x| \leqslant 2$;

б) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $p > 1$;

в) $x^m(a - x)^n \leqslant \dfrac{m^m n^n}{(m + n)^{m+n}}$ при $m > 0$, $n > 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$;

г) $\dfrac{x + a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a \qquad (x > 0,\ a > 0,\ n > 1);$

д) $|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

Доказательство. а) Найдем

$$\max_{|x| \leqslant 2} |f(x)| = \max_{|x| \leqslant 2} |3x - x^3|.$$

Имеем $f'(x)=3-3x^2$. Отсюда $f'(x)=0$ при $x=\pm 1$. Сравнивая значения функции в стационарных точках и на концах сегмента $|f(-2)|$, $|f(1)|$, $|f(2)|$, находим, что $\max\limits_{|x|\leqslant 2}|f(x)|=2$, т. е. $|3x-x^3|\leqslant 2$.

б) Рассмотрим функцию $f(x)=x^p+(1-x)^p$. Ее производная $f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$ обращается в нуль в точке $x=\frac{1}{2}$. Сравнивая числа $f(0)=1$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$; $f(1)=1$, находим, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=1$, а $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=\frac{1}{2^{p-1}}$. Отсюда следует неравенство б).

в) Аналогично находим, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a} f(x)$, где $f(x)=x^m(a-x)^n$ равен $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$ и достигается в точке $x=\frac{ma}{m+n}$, поэтому справедливо неравенство в).

г) При $x>0$, $a>0$, $n>1$ справедливы неравенства $\sqrt[n]{x^n+a^n}-x\leqslant a$ и $\sqrt[n]{\frac{x^n+a^n}{2}}-\frac{x}{2}\geqslant\frac{a}{2}$, которые легко получить с помощью приема, примененного в предыдущих пунктах. Из них непосредственно следуют неравенства г).

д) Рассмотрим функцию $f(x)=|a\sin x+b\cos x|$. Найдем ее производную $f'(x)=(a\cos x-b\sin x)\operatorname{sgn}(a\sin x+b\cos x)$. Она не существует в точках, где $\operatorname{tg} x=-\frac{b}{a}$ $(b\cos x+a\sin x=0)$, и обращается в нуль в точках, где

$$\operatorname{tg} x=\frac{a}{b}\qquad (b\sin x=a\cos x). \tag{1}$$

Подставляя в выражение

$$f(x)=|a\sin x+b\cos x|=\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x}$$

значение $2ab\sin x\cos x=a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x$, найденное из (1), получим $f(x)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, что и требовалось доказать.

297. Доказать неравенство $\frac{2}{3}\leqslant\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\leqslant 2$ при $-\infty<x<+\infty$.

Доказательство основано на сравнении четырех чисел:

$$f_{\max}(x);\quad f_{\min}(x);\quad \lim_{x\to-\infty} f(x);\quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

где

$$f(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)^{-1}.$$

298. Определить «отклонение от нуля» многочлена

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

на сегменте $[-2, 1]$, т. е. найти $E_p=\sup\limits_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|$.

Решение. Находим $P'(x)$:

$$P'(x) = (x-1)^2(x+2) + 2(x-1)x(x+2) + x(x-1)^2.$$

Из уравнения $P'(x) = 0$ находим корни:

$$x_1 = 1, \ x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Сравнивая значения $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ и $f(-2)$, получаем, что

$$E_p = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4}.$$

299. При каком выборе коэффициента q многочлен $P(x) = x^2 + q$ наименее отклоняется от нуля на сегменте $[-1, 1]$, т. е. $E_p = \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|$ принимает минимальное значение.

Решение. Сравнивая числа $P(0) = q$; $P(\pm 1) = q + 1$, находим, что

$$\sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = \max\{|q|, |q+1|\} = \begin{cases} |q|, & \text{если } |q| \geqslant |q+1|; \\ |q+1|, & \text{если } |q+1| \geqslant |q|; \end{cases}$$

$$\text{т. е.} \quad \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = \left|q + \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}.$$

Далее имеем

$$\min E_p = \min_q \max\{|q|, |q+1|\} = \min_q \left\{\left|q + \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

при $q = -\frac{1}{2}$.

300. Абсолютным отклонением двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[0, 1]$ называется число

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[0, 1]$.

Решение. Дифференцируемая на сегменте $[0, 1]$ функция $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ на концах этого сегмента принимает равные значения $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и на интервале $(0, 1)$ имеет единственную стационарную точку $x = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\Delta = \max\left\{|\varphi(0)|, \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right|\right\} = \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{4}{27}.$$

301. Функцию $f(x) = x^2$ на сегменте $[x_1, x_2]$ приближенно заменить линейной функцией $g(x) = (x_1 + x_2)x + b$ так, чтобы абсолютное отклонение функций $f(x)$ и $g(x)$ было наименьшим, и определить это наименьшее абсолютное отклонение.

Решение. Функция $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, на концах этого сегмента принимает равные значения $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = -b - x_1x_2$ и на интервале (x_1, x_2) имеет единственную стационарную точку $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Следовательно,

$$\min\Delta = \min\left\{\max\left\{|\varphi(x_1)|,\ \left|\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|\right\}\right\},$$

откуда

$$|\varphi(x_1)| = \left|\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|,$$

или

$$\varphi^2(x_1) = \varphi^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

т. е.

$$(x_1x_2)^2 + 2bx_1x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^4 + 2b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2);$$

$$g(x) = (x_1+x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2);$$

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

Определить число вещественных корней уравнения и отделить эти корни, если:

302. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y_1(x) = y_2(x)$, где $y_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $y_2(x) = 10$. Исследуем функцию $y_1(x)$ на экстремум. Ее производная $y_1'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1$; $x_2 = 3$, причем $y_1''(1) < 0$, $y_1''(3) > 0$, поэтому $y_{1\max} = y_1(1) = 4$, $y_{1\min} = y(3) = 0$. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty} y_1(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1(x) = +\infty$. Таким образом, кубическая парабола $y_1(x)$ и прямая $y_2(x)$ пересекаются в одной точке; поэтому уравнение имеет один вещественный корень x_0 $(3 < x_0 < +\infty)$.

303. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

Решение. Записав уравнение в виде $y_1(x) = y_2(x)$, где $y_1(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; $y_2(x) = -h$, и применяя ту же схему исследования, что и при решении примера 302, получим

$$y_1'(x) = 3x^2 - 6x - 9;\quad y_1'(-1) = 0;\quad y_1'(3) = 0;$$

$$y_1''(-1) < 0;\quad y_1''(3) > 0;$$

$$y_{1\max} = y_1(-1) = 5;\quad y_{1\min} = y_1(3) = -27;$$

$$\lim_{x\to-\infty} y_1(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} y_1(x) = +\infty.$$

Нули функции:

$$x_1 = \frac{3(1-\sqrt{5})}{2};\quad x_2 = 0;\quad x_3 = \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Если $-\infty < h < -5$, то уравнение имеет один корень $\alpha_1\left(\frac{3(1+\sqrt{5})}{2} < \alpha_1 < +\infty\right)$; если $-5 < h < 0$, то уравнение имеет три вещественных корня: β_1, β_2, $\beta_3\left(\frac{3(1-\sqrt{5})}{2} < \beta_1 < -1,\ -1 < \beta_2 < 0,\ \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} < \beta_3 < +\infty\right)$; если $0 < h < 27$, то уравнение имеет три вещественных корня: γ_1, γ_2, $\gamma_3\left(-\infty < \gamma_1 < \frac{3(1-\sqrt{5})}{2},\ 0 < \gamma_2 < 3,\ 3 < \gamma_3 < \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}\right)$; если $27 < h < +\infty$, то уравнение имеет один вещественный корень $\delta_1\left(-\infty < \delta_1 < \frac{3(1-\sqrt{5})}{2}\right)$.

304. $\ln x = kx$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y_1(x) = y_2(x)$, где $y_1(x) = \frac{\ln x}{x}$, $y_2(x) = k$ $(x > 0)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+0} y_1(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1(x) = 0$; $y_1'(e) = 0$, то функция $y_1(x)$ в интервале $(0, +\infty)$ принимает наибольшее значение в точке $x = e$, равное $\frac{1}{e}$. Кроме того, $y_1(1) = 0$. Если $k > \frac{1}{e}$, то кривая $y_1(x)$ и прямая $y_2(x)$ не пересекаются и уравнение вещественных корней не имеет. Если $0 < k < \frac{1}{e}$, то уравнение имеет два вещественных корня: α_1, α_2 $(1 < \alpha_1 < e,\ e < \alpha_2 < +\infty)$.

Если $k < 0$, то уравнение имеет один вещественный корень β_1 $(0 < \beta_1 < 1)$.

305. $e^x = ax^2$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y_1(x) = y_2(x)$, где $y_1(x) = x^{-2}e^x$; $y_2(x) = a$. Дифференцируя, находим $y_1'(x) = x^{-2}e^x\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Функция $y_1(x)$ имеет в точке $x = 2$ минимум, равный $\frac{e^2}{4}$, так как $y_1(x) \to +\infty$ при $x \to +0$ и $x \to +\infty$. Если $0 < a < \frac{e^2}{4}$, то кривая $y_1(x)$ и прямая $y_2(x)$ не пересекаются, т. е. при положительных x уравнение вещественных корней не имеет. Если $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$, то уравнение имеет два вещественных корня: $0 < \alpha_1 < 2$; $2 < \alpha_2 < +\infty$. В силу того, что при $-\infty < x < 0$ функция монотонно возрастает $(\inf f(x) = 0,\ \sup f(x) = +\infty)$ при любом $a > 0$ всегда будет один корень, лежащий на отрицательной полуоси. Итак, при $0 < a < \frac{e^2}{4}$ уравнение имеет один корень α_1 $(-\infty < \alpha_1 < 0)$; при $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ — три корня: β_1, β_2, β_3 $(-\infty < \beta_1 < 0,\ 0 < \beta_2 < 2,\ 2 < \beta_3 < +\infty)$.

306. $\sin^3 x \cos x = a$.

Решение. Рассмотрим производную π-периодической функции $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$. Имеем $f'(x) = \sin^2 x(3 - 4\sin^2 x)$. Ее нули на отрезке $[0, \pi]$: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. Легко установить, что точки $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$ являются экстремальными (соответственно максимума и минимума) для функции $f(x)$. Сравнивая числа $f(0) = f(\pi) = a$; $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a$; $f_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a$, заключаем, что при $0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ существуют два корня функции $f(x)$: $0 < x_1 < \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} < x_2 < \frac{2\pi}{3}$; при $a > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ корни отсутствуют. Если же $-\frac{3\sqrt{3}}{16} < a < 0$, то имеются два корня: $\frac{\pi}{3} < x_3 < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} < x_4 < \pi$; при $a < -\frac{3\sqrt{3}}{16}$ — корни отсутствуют.

307. При каком условии уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет: а) один вещественный корень; б) три вещественных корня. Изобразить соответствующие области на плоскости (p, q).

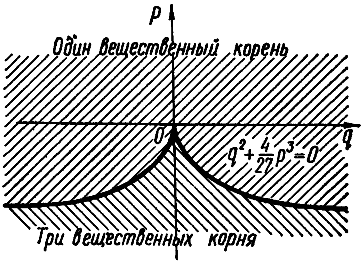

Рис. 88

Решение. Так как $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$, где $f(x) = x^3 + px + q$, то при условиях: или $f_{\min} > 0$, или $f_{\max} < 0$, или $f'(x) \geqslant 0$ имеем только один вещественный корень. Если же $f_{\max} \geqslant 0$ и $f_{\min} \leqslant 0$, то имеем три вещественных корня.

Найдем $f_{\max}$ и $f_{\min}$, судя по производной $f'(x) = 3x^2 + p$. Ее нули $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $p < 0$ (при $p > 0$ имеется один вещественный корень исходного уравнения). Судя по знаку второй производной в точках $x_{1,2}$, находим, что

$$f_{\max} = q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad f_{\min} = q + \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Для того чтобы существовало три вещественных корня, требуется выполнение условия: $f_{\max} \geqslant 0$ и $f_{\min} \leqslant 0$. Это дает:

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \leqslant q \leqslant -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

откуда

$$|q| \leqslant -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

или

$$q^2 + \frac{4}{27}p^3 \leqslant 0.$$

Для существования только одного вещественного корня требуется, чтобы или $f_{\min} > 0$, или $f_{\max} < 0$, или $f'(x) \geqslant 0$. Из этого следует, что

$$q^2 + \frac{4}{27}p^3 > 0$$

(условие $p > 0$ включается в это неравенство).

Соответствующие области на плоскости (p, q) изображены на рис. 88.

§ 11. Построение графиков функций по характерным точкам

Исследование и построение графика функции $y = f(x)$ целесообразно проводить по следующей схеме:

1. *Определить область существования функции, периодичность, точки пересечения с осью Ox и интервалы знакопостоянства, симметрию графика функции, найти точки разрыва и интервалы непрерывности.*
2. *Выяснить вопрос о существовании асимптот.*
3. *Найти интервалы монотонности функции и точки экстремума.*
4. *Указать интервалы сохранения направления выпуклости и точки перегиба графика функции.*
5. *Построить график функции.*

Построить графики следующих функций:

308. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Исследование. 1. Функция определена и непрерывна при всех x, положительна при $x > 2$ и отрицательна при $x < 2$; $y(2) = 0$.

2. Из $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm 1$ следует, что $y = 1$ — асимптота графика функций при $x \to +\infty$, а $y = -1$ — при $x \to -\infty$.

3. Поскольку производная

$$y' = \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \begin{cases} < 0 \text{ при } x < -\dfrac{1}{2}; \\ > 0 \text{ при } x > -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

то функция убывает при $x < -\frac{1}{2}$ и возрастает при $x > -\frac{1}{2}$, а при $x = -\frac{1}{2}$ имеет минимум, равный $-\sqrt{5} \approx -2{,}24$.

4. Судя по знакам второй производной:

$$y'' = -\frac{4\left(x + \dfrac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\left(x - \dfrac{\sqrt{41}-3}{8}\right)}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \begin{cases} < 0 \text{ при } x < -\dfrac{3+\sqrt{41}}{8}; \\ > 0 \text{ при } -\dfrac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \\ \qquad < \dfrac{3-\sqrt{41}}{8}; \\ < 0 \text{ при } \dfrac{3-\sqrt{41}}{8} < x, \end{cases}$$

заключаем, что при $x < -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1{,}18$ и $x > \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \approx$ $\approx 0{,}42$ график функции выпуклый вверх, при $-\frac{3+\sqrt{41}}{8} < x <$ $< \frac{3-\sqrt{41}}{8}$ график выпуклый вниз; точки перегиба $x_1 \approx -1{,}18$; $y_1 \approx -2{,}06$ и $x_2 \approx 0{,}42$; $y_2 \approx -1{,}46$.

5. График функции изображен на рис. 89.

309. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

Исследование. 1. Функция определена, непрерывна и отрицательна при всех x; ее график симметричен относительно оси Oy, поскольку $y(x) = y(-x)$.

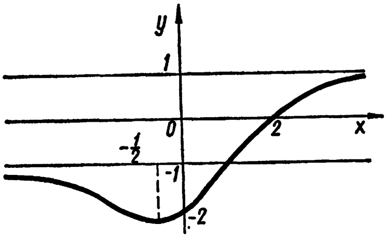

Рис. 89

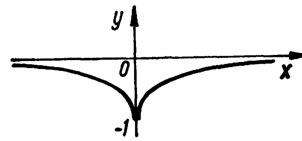

Рис. 90

2. Поскольку предел $\lim\limits_{x\to\infty} y$ равен нулю, то $y = 0$ — асимптота; других асимптот нет.

3. По знакам производной

$$y' = \frac{2\left[(x^2+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}\right]}{3x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} \begin{cases} < 0 \text{ при } x < 0; \\ > 0 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

заключаем, что функция убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$, а при $x = 0$ имеет минимум, равный -1.

4. Поскольку

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x^2+1)^{-\frac{5}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}\right] < 0$$

$$(0 < |x| < +\infty),$$

то график функции выпуклый вверх и точек перегиба нет.

5. По полученным данным строим график функции (рис. 90).

310. $y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

Исследование. 1. Функция определена, непрерывна и положительна при всех $x > 0$.

2. Из очевидного равенства $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$ следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота при $x \to +0$. Имеется наклонная асимптота

$y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (y - x) = \frac{3}{2}$, т. е. $y = x + \frac{3}{2}$.

3. Первая производная y' удовлетворяет неравенствам

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} (1 + x)^{\frac{1}{2}} (2x - 1) \begin{cases} < 0, \text{ если } x < \frac{1}{2}; \\ > 0, \text{ если } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

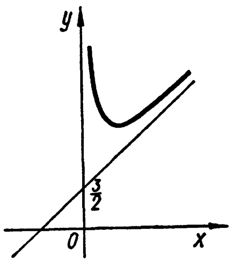

Рис. 91

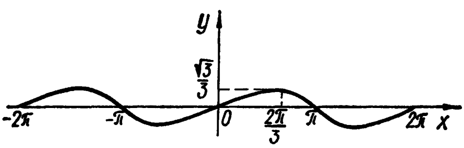

Рис. 92

следовательно, функция убывает при $0 < x < \frac{1}{2}$ и возрастает при $x > \frac{1}{2}$, а при $x = \frac{1}{2}$ имеет минимум, равный $\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$.

4. Поскольку

$$y'' = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} (1 + x)^{-\frac{1}{2}} > 0 \qquad (0 < x < +\infty),$$

то график функции выпуклый вниз.

5. График представлен на рис. 91.

311. $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

Исследование. 1. Функция определена и непрерывна при всех x; периодична с периодом 2π; имеет центр симметрии — начало координат; $y = 0$ при $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Очевидно, что $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} \sin x$.

2. Асимптот нет. Принимая во внимание периодичность, дальнейшее исследование проводим на сегменте $[0, 2\pi]$.

3. По знакам первой производной

$$y' = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2} \begin{cases} > 0, \text{ если } 0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3}; \\ < 0, \text{ если } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}; \\ > 0, \text{ если } \frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

заключаем, что при $0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$ функция возрастает, при $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ — убывает, а при $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ и $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ имеет соответственно максимум и минимум, равные $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}58$.

4. Поскольку

$$y'' = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^2} \begin{cases} <0, & \text{если } 0<x<\pi; \\ >0, & \text{если } \pi<x<2\pi, \end{cases}$$

то при $0 < x < \pi$ график выпуклый вверх, при $\pi < x < 2\pi$ — вниз; причем $x_1 = \pi$, $y_1 = 0$ — точка перегиба.

5. График изображен на рис. 92.

312. $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

Исследование. 1. Функция существует, непрерывна и положительна при всех $x > 1$ и при $x < -1$; причем $y > 1$ при этих значениях x; график симметричен относительно оси Oy; $y(-1-0) = y(1+0) = 2^{\sqrt{2}}$.

2. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$, то $y = 1$ — асимптота при $x \to \infty$.

3. Имеем

$$y' = xy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\ln 2 \begin{cases} >0, & \text{если } x<-1; \\ <0, & \text{если } x>1, \end{cases}$$

следовательно, функция при $x < -1$ возрастает, при $x > 1$ — убывает, а в точках $x = \pm 1$ имеет краевой максимум, равный $2^{\sqrt{2}}$ (функция $f(x)$, $a \leqslant x < \alpha$ ($\beta < x \leqslant b$) имеет в точке a (b) краевой максимум, если существует полуокрестность $(a, \delta) \subset [a, \alpha)$ ($(\delta, \beta) \subset (\beta, b]$) такая, что $f(a) > f(x)$ ($f(b) > f(x)$) для всех x из этой полуокрестности. Аналогично определяется краевой минимум).

4. Из очевидного неравенства

$$y'' = y\ln 2\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x^2\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + x^2\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)\right] >$$
$$> y\ln 2\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right] = y\left[\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right]\ln 2 > 0$$

следует, что график выпуклый вниз.

5. График изображен на рис. 93.

313. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Исследование. 1. Функция определена, непрерывна (как суперпозиция элементарных функций $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$) и положительна при $x > 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, поэтому $y=1$ — асимптота при $x\to+\infty$.

3. Из неравенств

$$y' = \frac{y}{x^2}(1-\ln x)\begin{cases} >0, & \text{если } 0<x<e; \\ <0, & \text{если } e<x<+\infty, \end{cases}$$

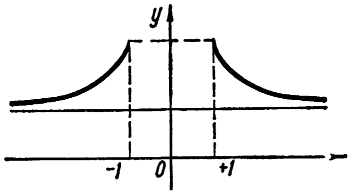

Рис. 93

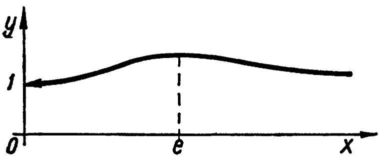

Рис. 94

вытекает, что при $0<x<e$ функция возрастает, при $e<x<+\infty$ — убывает, а при $x=e$ имеет максимум, равный $e^{\frac{1}{e}}$; кроме того, $y(+0)=1$.

4. Исследование точек перегиба и направления выпуклости опускаем.

5. График изображен на рис. 94.

314. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Исследование. 1. Функция определена при $x>-1$; $x\neq 0$; положительна и непрерывна в этой области. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, то $x=0$ — точка устранимого разрыва.

2. Из соотношений $\lim\limits_{x\to-1+0} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$ вытекает, что $x=-1$ — асимптота графика функции при $x\to-1+0$, а $y=1$ — при $x\to+\infty$.

3. Производная

$$y' = y\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]; \quad -1<x<0,\ 0<x<+\infty$$

отрицательна. Действительно, полагая в неравенстве примера 161, г) $\frac{a-b}{b}=x$, имеем неравенство

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad (x>0),$$

которое справедливо и при $-1<x<0$. Пользуясь этим неравенством, получаем

$$y' = y\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right] < y\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{x}{x^2+x^3}\right] = 0.$$

Таким образом, функция убывает при всех x из области определения.

4. Покажем, что вторая производная

$$y'' = y\left[\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^3}\left(2\ln(1+x) - \frac{2x+3x^2}{(1+x)^2}\right)\right]$$

положительна. С этой целью рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = 2\ln(1+x) - \frac{2x+3x^2}{(1+x)^2}.$$

Поскольку $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3} > 0$; $-1 < x < +\infty$ и $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) < 0$, если $-1 < x < 0$ и $\varphi(x) > 0$, если $0 < x < +\infty$. Тогда $\frac{1}{x^3}\varphi(x) > 0$ при $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$; при этих же значениях x $y'' > 0$. Поэтому график функции выпуклый вниз.

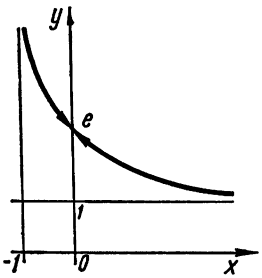

Рис. 95

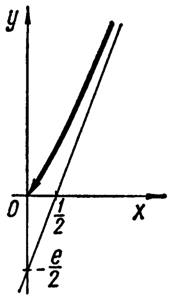

Рис. 96

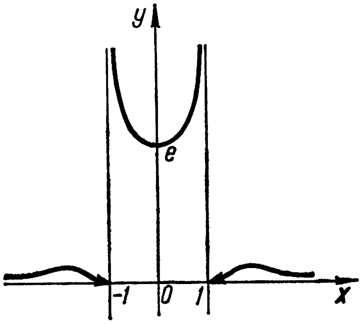

Рис. 97

5. Исходя из этих данных, строим график (рис. 95).

315. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0)$.

Исследование. 1. Функция определена, непрерывна и положительна при всех $x > 0$; $y(+0) = \lim\limits_{x\to+0} xe^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$.

2. Имеется наклонная асимптота

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \quad b = \lim_{x\to+\infty}(y - ex) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - e\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} - e\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e\left[-\frac{1}{2} + o(1)\right] = -\frac{e}{2}.$$

3. Имеем

$$y' = y\left[\frac{1}{x(1+x)} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] > 0.$$

Отсюда следует, что функция возрастает при $x > 0$.

4. Вторая производная

$$y'' = y\left[\frac{2}{x(1+x)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{x(1+x)^2}\right]$$

положительна. Чтобы в этом убедиться, вводим новую переменную $t = \frac{1}{x}$ и применим теорему примера 186, полагая там

$$\varphi(t) = [(1+t)\ln(1+t) + t^2]^2; \quad \psi(t) = t^4 + 3t^3 + t^2; \quad t_0 = 0, \ k = 4.$$

Тогда все условия теоремы 186 будут выполнены. Следовательно, $y'' > 0$ при $x > 0$ и график функции при этих значениях выпуклый вниз.

5. График функции изображен на рис. 96.

316. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$.

Исследование. 1. Функция определена, непрерывна и положительна при всех значениях x, за исключением точек $x = \pm 1$, в которых функция терпит разрыв, причем

$$y(-1-0) = 0; \quad y(-1+0) = +\infty; \quad y(1-0) = +\infty;$$
$$y(1+0) = 0.$$

График функции симметричен относительно Oy.

2. Имеются асимптоты $x = -1$ при $x \to -1+0$ и $x = 1$ при $x \to 1-0$; $y = 0$ при $x \to \infty$.

3. Находим производную

$$y' = 2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2(1-x^2)^2}.$$

Поскольку $y' > 0$ при $-\infty < x < -\sqrt{3}$; $0 < x < 1$; $1 < x < \sqrt{3}$, то функция при этих значениях x возрастает; далее, $y' < 0$ при $-\sqrt{3} < x < -1$; $-1 < x < 0$; $\sqrt{3} < x < +\infty$, следовательно, в этих интервалах функция убывает; в точке $x = 0$ имеется минимум, равный e, а в точках $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$ достигается максимум, равный $\frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0{,}15$.

4. Вычисляя вторую производную

$$y'' = 2y \frac{2x^6(3-x^2)^2 + x^2(1-x^2)(9+x^2+7x^4-x^6)}{(1-x^2)^4(1+x^2)^2},$$

убеждаемся, что $y'' > 0$ при $|x| < 1$. Далее, $y''(\sqrt{1{,}1}) > 0$; $y''(\sqrt{3}) < 0$ и $y''(x) \to +0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, в каждом из интервалов $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$, а в силу четности функции и в каждом из интервалов $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$ имеется по меньшей мере по одной точке перегиба.

5. График изображен на рис. 97.

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

317. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

Исследование. 1. Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны при $-\infty < t < +\infty$; причем при этих значениях t $-\infty < x \leqslant 1$; $-\infty < y < +\infty$.

Следовательно, функция $y = y(x)$ (как функция переменного x) определена при $-\infty < x \leqslant 1$.

2. Поскольку $x(t) \to -\infty$, $y(t) \to \mp\infty$, $\frac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$ при $t \to \pm\infty$, то график функции асимптот не имеет.

3. Производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\,\frac{1-t^2}{1-t}$$

при $t_1 = -1$ $(x_1 = -3)$ обращается в нуль, а при $t_2 = 1$ $(x_2 = 1)$ имеет устранимый разрыв, причем

$$\lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx} = 3.$$

4. Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}\,\frac{(1-t^2)^2}{(1-t)^3}$$

имеет разрыв в точке $t = 1$. Заполним таблицу:

t	$-\infty < t < -1$	$-1 < t < 1$	$1 < t < +\infty$
x	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 1$	$-\infty < x < 1$
y	$-2 < y < +\infty$	$-2 < y < 2$	$-\infty < y < 2$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} < 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$		$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Из таблицы следует, что при $-\infty < x < -3$ функция $y(x)$ убывает; при $-3 < x < 1$ — возрастает; при $x = -3$ имеет минимум, равный -2, а при $x = 1$ — максимум, равный 2.

Если x возрастает от $-\infty$ до 1, то график функции $y = y(x)$ сохраняет выпуклость, направленную вниз; если x убывает от 1 до $-\infty$, то выпуклость направлена вверх; (1, 2) — точка перегиба.

5. Пользуясь полученными данными, строим график (рис. 98).

318. $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

Исследование. Функция $x(t)$ определена и непрерывна при $-\infty < t < 1$; $1 < t < +\infty$, причем $x = 1$ — вертикальная асимптота при $t \to 1$. Из равенства $x(t) = t + 1 + \frac{1}{t-1}$ следует, что $x = t + 1$ — наклонная асимптота. Находим производную $x'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$. Очевидно, что на интервалах $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ функция $x(t)$ возрастает, а на интервалах $(0, 1)$, $(1, 2)$ — убывает; $x_{\max} = 0$ при $t = 0$; $x_{\min} = 4$ при $t = 2$.

График функции $x(t)$ изображен на рис. 99.

Функция $y(t)$ определена и непрерывна при всех значениях t, кроме $t = \pm 1$; причем $t = -1$ и $t = 1$ — асимптоты. Поскольку $y'(t) = -\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0$, то функция $y(t)$ убывает при всех t из области определения (рис. 100).

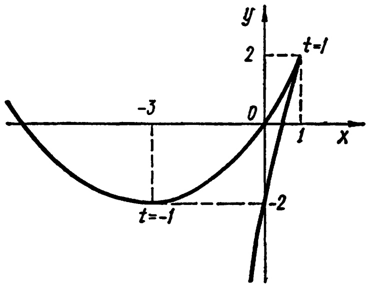

Рис. 98

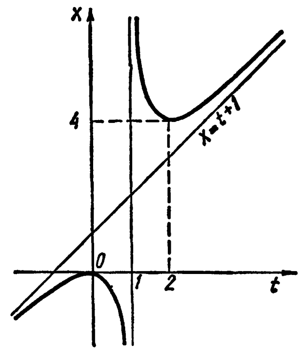

Рис. 99

Из этих исследований вытекает, что функция $y = y(x)$ определена при $-\infty < x \leqslant 0$; $4 \leqslant x < +\infty$. Поскольку $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to +0$ при $t \to \pm\infty$; $x(t) \to \frac{1}{2}$, $y(t) \to \pm\infty$ при $t \to -1 \pm 0$,

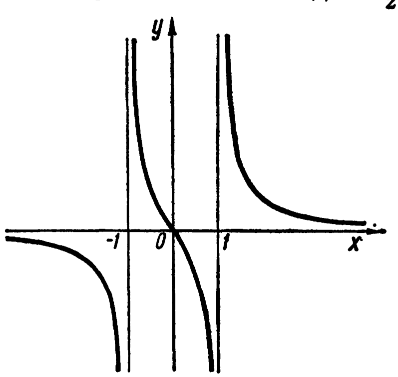

Рис. 100

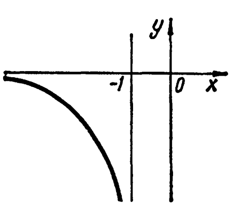

Рис. 101

то $y = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ — асимптоты графика функции $y = y(x)$. Кроме того, $\frac{y}{x} \to \frac{1}{2}$, $y - \frac{x}{2} \to -\frac{3}{4}$ при $t \to 1$, следовательно, $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ — наклонная асимптота.

Находим производные

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3};$$

откуда получаем, что $y''_{x^2} = 0$ при $t_0 \approx -3{,}22$; $t_1 = 1$; причем $x(t_0) \approx$ $\approx -0{,}17$; $y(t_0) \approx 0{,}37$. Сначала построим графики функции на отдельных интервалах.

Если $-\infty < t < -1$, то $-\infty < x < -\frac{1}{2}$; $-\infty < y < 0$;

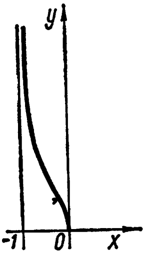

Рис. 102

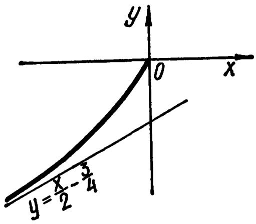

Рис. 103

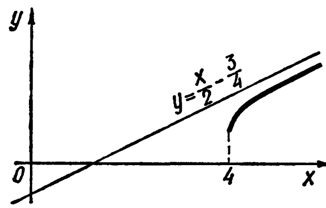

Рис. 104

$y'_x < 0$; $y''_{x^2} < 0$ (рис. 101). Если $-1 < t \leqslant 0$, то $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$; $0 \leqslant y < +\infty$. Вторая производная $y''_{x^2} > 0$ при $-1 < t < t_0$ и $y''_{x^2} <$ < 0 при $t_0 < t < 0$; следовательно, при $t = t_0$ получаем точку перегиба (x_0, y_0), где $x_0 \approx -0{,}17$; $y_0 \approx 0{,}37$ (рис. 102).

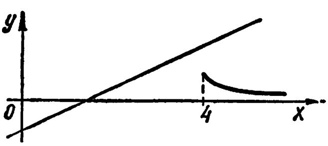

Рис. 105

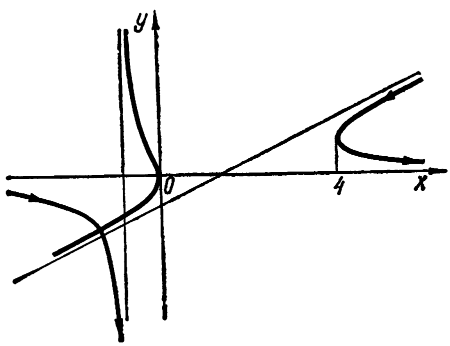

Рис. 106

Пусть $0 \leqslant t < 1$. Тогда $-\infty < x \leqslant 0$, $-\infty < y \leqslant 0$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} >$ > 0 (рис. 103). Если $1 < t \leqslant 2$, то $4 \leqslant x < +\infty$, $\frac{2}{3} \leqslant y < +\infty$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} < 0$ (рис. 104). Наконец, если $2 \leqslant t < +\infty$, то $0 < x \leqslant 4$; $0 < y \leqslant \frac{2}{3}$; $y'_x < 0$; $y''_{x^2} > 0$ (рис. 105).

Окончательный график изображен на рис. 106.

319. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

Исследование. Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны при всех t. Из определения асимптоты следует, что $x = t$, $y =$ $= 2t$ — асимптоты при $t \to +\infty$ соответственно графиков функций $x(t)$ и $y(t)$. Имеем $x'(t) = 1 - e^{-t}$; $x'(0) = 0$; $x''(t) = e^{-t} > 0$ при всех t; $y'(t)=2(1-e^{-2t})$, $y'(0)=0$, $y''(t)=4e^{-2t}>0$ при всех t. Таким образом, $x_{\min}=1$ при $t=0$; $y_{\min}=1$ при $t=0$. Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ выпуклы вниз (рис. 107, *а*, *б*).

Если $-\infty<t<0$, то $1<x<+\infty$, $1<y<+\infty$, $y'_x=2(1+e^{-t})>0$; $y''_{x^2}=-2(e^t-1)>0$. Если же $0<t<+\infty$, то $1<x<+\infty$; $1<y<+\infty$; $y'_x>0$; $y''_{x^2}<0$.

Следовательно, функция $y=y(x)$ возрастает, ее график выпуклый вниз при $t<0$ и вверх — при $t>0$.

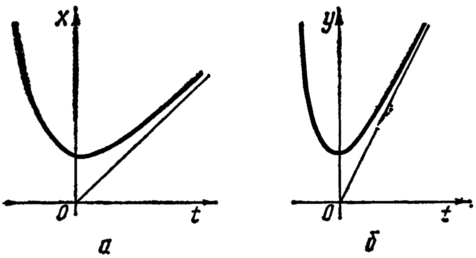

Рис. 107

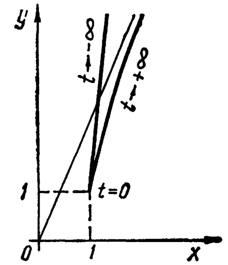

Рис. 108

В точке $x=1$ функция $y(x)$ имеет минимум, равный 1.

Далее, $\frac{y}{x}\to 2$; $y-2x\to 0$ при $t\to+\infty$, поэтому прямая $y=2x$ является асимптотой графика функции при $t\to+\infty$ (рис. 108).

320. $x=\frac{a}{\cos^3 t}$, $y=a\operatorname{tg}^3 t \qquad (a>0)$.

Исследование. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ известны, то относительно функции $y(x)$ выясним следующие вопросы: симметрию, экстремум, участки и характер выпуклости графика функции и существование асимптот.

Поскольку $x(t)=x(-t)$; $y(t)=-y(-t)$, то график функции $y=y(x)$ симметричен относительно оси Ox, а так как $x(t)=-x(\pi+t)$; $y(t)=y(\pi+t)$ и $x\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-x\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$; $y\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=y\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, то график функции $y(x)$ симметричен относительно оси Oy.

Следовательно, для построения всего графика достаточно знать график функции $y(x)$ при $x>0$ и $y\geqslant 0$, т. е. при $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$.

Производная $y'_x=\sin t>0$ при $0<t<\frac{\pi}{2}$, следовательно, функция $y=y(x)$ возрастает на этом промежутке, причем $x\to+\infty$; $y\to+\infty$ при $t\to\frac{\pi}{2}-0$.

Вторая производная $y''_{x^2}=\frac{1}{3a}\cos^5 t\sin^{-1} t>0 \qquad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, откуда следует, что при $0<t<\frac{\pi}{2}$ график функции $y(x)$ выпуклый вниз.

Так как $x \to +\infty$ только при $t \to \frac{\pi}{2}-0$ и $y \to +\infty$ только при $t \to \frac{\pi}{2}-0$, то вертикальных асимптот нет.

Для выяснения вопроса о существовании наклонной асимптоты $y = kx + b$ рассмотрим пределы

$$k = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\cos^{-3} t} = 1, \quad b = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} [y(t) - x(t)] =$$

$$= a \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \left(\operatorname{tg}^3 t - \frac{1}{\cos^3 t}\right) = -\infty.$$

Следовательно, асимптот нет.

График кривой при всех t ($\cos t \neq 0$) изображен на рис. 109.

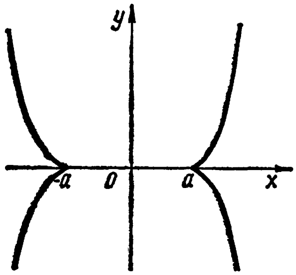

Рис. 109

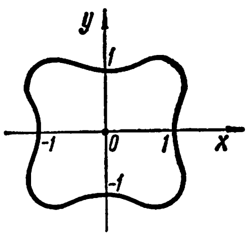

Рис. 110

Представив уравнения кривых в параметрической форме, построить эти кривые, если:

321. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

Исследование. Очевидно, что график функции симметричен относительно осей координат. Представим кривую при $x > 0$ и $y \geqslant 0$ в параметрическом виде, положив $y = tx$ ($t \geqslant 0$):

$$x = \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}, \quad y = t\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}.$$

Вычисляя производные x' и y', выясняем вопрос об экстремумах функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$x'(t) = \frac{(1-2t^2-t^4)\,t}{x(t)\,(1+t^4)^2}, \quad y'(t) = \frac{1+2t^2-t^4}{x(t)\,(1+t^4)^2}.$$

Отсюда следует, что при $t = 0$ достигается минимум функции $x(t)$, равный 1 ($y = 0$); при $t = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ достигается максимум функции $x(t)$, равный $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ $\left(y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; при $t = \sqrt{\sqrt{2}+1}$ достигается максимум функции $y(t)$, равный $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ $\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Нетрудно проверить, что в точках пересечения кривой с координатными осями существует касательная к кривой (рис. 110).

322. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

Исследование. Полагая $y = tx$, получим

$$x = \frac{1}{t^2} - t,\ y = \frac{1}{t} - t^2 \qquad (t \neq 0).$$

Если параметр t изменяется в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, то переменная x может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$; следовательно, функция $y = y(x)$ определена при всех значениях x.

Из параметрического представления кривой получаем равенства

$$y = -x^2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^4},\ y^2 = x - t + t^2,$$

из которых непосредственно вытекают асимптотические соотношения: $y^2 \sim x$ при $t \to \pm 0$ (при этом $x \to +\infty$, $y \to \pm\infty$); $y \sim x$ при $t \to \pm\infty$ (при этом $x \to \pm\infty$, $y \to -\infty$).

Полагая в исходном равенстве $x - y = u$, $x + y = v$, получим равенство $(v^2 - u^2)^2 = 12v^2u + 4u^3$, которое указывает на симметрию графика кривой относительно оси $v = 0$, т. е. относительно прямой $x + y = 0$.

Вычисляя производные

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2t^3(t^6+7t^3+1)}{(2+t^3)^3} \qquad (t \neq 0),$$

находим, что при $t_0 = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}26 \left(x_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1{,}89;\ y_0 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2{,}38\right)$ обе производные y'_x и y''_{x^2} не существуют, а $y'_x = 0$ при $t_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0{,}79 \left(x_2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx 2{,}38;\ y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx -1{,}89\right)$.

Далее, $y''_{x^2} = 0$ при $t_1 = -\sqrt[3]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} \approx -1{,}90$ $(x_1 \approx 2{,}18;\ y \approx -4{,}14)$ и при $t_3 = -\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \approx -0{,}53$ $(x_3 \approx 4{,}14;\ y_3 \approx -2{,}18)$.

Пользуясь этими данными и таблицей

t	$-\infty < t < t_1$	$t_1 < t < t_0$	$t_0 < t < t_2$	$t_2 < t < t_3$	$t_3 < t < 0$	$0 < t < +\infty$
x	$x_1 < x < +\infty$	$x_0 < x < x_1$	$x_0 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
y	$-\infty < y < y_1$	$y_1 < y < y_0$	$y_0 < y < y_2$	$y_3 < y < y_2$	$-\infty < y < y_3$	$-\infty < y < +\infty$
y'_x	$y'_x < 0$	$y'_x < 0$	$y'_x > 0$	$y'_x < 0$	$y'_x < 0$	$y'_x > 0$
y''_{x^2}	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} > 0$	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} > 0$	$y''_{x^2} < 0$

строим график функции $y = y(x)$ (рис. 111).

323. $x^y = y^x$ $(x>0,\ y>0)$.

Исследование. Пусть $y = (1+t)\,x\,(1+t>0,\ t\neq 0)$.

Тогда
$$x = (1+t)^{\frac{1}{t}},\quad y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}.$$

Если $t = 0$, то функция $y = x$ удовлетворяет исходному уравнению.

Поскольку $x\,(t) \to 1$, $y\,(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $x\,(t) \to +\infty$, $y\,(t) \to 1$ при $t \to -1+0$, то прямые $x = 1$ и $y = 1$ являются асимптотами графика функции.

Поскольку
$$\frac{dy}{dx} = (1+t)\frac{t-\ln(1+t)}{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)} < 0 \text{ (см. пример 161, г));}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2}{(1+t)\,x}\cdot\frac{3t^2-2t\,(t+2)\ln(1+t)+(1+t)\ln^2(1+t)}{\left[\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)\right]^3} > 0$$

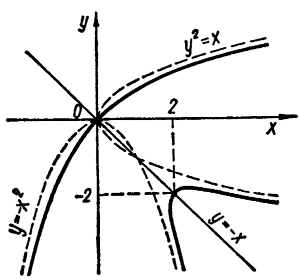

Рис. 111

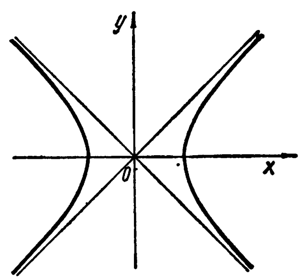

Рис. 112

$(3t^2 + (1+t)\ln^2(1+t) < 2t\,(t+2)\ln(1+t)$ по теореме примера 186), то функция $y = y\,(x)$ убывает и выпукла вниз в области определения (рис. 53).

324. Построить график кривой $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$.

Исследование. График кривой симметричен относительно координатных осей, так как при замене x на $-x$ и y на $-y$ уравнение кривой вида не меняет.

Если $x>0$; $y>0$, то уравнение ветви кривой примет вид $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} y$, откуда $x = \ln(\operatorname{ch} y + \sqrt{1+\operatorname{ch}^2 y})$.

Имеется асимптота $x = ky + b$, где
$$k = \lim_{y\to+\infty}\frac{x\,(y)}{y} = 1;\quad b = \lim_{y\to+\infty}[x\,(y) - y] = 0.$$

Найдем производную
$$x'_y = \frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 y}},$$

откуда следует, что функция $x = x\,(y)$ возрастает при $y>0$, а в точке $y = 0$ достигается минимум, равный $\ln(1+\sqrt{2})$.

Далее,

$$x''_{y^2} = \frac{2\operatorname{ch} y}{(1+\operatorname{ch}^2 y)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

откуда вытекает, что кривая выпукла вниз при $y > 0$. Принимая во внимание симметрию кривой относительно осей координат, строим график функции (рис. 112).

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (φ, ρ) $(\rho \geqslant 0)$:

325. $\rho = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1$ $\quad (a > 0)$.

Исследование. Функция $\rho(\varphi)$ непрерывна, как элементарная;

$\lim\limits_{\varphi \to 1+0} \rho(\varphi) = +\infty$ т. е. имеется асимптота $\varphi = 1$;

$\lim\limits_{\varphi \to +\infty} \rho(\varphi) = 0$, т. е. кривая асимптотически входит в полюс по спирали.

Возьмем производную

$$\rho'_{\varphi} = a\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi \cdot (\varphi - 1)} - \frac{\operatorname{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}\right];$$

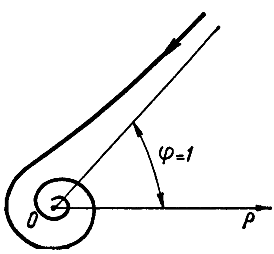

Рис. 113

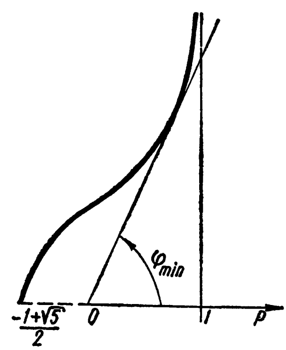

Рис. 114

так как $\varphi - 1 < \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\varphi$ при $\varphi > 1$, то $\rho'_{\varphi} < 0$; следовательно, функция $\rho(\varphi)$ убывает (рис. 113).

326. $\varphi = \arccos\dfrac{\rho - 1}{\rho^2}$.

Исследование. Область существования функции определяется неравенством

$$|\rho - 1| \leqslant \rho^2,$$

откуда следует, что

$$\rho_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \rho < +\infty.$$

Предельные значения φ в граничных точках:

$$\lim_{\rho \to \rho_1 + 0} \varphi(\rho) = \pi; \quad \lim_{\rho \to +\infty} \varphi(\rho) = \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\rho - 1 \neq \rho^2$, то функция $\varphi(\rho)$ нулей не имеет и положительна.

Производная этой функции

$$\varphi'_\rho = \frac{\rho - 2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)^2}}$$

показывает, что в точке $\rho = 2$ достигается минимум функции, равный $\arccos\frac{1}{4}$. В точке $\rho = \rho_1$ производная не существует; функция в этой точке принимает краевой максимум, равный π. При $\rho_1 < \rho < 2$ функция убывает, а при $\rho > 2$ — возрастает.

Как уже было отмечено (см. предельные значения φ в граничных точках), имеется вертикальная асимптота.

Найдем ее расстояние a от полюса. Имеем

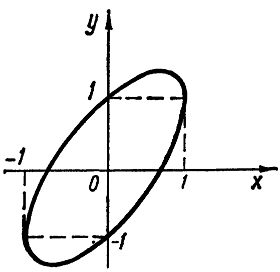

Рис. 115

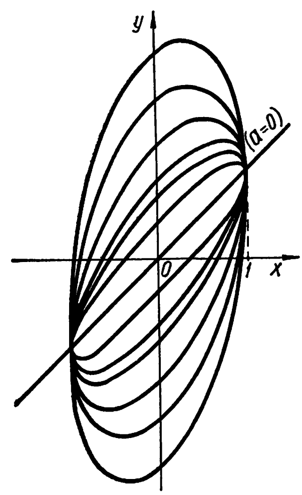

Рис. 116

$$a = \lim_{\rho\to\infty} \rho \cos\varphi(\rho) = \lim_{\rho\to\infty} \rho\,\frac{\rho - 1}{\rho^2} = 1.$$

График изображен на рис. 114.

Построить графики семейства кривых (a — переменный параметр):

327. $y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}$.

Исследование. Рассмотрим два случая:

а) $a > 0$ и б) $a < 0$.

а) $a > 0$. Область существования функции: $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $|x| \leqslant 1$. Нули функции: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{1+a}}$; при $-\sqrt{\frac{a}{1+a}} < x < 1$ функция $y = x + \sqrt{a(1 - x^2)}$ положительна, а при $-1 < x < \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ отрицательна; при $-1 < x < \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ функция $y = x - \sqrt{a(1 - x^2)}$ отрицательна, а при $\sqrt{\frac{a}{1+a}} < x < 1$ — положительна.

Находим производную

$$y' = 1 \pm \frac{ax}{\sqrt{a(1 - x^2)}}.$$

Отсюда следует, что функция $y = x + \sqrt{a(1 - x^2)}$ достигает при $x = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$ максимума, равного $\sqrt{a+1}$, а функция $y = x - \sqrt{a(1-x^2)}$ достигает при $x = -\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ минимума, равного $-\sqrt{a+1}$.

Точки $x = \pm 1$ являются точками «стыка» этих ветвей.

Из выражения для второй производной

$$y'' = \pm \frac{a}{(1-x^2)\sqrt{a(1-x^2)}}$$

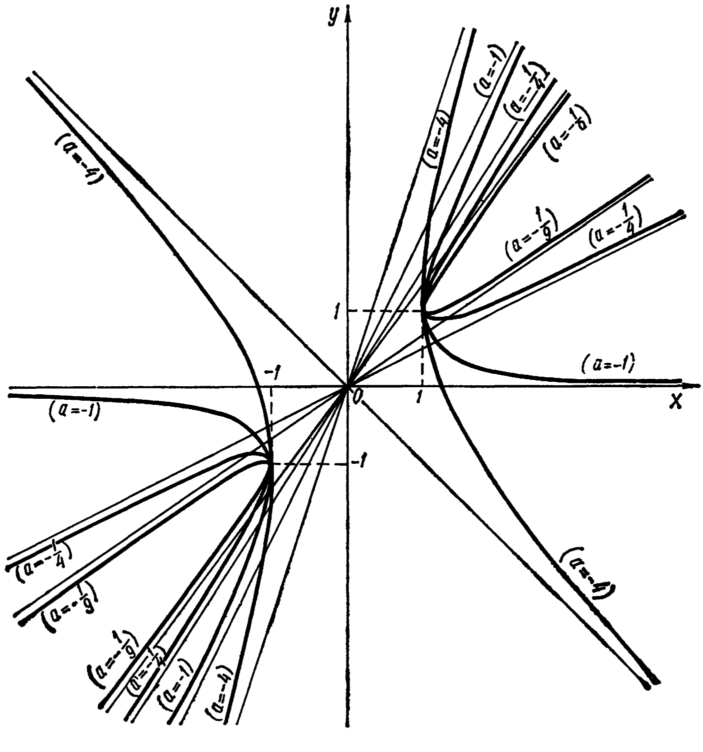

Рис. 117

вытекает, что график первой ветви функции выпуклый вверх, а второй — вниз (рис. 115).

При изменении a от 0 до $+\infty$ получим следующее семейство эллипсов, проходящих через точки $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ (рис. 116):

б) $a < 0$. Область определения функции — $|x| > 1$. Асимптоты $y = k_1 x + b$; $y = k_2 x + b$, где $k_{1,2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \pm \sqrt{-a(x^2-1)}}{x} = 1 \pm \pm \sqrt{-a}$; $b = 0$.

График изображен на рис. 117.

328. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

Исследование. Рассмотрим два случая: $a > 0$ и $a < 0$.

1. $a > 0$. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$. Находим производную

$$y' = c^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

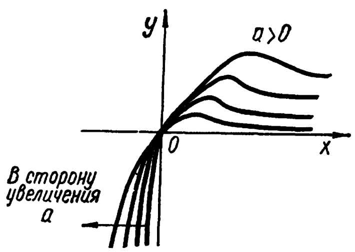

Рис. 118

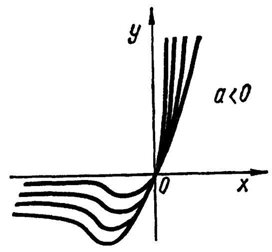

Рис. 119

Отсюда следует, что при $x = a$ достигается максимум, равный $\frac{a}{e}$. Далее,

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a}\right),$$

откуда следует, что в точке $x = 2a$ имеется перегиб функции y, причем при $x < 2a$ график функции выпуклый вверх, а при $x > 2a$ — вниз. Так как $xe^{-\frac{x}{a}} \to 0$ при $x \to +\infty$, то прямая $y = 0$ является асимптотой графика функции при $x \to +\infty$.

2. Если $a < 0$, то, как легко видеть, этот случай сводится к предыдущему, если в нем заменить y на $-y$, а x — на $-x$.

График семейства изображен на рис. 118, 119.

§ 12. Задачи на максимум и минимум функции

329. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = cf^2(x)$ $(c > 0)$ имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

Доказательство. Для определенности предположим, что в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для всех x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Так как $f(x) \geqslant 0$ и $c > 0$, то из последнего неравенства следует:

$$cf^2(x) < cf^2(x_0),$$

т. е.

$$F(x) < F(x_0).$$

Последнее означает, что в точке x_0 функция $F(x)$ достигает максимума. В случае минимума поступаем аналогично.

330. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$, то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки экстремума.

Доказательство. Пусть в точке x_0 достигается максимум функции $f(x)$. Тогда при всех x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство

$$f(x) < f(x_0) \equiv f_0.$$

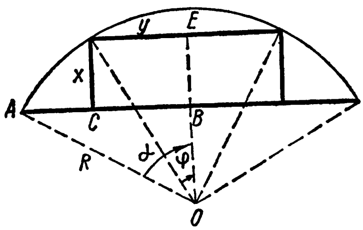

Рис. 120

Так как функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле, то из неравенства $f < f_0$ следует неравенство

$$\varphi(f) < f(f_0),$$

что и требовалось доказать. Аналогично, предположив, что в точке x_0 функция $\varphi(f(x))$ достигает максимума, придем к выводу, что функция $f(x)$ также достигает максимума.

331. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

Решение. Пусть y — основание искомой системы логарифмов. Тогда согласно условию имеем

$$\log_y x = x \qquad (x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1),$$

откуда

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Функция y уже исследована нами в примере 313. Из него следует, в частности, что y не превышает $y_{\max} = e^{\frac{1}{e}}$, т. е. во всех системах с основанием y $(0 < y < e^{\frac{1}{e}},\ y \neq 1)$ такие числа существуют.

332. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

Решение. Пусть высота прямоугольника x, ширина $2y$.

Если обозначить через 2α дугу сегмента, а через 2φ — дугу, стягиваемую стороной прямоугольника, то получаем, что $y = R\sin\varphi$; $x = OE - OB = R(\cos\varphi - \cos\alpha)$ (рис. 120). Следовательно, площадь прямоугольника равна

$$S = 2xy = 2R^2 \sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Приравнивая нулю производную

$$S'(\varphi) = 2R^2(2\cos^2\varphi - \cos\varphi\cos\alpha - 1) = 0,$$

находим, что

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}.$$

Дуга φ_2 не подходит по смыслу задачи.

Так как $S'(\varphi_1 - \varepsilon) > 0$; $S'(\varphi_1 + \varepsilon) < 0$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое), то при

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}$$

функция $S(\varphi)$ имеет максимум.

333. В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

Решение. Пусть x и y — длины полусторон прямоугольника. Тогда $S = 4xy$, причем x и y — координаты точки, лежащей на эллипсе. Для упрощения следует записать параметрические уравнения эллипса:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Тогда $S = 2ab\sin 2t$, откуда $S_{\max} = 2ab$, при $t = \frac{\pi}{4}$, а $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

334. Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

Решение. Уравнение касательной к эллипсу в точке с координатами (x_0, y_0) имеет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

откуда следует, что касательная отсекает от координатных осей отрезки длиной $\frac{a^2}{x_0}$ и $\frac{b^2}{y_0}$.

Следовательно, площадь треугольника $S = \frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$.

Если уравнение эллипса параметризовать, то $S = \frac{ab}{\sin 2t}$, откуда $S_{\min} = ab$ при $t = \frac{\pi}{4}$; $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

335. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h?

Решение. «Мокрый периметр» P определяется по формуле (рис. 121):

$$P = a + \frac{2h}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Площадь «живого сечения» воды:

$$S = h(a + h\operatorname{ctg}\varphi). \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим

$$P = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg} \varphi + \frac{2h}{\sin \varphi}.$$

Производная функции P, равная

$$h\left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{2\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}\right),$$

показывает, что при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ достигается минимум функции P.

336. «Извилистостью» замкнутого контура, ограничивающего площадь S, называется отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади S.

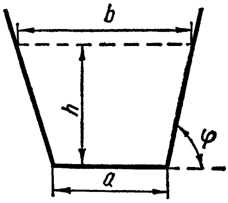

Рис. 121

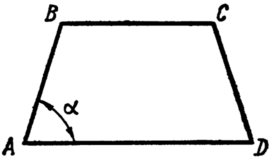

Рис. 122

Какова форма равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), обладающей наименьшей «извилистостью», если основание $AD = 2a$ и острый угол $BAD = \alpha$?

Р е ш е н и е. Пусть П — «извилистость» трапеции. Тогда, согласно определению, имеем (рис. 122):

$$\Pi = \frac{L}{2\sqrt{\pi S}},$$

где

$$S = \frac{BC + 2a}{2} AB \sin \alpha; \quad L = 2AB + BC + 2a.$$

Так как

$$2a - BC = 2AB \cos \alpha, \tag{1}$$

то, обозначая $AB = x$, получим

$$\Pi(x) = \frac{2a + x(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(2a - x\cos\alpha)\, x \sin \alpha}}.$$

Исследуя функцию $\Pi(x)$ на экстремум, находим, что она имеет минимум при

$$x = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Из (1) получаем

$$BC = 2a \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

так как половина высоты трапеции $r = \frac{x}{2} \sin \alpha$ равна расстоянию от точки $O\,(a, r)$ до стороны AB, то в найденную трапецию можно вписать окружность радиуса r.

337. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

Р е ш е н и е. Если под α понимать центральный угол оставшегося сектора, то объем конуса V равен

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}.$$

Исследование этой функции от α на экстремум показывает, что максимум ее достигается при

$$\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

338. Два корабля плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ между собой.

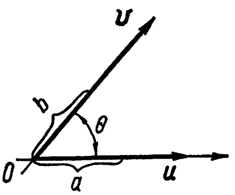

Рис. 123

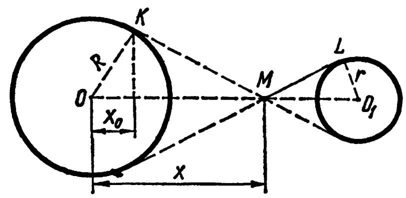

Рис. 124

Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент расстояния их от точки пересечения путей были соответственно равны a и b.

Р е ш е н и е. По теореме косинусов имеем

$$r^2 = (a+ut)^2 + (b+vt)^2 - 2(a+ut)(b+vt)$$

(рис. 123), где r — расстояние между кораблями в произвольный момент времени t.

Исследуя функцию $r^2(t)$ на экстремум, находим, что

$$r'(t_0) = 0; \quad t_0 = \frac{(bu+av)\cos\theta - au - bv}{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}.$$

Подставляя t_0 в $r^2(t)$, получим

$$r_{\min} = \frac{|ub - va|\sin\theta}{\sqrt{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}}.$$

Если u поменять на $-u$, то в силу тождеств

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \text{ и } \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

получим

$$r_{\min} = \frac{|ub + va|\sin\theta}{\sqrt{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}}.$$

339. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена вне этих шаров.

При каком положении точки сумма площадей освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшей?

Р е ш е н и е. Найдем сумму площадей освещенных частей поверхностей как функцию расстояния x. Имеем (рис. 124)

$$S = 2\pi R(R - x_0) = 2\pi R^2\left(1 - \frac{R}{x}\right);$$

$$S_1 = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{a - x}\right) \qquad (a \geqslant r + x),$$

где a — расстояние между центрами шаров.

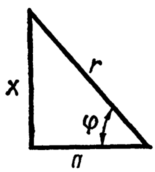

Рис. 125

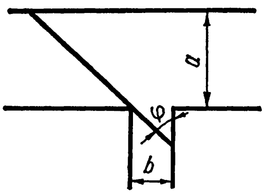

Рис. 126

Исследовав функцию $S + S_1 = f$ на экстремум, находим значение x, при котором достигается максимум этой функции; при этом

$$a \geqslant r + x = r + \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Если же производная $f'(x) < 0$, то максимальное значение функции $f(x)$ достигается при $x_1 = a - r$; при этом выполняется неравенство

$$a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

340. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Р е ш е н и е. Под освещенностью I понимается величина

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где r — расстояние от источника света до точки наблюдения, $k = \text{const}$, φ — угол, изображенный на рис. 125. Имеем

$$I(x) = \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда находим высоту x_0, при которой достигается максимум функции $I(x)$: $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

341. К реке шириной a *м* построен под прямым углом канал шириной b *м*. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

Решение. Длина корабля l, как следует из рис. 126, равна

$$\frac{b}{\sin\varphi}+\frac{a}{\cos\varphi}.$$

Исследовав на экстремум функцию l, получаем, что минимальное значение она принимает при

$$\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Таким образом, максимально возможная длина корабля равна

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\ \text{м}.$$

342. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

Решение. Предположим, что судно прошло S *км* за T суток. Тогда расходы R будут равны

$$Ta+kTv^3,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Но так как $T=\frac{S}{v}$, то

$$R=\frac{Sa}{v}+kSv^2,$$

откуда находим скорость, при которой расходы минимальны:

$$v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

343. Груз весом P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

Решение. Проектируя приложенные к грузу силы на горизонтальное направление, из условия равновесия их получаем (рис. 127):

$$T=F_pk=(P-F\sin\varphi)k=F_T=F\cos\varphi,$$

откуда

$$F=\frac{kP}{k\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

Исследовав функцию $F(\varphi)$ на экстремум, находим, что при

$$\varphi=\operatorname{arctg}k$$

величина силы F будет наименьшей.

344. В чашку, имеющую форму полушара радиуса a, опущен стержень длины $l>2a$.

Найти положение равновесия стержня.

Решение. Найдем потенциальную энергию П стержня относительно дна чашки. Имеем

$$\Pi = mgh,$$

где $h = \frac{l}{2}\sin\varphi + y$ — высота центра тяжести стержня относительно дна чашки (рис. 128).

Далее, так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-y}{a-x} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, то получаем

$$x = -a\cos 2\varphi.$$

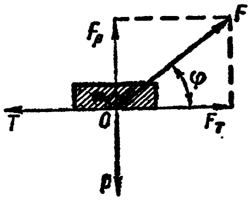

Рис. 127

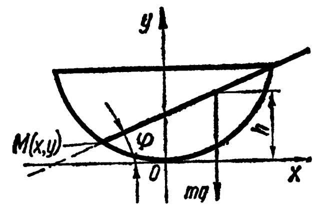

Рис. 128

Использовав уравнение полуокружности, находим, что

$$y = a(1 - \sin 2\varphi).$$

Итак,

$$\Pi = mg\left(\frac{l}{2}\sin\varphi + a(1 - \sin 2\varphi)\right).$$

Поскольку стержень стремится занять положение с минимумом потенциальной энергии, то необходимо найти φ_0, при котором достигается $\Pi_{\min}$. Имеем

$$\cos\varphi_0 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}.$$

Так как $\cos\varphi \leqslant 1$, то равновесие возможно только для $l \leqslant 4a$; при $l > 4a$ равновесие невозможно.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций:

1. $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi x, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

2. а) $f(x) = \inf\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant x} \{\cos\xi\}$; б) $f(x) = \sup\limits_{\frac{\pi}{2} \leqslant \xi \leqslant x} \{\cos\xi\}$.

3. $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n|x|}$.

4. а) $f(x) = \varphi[\varphi(x)]$; в) $f(x) = \psi[\varphi(x)]$;
   б) $f(x) = \varphi[\psi(x)]$; г) $f(x) = \psi[\psi(x)]$,

где

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{если } |x|\leqslant 1;\\ x^2, & \text{если } |x|>1;\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } 0\leqslant x<+\infty;\\ 1, & \text{если } -\infty<x<0.\end{cases}$$

5. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^k}$.

6. а) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\operatorname{arctg}\dfrac{\pi n^2+4kx^2}{4n^2-\pi kx^2}$;

б) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\sin\dfrac{k^2x}{n^3}\right)$.

Вычислить левую и правую производные следующих функций:

7. а) $y=\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$, где $\varphi(t)$ — расстояние до ближайшего целого числа;

б) $y=\min(\operatorname{tg}x,\ 2-\sin 2x)$ $\qquad\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $y=\max(4^{|x|-1},\ x^2)$.

8. $f(x)=[x^2]\,|\sin\pi x^2|$ (построить график этой функции).

9. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$ $\qquad(x\neq 1)$, $f(1)=1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$ $\qquad(x\neq 1)$, $f(1)=0$.

10. а) $f(x)=\varlimsup\limits_{t\to\infty}e^{x\sin t^2}$; б) $f(x)=\varliminf\limits_{t\to\infty}e^{x\sin t^2}$.

11. $f(x)=[x]^{[x]}$ $\qquad(x\geqslant 1)$.

12. $y=\begin{cases}|\sin\pi x|^{\frac{3}{2}}, & x \text{ рационально};\\ 0, & x \text{ иррационально}.\end{cases}$

13. Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=|x|^{|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln|\sin x|}$.

14. При каком условии функция

$$f(x)=|x|^{2\alpha}\,[\,|x|^{2\beta}]\qquad(x\neq 0)\ \text{и}\ f(0)=0$$

дифференцируема при $x=0$?

15. Пусть

$$f_k(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k C_n^i x^i(1-x)^{n-i}\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Вывести рекуррентное соотношение для функций $f_k(x)$.

16. Найти числа Дини

$$D^{\pm} f(x) = \varlimsup_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

и

$$D_{\pm} f(x) = \varliminf_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

для функций:

а) $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} ax \sin^2 \dfrac{1}{x} + bx \cos^2 \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

17. Найти $D'_{20}(x)$, если

$$D_{k+1}(x) = \frac{D_k^2(x)}{(1 - x^2 D_k^2(x))\, D_{k-1}(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 19),$$

$$D_0 = 1, \; D_1 = \frac{1}{2}.$$

18. Множество называется счетным, если каждому его элементу можно поставить в соответствие натуральное число.

Доказать, что множество точек, где функция $f(x)$ имеет неравные правую и левую производные, не более, чем счетно.

Вычислить производные функций $f(x)$ если:

19. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

20. $f(x) = \dfrac{[x]}{\pi} \{[x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x\} \qquad (x \geqslant 0).$

21. $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}\left(x - [x] - \dfrac{1}{2}\right)\left\{1 - 2\left|x - [x] - \dfrac{1}{2}\right|\right\}.$

22. Показать, что существует однозначная действительная функция $y = y(x)$ определяемая уравнением:

$$x = 12y^5 - 30y^4 + 40y^3 - 30y^2 + 15y + 1.$$

Найти одностороннюю производную y'_x, если:

23. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ в точке $t = 1$.

24. $x = t + 3\sqrt[3]{1+t}$, $y = 2t - 10\sqrt[5]{1+t}$ в точке $t = 0$.

25. $x = \sin^2 t$; $y = \cos^2 t$ в точках $t = 0$ и $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Чем отличается данная функция от функции $y = 1 - x$?

Найти y'_x, если:

26. $\operatorname{arctg}(x^2 + y^2) - \ln xy - 1 = 0.$

27. $\sin \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x^2}{y} + \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$

Вычислить $y'(0)$, если:

28. $x^2 \sin \frac{1}{y} + \frac{y}{x} \sin x \qquad (x \neq 0)$ и $y(0) = 0$.

29. $x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{tg}(x + y) - 1 = 0 \qquad (x \neq 0)$ и $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Вычислить $\Delta y(0)$ и $dy(0)$, если:

30. $y = \sqrt{x}$. **31.** $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

32. $x = t^2 + |t|$; $y = t^3 + t$; $\Delta t = dt = 1$.

33. $x = t^4 - 4t^2$; $y = t^5 - 5t$; $\Delta t = dt = 1$,

34. $x = y^5 + 5y$.

35. Вычислить $dy(0)$, если:

$$\frac{x^2}{y} + \sin \frac{y}{x} = 0 \qquad (x \neq 0),\ y(0) = 0.$$

Пусть u, v — дифференцируемые функции от x.
Вычислить $dy(0)$, если:

36. $y = u^v$; $du(0) = 5dx$; $dv(0) = -\frac{2}{e} dx$; $u(0) = e$; $v(0) = 1$.

37. $y = \arcsin \frac{u}{v}$; $du(0) = 3dx$; $dv(0) = \sqrt{2}\, dx$; $u(0) = 1$; $v(0) = \sqrt{2}$.

Пусть $d_{\pm} y(x) = f'_{\pm}(x)\, dx$. Найти $d_{\pm} y(0)$, если:

38. $y = |\sin x|$. **39.** $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ и $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

40. $x = |t|^{-t} - 1$; $y = \operatorname{tg} t$; $x(0) = 0 \qquad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$.

41. Найти $y''(0)$, если: $y = x^3 [\sin(\ln^m |x|) + \cos(\ln^m |x|)]$ $(x \neq 0)$ и $y(0) = 0$, где $m = \frac{p}{2q + 1}$; p, q — целые.

Является ли непрерывной вторая производная в нуле? Можно ли подобрать значение параметра m таким образом, чтобы существовала $y'''(0)$?

42. При каких значениях α функция $f(x) = |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = 0$ имеет непрерывную вторую производную?

43. Найти y'', если $y = \varphi(\psi(x))$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & |x| < 2; \\ \sin x, & |x| > 2; \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} e^x, & |x| < 2; \\ \cos x, & |x| > 2, \end{cases}$$

44. Вычислить обобщенную вторую производную функции в точке разрыва, если: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$.

45. Вычислить вторую производную функции $y(x)$, обратной для функции $x = x(y)$, если:
а) $x = y + y^3$; б) $x = y + \sin y$.

46. Вычислить $d^2 y(0)$ функции $y = |x|^{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$ и $y(0) = 0$.

47. Найти $y''_{x^2}(0)$, если: $x = 2t - t^2$; $y = (t-1)^4$.

48. Найти вторую производную y''_{x^2} функции, заданной параметрически:

$$x = \begin{cases} 2t, & t < 1; \\ t^2, & t \geqslant 1; \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin t, & |t| \leqslant 1; \\ 1 + t - t^2, & |t| > 1. \end{cases}$$

49. Вычислить вторую производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $\sin xy = x + y - \frac{\pi}{2}$ $(y > 0)$, в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

50. Найти $f_{100}(x)$, если:

$$f_{n+1}(x) = x f'_n(x); \quad f_1(x) = \frac{x(1 - 11x^{10} + 10x^{11})}{(1-x)^2}.$$

51. Вычислить $y'(0)$, если функция $y(x)$ задана уравнением $y^5 + x^3 + x^2 - y^2 = 0$ и дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$.

Найти $y^{(50)}(0)$, если:

52. $y = \sin x^2$. 53. $y = \dfrac{1}{1 - x + x^2}$. 54. $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$. 55. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

56. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ -\sqrt{4 - (3 - |x|)^2}, & \text{если } 1 < |x| \leqslant 2. \end{cases}$$

57. Пусть: 1) $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, \infty)$; 2) для любых x и h выполняется тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x + \theta h);$$

3) $f''(x) \neq 0$.

Доказать, что: а) если $\theta = \theta(x)$, то $\theta \equiv \frac{1}{2}$; б) если $|\theta'| < \infty$ и $\theta = \theta(h)$, то $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{2}$.

58. Пусть

$$(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x + \theta(x))^{-1+\frac{1}{n}} \qquad (x \geqslant 0; \quad n > 1).$$

Найти предельные значения $\theta(x)$ при $x \to +0$ и $x \to +\infty$.

59. Пусть функции f и g дифференцируемы на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Доказать, что

$$\frac{1}{g(x_2) - g(x_1)} \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \\ g(x_1) & g(x_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(\xi)} \begin{vmatrix} \varphi(\xi) & g(\xi) \\ \varphi'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix},$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

60. Показать, что производная функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} \ln x\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна при $x \geqslant 0$, однако функция $\xi(x)$, удовлетворяющая соотношению $f(x) = f'(\xi(x))\,x$, $0 < \xi(x) < x$, является разрывной.

61. Доказать, что если $f'(x)$ непрерывна и монотонна на сегменте $[0, h]$, причем $f(0) = 0$, то функция $\xi(x)$ непрерывна на этом сегменте (см. пример 60).

62. Справедлива ли теорема Лагранжа для дифференцируемой на сегменте $[a, b]$ функции $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, где $i = \sqrt{-1}$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \cos x + i \sin x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

63. Показать, что функция Дирихле не является ни убывающей, ни возрастающей.

64. Являются ли возрастающими на сегменте $[1, 2]$ функции:

а) $y = [x]$; б) $y = (x - 1)[x]$; в) $y = x$, если x — рационально?

65. Доказать, что сумма и произведение положительных функций, одна из которых монотонно возрастает, а другая не убывает, есть функция монотонно возрастающая.

66. Доказать неравенства:

а) $\dfrac{2\ln(1+x)}{x} - \dfrac{3x+2}{(1+x)^2} > 0$ при $x > 0$;

б) $\dfrac{2}{x(x+1)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \ln^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x+3}{x(x+1)^2} > 0$ при $x > 0$.

Исследовать на монотонность следующие функции $y(x)$:

67. $y = (2 + x)\ln(1 + x) - 2x$.

68. $y = \dfrac{e^x}{x^x [x]!}$ $\quad (x \geqslant 1)$.

69. $x = \sin t - t + \dfrac{t^3}{6}$, $y = 4t^5 - 5t^4 + 1$.

70. $\rho = \varphi \operatorname{tg} \varphi$ $\quad (\varphi > 0)$.

Построить график этой функции.

71. Пусть

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C = \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

$$E = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k,\ F = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,\ G = \sum_{k=1}^{n} b_k c_k,$$

где a_k, b_k, c_k — вещественные числа.

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & G \\ E & G & C \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

72. Доказать, что $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ при $1 < x < e$.

73. Пусть $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, $f(a) = 0$ и существует такое вещественное число A, что $|f'(x)| \leqslant A\,|f(x)|$ на $[a, b]$.

Доказать, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$.

74. Исследовать на перегиб в нуле графиков следующих функций:

а) $y = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ $\qquad$ б) $y = \begin{cases} x^5 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

Исследовать направление выпуклости и определить точки перегиба графиков следующих функций $y(x)$:

75. $x = t\ln t,\ y = -6et - 3t^2.$

76. $x = (1+t)^{\frac{1}{t}},\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}.$

77. $\rho = \dfrac{1}{\varphi}\quad \left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right).$

78. $\rho = \varphi - \varphi^2;\ \varphi \geqslant 0$ (ρ, φ — полярные координаты).

79. Исследовать направление выпуклости графика функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3 - y^3 - 3x^2y - 3y + 1 = 0$, в окрестности точки $M(-1, 0)$.

80. Пусть $f(x)$ — выпуклая снизу на интервале (a, b) функция. Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)],$$

где $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ $(n \geqslant 2)$.

Применяя теорему предыдущего примера, доказать неравенства:

81. $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdots (2^n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots 2^{n-1}} < \left(2 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

82. $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots x_n) \qquad (x_i > 0;\quad i = 1, 2, \ldots, n)$

(неравенство Коши).

83. Возможно ли применение правила Лопиталя к раскрытию неопределенности в последовательностях?

Применяя правило Лопиталя, найти:

84. $\lim\limits_{x\to+0}\left[2\dfrac{1 - e^{-1}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right]$, где $[\cdot]$ — целая часть,

85. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{15 - 6x^2}{15x - x^3}\right)}{x\left(\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}\right)}.$

86. $\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{1}{\ln\sqrt{1+x}} - \dfrac{2}{x}\right\}^{\frac{\operatorname{ch} x}{2x}}.$

87. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^{x^x} - 1}{x - 1}\right)^{(x-1)^{-1}}.$

88. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin^{100} x}{x^{99}\sin x}\right)^{\frac{2}{3x^2}}.$

89. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{100} x}{x^{\varepsilon - \frac{1}{x}}}\qquad (\varepsilon > 0).$

Пользуясь локальной формулой Тейлора, получить разложения по целым положительным степеням x до членов наибольшего порядка включительно следующих функций:

90. $f(x) = \begin{cases} x^6 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 91. $f(x) = e^{x^3|x|}.$

Справедливо ли разложение:

$$e^{x^2|x|} = 1 + x^3|x| + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{11}|x|}{3!} + \dots + \frac{x^{3n}|x|^n}{n!} + o(x^{4n})?$$

92. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (до члена с x^{10}).

Справедливо ли разложение:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!\,x^{2n}} + o\left(\frac{1}{x^{2n}}\right)?$$

93. $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln|x|}$ $\quad (x \neq 0)$ и $f(0) = 0$.

94. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ (до члена с x^3).

95. $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ (до члена с x^3).

96. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

$(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ и непрерывна.

Доказать, что

$$\lim_{h \to 0} \theta = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

Пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получить разложения по целым положительным степеням x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

97. $f(x) = \begin{cases} x^{x^3}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

до члена с x^2 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

98. $f(x) = \sin|x|^5$ $(|x| \leqslant 1$; до членов наибольшего порядка). Справедливо ли разложение:

$$\sin|x|^5 = |x|\left(x^4 - \frac{x^{14}}{3!} + \frac{x^{19}}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{10n-6}}{(2n-1)!} + \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!} x^{10n+4}\right) \qquad (0 < \xi < 1)?$$

99. $x^4 + y^4 + \sin xy - 1 = 0$ (до члена с x^3 на сегменте $|x| \leqslant 1$).

Подобрать коэффициенты A, B, C таким образом, чтобы при $x \to 0$ справедливы были следующие асимптотические равенства с наиболее возможным их порядком точности относительно x. Установить этот порядок.

100. $\operatorname{arctg} x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + O^*(x^n)$.

101. $\arcsin x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + O^*(x^n)$.

102. $\ln(1+x) = \dfrac{x + Ax^2}{1 + Bx} + O^*(x^n)$.

103. $\sqrt[k]{1+x} = \dfrac{1 + Ax}{1 + Bx} + O^*(x^n)$.

104. $(1+x)^x = \dfrac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx} + O^*(x^n)$.

105. Написать семь первых членов разложения по локальной формуле Маклорена функции $y(x)$, если $x = y + y^7$.

106. Применяя формулу Тейлора, найти

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left[30\frac{\sin(\operatorname{tg}x)-\operatorname{tg}(\sin x)}{x^7}\right].$$

Исследовать на экстремум следующие функции $y = y(x)$:

107. а) $y=\begin{cases}|x|, & x\neq 0;\\ 1, & x=0;\end{cases}$ б) $y=|x|$, если $x\neq 0$;

в) $y = D(x)$ (функция Дирихле);

г) $y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x \text{ — рационально};\\ x^4, & \text{если } x \text{ — иррационально}.\end{cases}$

108. $y=|x|^{\frac{1}{\sqrt{2}}}|1-x|^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

109. $y=\cos^{100}x+\operatorname{ch}^{100}x$.

110. $y=\frac{1}{2}(\cos x+|\cos x|)$.

111. $x=3t-t^3;\quad y=4t-t^4 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$.

112. $\rho=(1+\cos\varphi) \qquad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

113. $x^3+y^3+x^2y+1=0$.

114. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$, определенная в некоторой малой окрестности точки x_0, слева от этой точки возрастает, а справа от нее убывает, то в точке x_0 имеется максимум?

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

115. $f(x)=e^{-\frac{\pi^2}{x^2}}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{\pi^3}{x^2}\right) \qquad (x\neq 0)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

116. $f(x)=\begin{cases}-\ln|\sin x|, & x\neq k\pi;\\ 0, & x=k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\end{cases}$

на сегменте $|x|\leqslant 4\pi$.

Найти $\inf f(x)$ и $\sup f(x)$ следующих функций:

117. $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\right) \qquad \left(x\neq\frac{\pi}{4}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

на интервале $0<x<+\infty$.

118. $f(x)=|\sin x-|x-a||$ на интервале $-1<x<1$.

Построить графики следующих функций:

119. а) $f(x)=\sup\{\sin x, \cos x, \operatorname{tg}x\}$;

б) $f(x)=\inf\{\sin x, \cos x, \operatorname{tg}x\}$.

120. $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$.

121. $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$.

Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

122. $(1-x^2-|1-x^2|)^2+y^2=0$.

123. $(2-x^2-|1-x^2|-|1-y|-|y|)(2-y^2-|1-y^2|-|1-x|-|x|)=0$.

124. $x^2+y^2+9-|x^2+y^2-1|-|2-y|-|y+3|-|x|-|5-x|=0$.

125. $2-y-|1-x-y|-|1+x-y|-|y|=0$.

Глава III

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Простейшие неопределенные интегралы

1°. Понятие неопределенного интеграла. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в любой точке x промежутка X функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ (на этом промежутке) и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Если $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Основные свойства неопределенного интеграла:

а) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$;

б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

в) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \quad (A = \mathrm{const},\ A \neq 0)$;

г) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

3°. Таблица простейших интегралов:

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C; \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$ IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C; \\ -\arccos x + C. \end{cases}$ VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. IX. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$. XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

XII. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$. XIII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

XIV. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$. XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

4°. Основные методы интегрирования.

а) Метод введения нового аргумента. Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$.

б) Метод разложения. Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

в) Метод подстановки. Если $f(x)$ непрерывна, то, полагая

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

г) Метод интегрирования по частям. Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x, то

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы:

1. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$.

Решение. Поскольку $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x| = (\cos x - \sin x)\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$, то, пользуясь формулами

8 и 9 таблицы интегралов, получаем

$$I = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(\sin x + \cos x) + C_{-1}, \ \frac{\pi}{4} - 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} - \pi; \\ \sin x + \cos x + C_0, \ \frac{\pi}{4} - \pi \leqslant x < \frac{\pi}{4}; \\ -(\sin x + \cos x) + C_1, \ \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{4} + \pi; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(1)^n (\sin x + \cos x) + C_n, \ \frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} + n\pi; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Согласно определению первообразной равенство $I\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = I\left(\frac{\pi}{4} + k\pi - 0\right)$ должно выполняться при каждом $k = 0; \pm 1, \pm 2, \dots,$ откуда находим $C_k = 2k\sqrt{2} + C$, где $k = \left[\dfrac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi}\right]$, $C = C_0$.

Следовательно,

$$I = (-1)^k (\sin x + \cos x) + 2k\sqrt{2} + C, \ k = \left[\frac{\pi - \frac{\pi}{4} + x}{\pi}\right].$$

2. Доказать, что если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a \neq 0)$.

Доказательство. Очевидно,

$$f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} f(ax+b)\,d(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

поэтому, применяя метод введения нового аргумента, получаем

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \\ = \frac{1}{a}F(u) + C, \text{ где } u = ax + b.$$

Найти интегралы:

3. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

Решение. Пользуясь результатом примера 2, получаем

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{3}} d(1-3x) = \\ = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

Решение. Аналогично предыдущему,

$$\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}\,x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}\,x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C, \quad \left(x \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Решение. Имеем при $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C.$$

6. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение. Очевидно, что

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C \ \Big(x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\Big).$$

7. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$.

Решение. Поскольку

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C,$$

то

$$\int \frac{x\,dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C.$$

8. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$.

Решение. Так как

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}\, dx = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

то

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}}\right| + C \quad (x \neq \pm\sqrt[8]{2}).$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. При $x \neq 0$

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\operatorname{sgn} x\, dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}},$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\operatorname{sgn} x\, dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} \quad (|x| > 1),$$

то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

Решение. Используя то, что $|x| = x \operatorname{sgn} x$, имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{|x|^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\, 2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{|x| \operatorname{sgn} x}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

Решение. Из условия следует, что $x(1+x) > 0$. Имеем при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} =$$

$$= 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C.$$

Аналогично при $x + 1 < 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d\sqrt{-x-1}}{\sqrt{-x}} =$$

$$= -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}} = -2\ln(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}) + C.$$

Формально объединяя оба ответа, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \operatorname{sgn} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}) + C \quad (x < -1;\ x > 0).$$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Решение. Подынтегральная функция определена при $0 < x < 1$. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} =$$

$$= 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \arcsin\sqrt{x} + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Решение. Так как

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}},$$

то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}} = -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)+C.$$

16. $\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

Решение. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{x\ln x} = d\ln(\ln x)$, имеем при $x>1$

$$\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)} = \int \frac{d\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)|+C.$$

17. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$.

Решение. Замечая, что $(\sin x+\cos x)\,dx = d(\sin x-\cos x)$, получаем при $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx = \int (\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}\,d(\sin x-\cos x) =$$

$$= \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C.$$

18. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}$.

Решение. Поскольку

$$\sin x\cos x\,dx = \frac{d(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}{2(a^2-b^2)},$$

то

$$\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{d(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}{2\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C,$$

$$a^2\neq b^2.$$

19. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$.

Решение. Замечая, что $\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}} = -\frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2 x - 1}}$, получаем при $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2 - 1}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}| + C.$$

20. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx.$

Решение. Очевидно, что

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\operatorname{ch} x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch} x)^2 - 1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}) + C.$$

21. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$

Решение. Имеем

$$I(x) = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C_n,$$

$n\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Из непрерывности первообразной следует $I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - 0\right) = I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + 0\right)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{n+1}; \quad C_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_n.$$

Отсюда находим $C_n = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} + C$, $C = C_0$. Поскольку $n < \frac{2x + \pi}{2\pi} < n + 1$, то $n = \left[\frac{2x + \pi}{2\pi}\right]$. Таким образом,

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{2x + \pi}{2\pi}\right] + C; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi;$$
$$I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} I(x).$$

22. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

Решение. Имеем

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = d\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int d \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \ (x \neq k\pi)$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

23. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение. Из предыдущего примера следует, что

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

24. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

Решение. Преобразуя подынтегральное выражение, при $x \neq 0$ получаем

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{2 \operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

25. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\frac{(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 + (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2}{2}}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2x dx}{2\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 2x + \frac{1}{2}}} = \frac{d(\operatorname{ch} 2x)}{2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x + 1}}.$$

Тогда

$$\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\operatorname{ch} 2x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x + 1}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 2x + 1}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{ch}^4 x + \operatorname{sh}^4 x}\right) + C.$$

26. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

Решение. Очевидно, что

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int \operatorname{th}^{-\frac{2}{3}} x d(\operatorname{th} x) = 3\sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C \quad (x \neq 0).$$

27. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}, \text{ поэтому } \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x) + C = F(x) + C,$$

где $F(x) \in C_{(-\infty,+\infty)}$. Полагая, что $F(0) = 0$, из условия $F(-0) = F(+0) = F(0)$ находим $\varepsilon(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} x$.

28. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.

Решение. Из равенства

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

следует, что

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + C.$$

29. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}\,dx$.

Решение. Пусть $n \neq -2$; тогда

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}\,dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}} = \frac{2}{n+1}\int \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2}{n+2}\ln\left|x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}}\right| + C, \quad n \neq -2.$$

Если $n = -2$, то $\frac{1}{\sqrt{2}}\int x^{-1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x| + C$.

30. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right) + C.$$

31. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Р е ш е н и е. После простых преобразований получаем

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{(\operatorname{tg}^4 x + 1)\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^4 x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^4 x + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C, & x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{4} + C, & x = k\pi + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

32. $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx$.

Р е ш е н и е. После деления числителя и знаменателя на 4^x имеем

$$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}\right| = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C \quad (x \neq 0).$$

33. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Р е ш е н и е. Пользуясь тем, что $\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$, получаем

$$\frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1+x^2)^3}}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= 2\int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Применяя метод разложения, вычислить интегралы:

34. $\int x(1-x)^{10}\,dx$.

Решение. Пользуясь очевидным тождеством $x \equiv 1-(1-x)$, получаем

$$\int x(1-x)^{10}\,dx=\int (1-x)^{10}\,dx-\int (1-x)^{11}\,dx=$$

$$=-\int (1-x)^{10}\,d(1-x)+\int (1-x)^{11}\,d(1-x)=$$

$$=-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}+C.$$

35. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

Решение. Разлагая x^2 по степеням $1-x$, имеем $x^2 \equiv (1-x)^2-2(1-x)+1$. Поэтому

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}=\int \frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}\,dx=\int \frac{dx}{(1-x)^{98}}-$$

$$-2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}}+\int \frac{dx}{(1-x)^{100}}=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+$$

$$+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C \quad (x\neq 1).$$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Решение. Уничтожая иррациональность в знаменателе, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\int (\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1})\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)-\frac{1}{2}\int (x-1)^{\frac{1}{2}}d(x-1)=$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3})+C \quad (x\geqslant 1).$$

37. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$.

Решение. Так как $x\equiv -\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$, то

$$\int x\sqrt{2-5x}\,dx=-\frac{1}{5}\int [(2-5x)^{\frac{3}{2}}-2(2-5x)^{\frac{1}{2}}]\,dx=$$

$$=\frac{1}{25}\int [(2-5x)^{\frac{3}{2}}-2(2-5x)^{\frac{1}{2}}]\,d(2-5x)=$$

$$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{8+30x}{375}\sqrt{(2-5x)^3}+C \quad \left(x\leqslant\frac{2}{5}\right).$$

38. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

Решение. Используя тождество $x \equiv -\frac{1}{3}(1-3x)+\frac{1}{3}$, получим

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}} = -\frac{1}{3}\int [(1-3x)^{\frac{2}{3}} - (1-3x)^{-\frac{1}{3}}]\, dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int [(1-3x)^{\frac{2}{3}} - (1-3x)^{-\frac{1}{3}}]\, d(1-3x) =$$

$$= \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C \quad \left(x \neq \frac{1}{3}\right).$$

39. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx$.

Решение. Поскольку $x^3dx = \frac{1}{2}x^2d(1+x^2) = \frac{1}{2}[(1+x^2)-1] \times \times d(1+x^2)$, то

$$\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int [(1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}]\, d(1+x^2) =$$

$$= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

40. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right),$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \quad (x \neq -2;\ 1).$$

41. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

Решение. Интегрируя тождество $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$, находим

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

42. $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.

Решение. Поскольку $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$ и

$$\frac{1}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$$

то

$$\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C.$$

43. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a \neq b)$.

Решение. Пользуясь тождествами $1 \equiv \left[\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b}\right]^2$,

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left[\frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+a)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(a-b)}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right) + \frac{1}{(x+a)^2}\right],$$

получаем

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left[-\frac{1}{x+b} - \frac{2}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| - \frac{1}{x+a}\right] +$$

$$+ C = -\frac{a+b+2x}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$$

$$(x \neq -a;\ x \neq -b).$$

44. $\int \sin^4 x dx$.

Решение. Интегрируя тождество

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,$$

получаем

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

45. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Решение. Поскольку $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, то

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C \quad (x \neq k\pi).$$

46. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Решение. Имеем $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$

$= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$

47. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

Решение. Пользуясь тем, что $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$ (см. пример 22), получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \\ + \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + C \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right).$$

48. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$.

Решение. Очевидно, что

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \\ - \int \sin x d(\sin x) = \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C \quad (x \neq k\pi).$$

49. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Решение. Пользуясь равенством $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{1}{\sin^2 x} d(\operatorname{ctg} x) = -\int (\operatorname{ctg}^2 x + 1) d(\operatorname{ctg} x) = \\ = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq k\pi).$$

50. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$.

Решение. Так как

$$\frac{dx}{1 + e^x} = \frac{d(e^x)}{e^x(1 + e^x)} = \frac{(e^x + 1) - e^x}{e^x(e^x + 1)} d(e^x) = \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1}\right) d(e^x),$$

то

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{d(e^x)}{e^x} - \int \frac{d(e^x)}{e^x + 1} = x - \ln(e^x + 1) + C.$$

51. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x) dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + C.$$

52. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

Решение. Пользуясь тождеством $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, получаем

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} =$$
$$= -\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x + C \quad (x \neq 0).$$

Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

53. $\int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx$.

Решение. Полагая $1 - 5x^2 = t$, находим $xdx = -\frac{1}{10} dt$; $x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx = \frac{1}{50} (t^{11} - t^{10}) dt$, следовательно,

$$\int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx = \frac{1}{50} \int (t^{11} - t^{10}) dt =$$
$$= \frac{1}{50} \left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} \right) + C = -\frac{1 + 55x^2}{6600} (1 - 5x^2)^{11} + C.$$

54. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 - x}}$.

Решение. Положим $\sqrt{2 - x} = t$, тогда $dx = -2tdt$ и

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 - x}} = -2 \int (4 - 4t^2 + t^4) dt = -2 \left(4t - \frac{4}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) + C =$$
$$= -\frac{2}{15} (32 + 8x - 3x^2) \sqrt{2 - x} + C \quad (x < 2).$$

55. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Решение. Полагая $\sqrt{1 - x^2} = t$, получаем

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\int (1 - 2t^2 + t^4) \cdot dt = -\left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) + C =$$
$$= -\frac{1}{15} (8 + 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1 - x^2} + C \quad (|x| < 1).$$

56. $\int x^5 (2 - 5x^3)^{\frac{2}{3}} dx$.

Решение. Полагая $2 - 5x^3 = t^3$, получим

$$\int x^5 (2 - 5x^3)^{\frac{2}{3}} dx = -\frac{1}{25} \int (2 - t^3) t^4 dt =$$
$$= -\frac{1}{25} \left(\frac{2}{5} t^5 - \frac{1}{8} t^8 \right) + C = -\frac{6 + 25x^3}{1000} (2 - 5x^3)^{\frac{5}{3}} + C.$$

57. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$.

Решение. Положим $\sin x = t^2$, тогда $\cos x dx = 2tdt$; $\cos^4 x = (1 - t^4)^2$ и

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx = 2\int (1-t^4)^2 t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{4}{7}t^7 + \frac{2}{11}t^{11} + C =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x} + C \quad (2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi).$$

58. $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$

Решение. Полагая $1+\cos^2 x = t$, получим $\cos x\sin x dx = -\frac{dt}{2}$ и

$$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

59. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Решение. Полагая $\operatorname{tg} x = t$, находим

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int t^2(t^2+1)\,dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \operatorname{tg}^3 x\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{5} + \frac{1}{3}\right) + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

60. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

Решение. Пусть $e^{-\frac{x}{2}} = t$, тогда $\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = -2dt;$

$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}dx}{e^{\frac{x}{2}}\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)} = -2\int \frac{tdt}{t+1} =$$

$$= -2\int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = -2t + 2\ln(1+t) + C = -2e^{\frac{x}{2}} - x +$$

$$+ \ln\left(1 + e^{\frac{x}{2}}\right) + C.$$

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

Решение. Полагая $t = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C =$$

$$= x - 2\ln(1 + \sqrt{e^x+1}) + C.$$

62. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x}$.

Решение. Положив $t = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, имеем

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x} = 2\int t\,dt = t^2 + C = \operatorname{arctg}^2\sqrt{x} + C \quad (x > 0).$$

63. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Решение. Если положить $x = \sin t$, то $dx = \cos t\,dt$ и при $|x| < 1$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(\arcsin x) + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

64. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Решение. Положим $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2t}$. Тогда при $|x| > \sqrt{2}$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} = -4\int \frac{dt}{\sin^3 2t} = -\frac{1}{2}\int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2}{\cos^3 t \sin^3 t} dt = \frac{1}{4}(\operatorname{ctg}^2 t -$$

$$- \operatorname{tg}^2 t) - \ln|\operatorname{tg} t| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$$

65. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Решение. Полагая $x = a \sin t$, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) +$$

$$+ C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C \quad (|x| \leqslant a).$$

66. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

Решение. Положив $x = a \operatorname{tg} t$, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

67. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

Решение. Пусть $x = a\cos 2t$. Тогда $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \operatorname{ctg}^2 t$;

$$dx = -2a\sin 2t\,dt \quad \text{и} \quad \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -4a\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= -4a\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$(-a \leqslant x < a).$$

68. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx.$

Решение. Полагая $x = 2a\sin^2 t$, получаем (см. пример 44)

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = 8a^2\int \sin^4 t\,dt = a^2\left(3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C =$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C \quad 0 \leqslant x < 2a).$$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Решение. Положив $x - a = (b-a)\sin^2 t$, после простых преобразований получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C\ (a < x < b).$$

70. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx \quad (b > a).$

Решение. Применяя подстановку предыдущего примера, получаем

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = 2(b-a)^2\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int (1-\cos 4t)\,dt = \frac{(b-a)^2}{4}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + \frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)} + C$$

$$(a < x < b).$$

71. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

Решение. Полагая $x = a\,\mathrm{sh}\,t$ ($dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$), получим $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\mathrm{sh}^2 t)} = a\,\mathrm{ch}\,t$;

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = a^2\int \mathrm{ch}^2 t\,dt = \frac{a^2}{4}\,\mathrm{sh}\,2t + \frac{a^2 t}{2} + C.$$

Из равенства $\mathrm{sh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$ находим, что $e^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Поскольку $e^t > 0$, то $t = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| - \ln a$. Очевидно,

$$\mathrm{sh}\,2t = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t = 2\mathrm{sh}\,t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2},$$

поэтому окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C.$$

72. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция определена при $x < -a$ и при $x \geqslant a$.

Пусть $x \geqslant a$. Тогда, полагая $x - a = 2a\,\mathrm{sh}^2 t$, получаем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = 4a \int \mathrm{sh}^2 t\,dt = a\,\mathrm{sh}\,2t - 2at + C.$$

Учитывая, что $a\,\mathrm{sh}\,2t = \sqrt{x^2 - a^2}$; $\mathrm{sh}\,t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$; $t = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) - \ln\sqrt{2a}$, окончательно получаем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) + C.$$

Если $x < -a$, то, полагая $x + a = -2a\,\mathrm{sh}^2 t$, имеем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = -4a \int \mathrm{sh}^2 t\,dt = -a\,\mathrm{sh}\,2t + 2at + C =$$
$$= -\sqrt{x^2-a^2} + 2a\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a}) + C.$$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

Решение. Если $x + a > 0$ и $x + b > 0$ $(b > a)$, то, полагая $x + a = (b-a)\,\mathrm{sh}^2 t$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\int dt = 2t + C = 2\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.$$

Если же $x + a < 0$ и $x + b < 0\ (b > a)$, то при $x + b = -(b-a)\,\mathrm{sh}^2 t$ имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -2\int dt = -2t + C =$$
$$= -2\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}) + C.$$

74. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx.$

Решение. Предполагая, что $b > a$ и $x + a > 0$, $x + b > 0$, положим $x + a = (b-a)\,\mathrm{sh}^2 t$. Тогда $\sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{(b-a)^2}{4}(\mathrm{ch}\,4t - 1)\,dt$ и

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\mathrm{sh}\,4t}{4} - t\right) + C.$$

Поскольку

$$t = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) - \ln\sqrt{b-a};$$
$$\mathrm{sh}\,4t = \frac{4(2x+a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x+a)(x+b)},$$

окончательно имеем

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} -$$
$$- \frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.$$

Если же $x + a < 0$, $x + b < 0$ $(b > a)$, то, полагая $x + b = -(b - a) \times \operatorname{sh}^2 t$, получим

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = -\frac{(b-a)^2}{4}\int (\operatorname{ch} 4t - 1)\,dt =$$

$$= -\frac{(b-a)^2}{16}\operatorname{sh} 4t + \frac{(b-a)^2}{4} t + C =$$

$$= \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}\right) + C.$$

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

75. $\int x^2 \arccos x\,dx$.

Решение. $\int x^2 \arccos x\,dx = \int \arccos x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d\left(\sqrt{1-x^2}\right) =$

$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2}\,d(x^2) =$

$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$ $(|x| \leqslant 1)$.

76. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

Решение. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \int \arcsin x\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq 0;\ |x| < 1)$.

Последний интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} =$$

$$= -\int \frac{\operatorname{sgn} x\,d(|x|)}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|^2 \sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{|x|} + \sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C, \quad |x| < 1.$$

77. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \right) dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+x} = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

$$(x \geqslant 0).$$

Найти интегралы:

78. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x (\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx =$$

$$= x (\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} = x (\arcsin x)^2 +$$

$$+ 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C \quad (|x| \leqslant 1).$$

79. $\int \frac{x \ln (x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int \frac{x \ln (x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \, d(\sqrt{1+x^2}) =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int dx = \sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) -$$

$$- x + C.$$

80. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

Решение. После очевидных преобразований, интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2+x^2) - x^2}{(a^2+x^2)^2} dx = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \int \frac{x}{2} d \left(\frac{1}{a^2+x^2} \right) = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} -$$

$$- \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

81. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx, \quad |x| \leqslant a$.

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = x \sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} -$$

$$-\int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Решая это равенство относительно $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

82. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx.$

Решение. Имеем

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \int xd\left[\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{x}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} -$$

$$-\frac{1}{3}\int (a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}dx + C = \frac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} -$$

$$-\frac{a^2}{4}\int \sqrt{a^2+x^2}dx + C.$$

Вычисляя последний интеграл

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} -$$

$$-\int \sqrt{a^2+x^2}dx + a^2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C,$$

окончательно получаем

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C.$$

83. $\int x\sin\sqrt{x}dx.$

Решение. Замечая, что $xdx = 2(\sqrt{x})^3 d(\sqrt{x})$, и интегрируя по частям, получаем

$$\int x\sin\sqrt{x}dx = 2\int (\sqrt{x})^3 \sin\sqrt{x}d(\sqrt{x}) = -2\int (\sqrt{x})^3 d(\cos\sqrt{x}) =$$

$$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6\int x\cos\sqrt{x}d(\sqrt{x}) = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} +$$

$$+6\int xd(\sin\sqrt{x}) = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} -$$

$$-12\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}d(\sqrt{x}) = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} +$$

$$+12\int \sqrt{x}d(\cos\sqrt{x}) = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} +$$

$$+12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} +$$

$$+6(x-2)\sin\sqrt{x} + C \quad (x \geqslant 0).$$

84. $I = \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

Р е ш е н и е. Интегрируем по частям:

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, d\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx =$$

$$= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{d\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

откуда $I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C.$

85. $I_1 = \int \sin(\ln x)\, dx, \ I_2 = \int \cos(\ln x)\, dx.$

Р е ш е н и е. Имеем

$$I_1 = \int \sin(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx;$$

$$I_2 = \int \cos(\ln x)\, dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx,$$

откуда

$$I_1 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C;$$

$$I_2 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C \quad (x > 0).$$

86. $I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx, \ I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$

Р е ш е н и е. Очевидно,

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \cos bx d\left(e^{ax}\right) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx +$$

$$+ \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_2;$$

$$I_2 = \frac{1}{a} \int \sin bx d\left(e^{ax}\right) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx -$$

$$- \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1;$$

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C;$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

87. $\int e^{2x}\sin^2 xdx.$

Решение. Используя предыдущий пример, получаем

$$\int e^{2x}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)+C.$$

88. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}dx.$

Решение. Пользуясь тем, что $\frac{dx}{e^x}=-d(e^{-x})$, имеем

$$\int\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}dx=-\int \operatorname{arctg} e^x d(e^{-x})=-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x+$$

$$+\int\frac{d(e^x)}{e^x(1+e^{2x})}=-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x+\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)d(e^x)=$$

$$=-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$$

89. $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx.$

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx=-\int\ln(\sin x)\,d(\operatorname{ctg} x)=-\operatorname{ctg} x\ln(\sin x)+$$

$$+\int\operatorname{ctg}^2 xdx.$$

Пользуясь примером 45, получаем

$$\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x[\ln(\sin x)+1]-x+C$$

$$(2k\pi<x<\pi+2k\pi).$$

Нахождение следующих интегралов основано на приведении квадратного трехчлена к каноническому виду и применении формул:

I. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\quad(a\neq 0).$

II. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right|+C.$

III. $\int\frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C.$

IV. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

V. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C\quad(a>0).$

VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$

VII. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

VIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Найти интегралы:

90. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C$$

$$\left(x < -\frac{1}{3};\ x > 1\right).$$

91. $\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$.

Решение. Очевидно,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2 - 2} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 1 + \sqrt{2}}\right| + C \quad (x \neq \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}).$$

92. $\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\,dx.$

Решение. Пользуясь методом разложения, получаем

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,d\left(x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

93. $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

Решение. После очевидных преобразований получаем

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int \frac{(x - \cos\alpha) + \cos\alpha}{(x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha} + C$$

$$(\alpha \neq k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

94. $\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}$.

Решение. Действуя по аналогии с предыдущим, имеем

$$\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \ln |x^6 - x^3 - 2| + \frac{1}{18} \ln \left| \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{9} \ln \{|x^3 + 1| \cdot |x^3 - 2|^2\} + C \quad (x \neq -1,\ x \neq \sqrt[3]{2}).$$

95. $I = \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}$.

Решение. Пользуясь равенством $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$, получаем

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{\sin x - \cos x} \right| + C$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ x \neq \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + k\pi\right).$$

96. $I = \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}$.

Решение. Имеем

$$I(x) = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 + \cos^2 \frac{x}{2} + 3} =$$

$$= 2 \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} + C_n,$$

$$2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi.$$

Из непрерывности первообразной следует

$$I(\pi + 2n\pi - 0) = I(\pi + 2n\pi + 0) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

$$\frac{\pi}{2} + C_n = -\frac{\pi}{2} + C_{n+1},\ C_{n+1} = \pi + C_n.$$

Откуда находим $C_n = \pi n + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная. Поскольку $2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi$, т. е.

$$n < \frac{x + \pi}{2\pi} < n + 1, \text{ то } n = \left[\frac{x + \pi}{2\pi}\right]$$

Таким образом,

$$I(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} + \pi \left[\frac{x + \pi}{2\pi}\right] + C \qquad (x \neq \pi + 2n\pi),$$

$$I(\pi + 2n\pi) = \lim_{x \to \pi + 2n\pi} I(x) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

97. Доказать, что если $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right) + C \text{ при } a > 0$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C \text{ при } a < 0.$$

Доказательство. При $a > 0$ имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \int \frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{a^2x^2 + bax + ac}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(ax + \frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a^2x^2 + bax + ac}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right| + C.$$

Пусть $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$; тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - \left(ax - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - \left(\frac{-y'}{2}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(-\frac{y'}{2}\right)}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - \left(\frac{y'}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

98. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}$.

Решение. Очевидно,

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} + \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}},$$

откуда

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} = -\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{21}} + C$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right).$$

99. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}$.

Решение. Имеем при $|x| > \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

$$\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}} = \frac{x^2 d(x^2)}{2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4}} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1)\, d(x^2 - 1)}{2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4}} + \frac{1}{2} \frac{d(x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4}},$$

откуда

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1+$$
$$+\sqrt{x^4-2x^2-1}|+C.$$

100. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

Решение. Подынтегральная функция вещественна при $|x+1|>\sqrt{6}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \int \frac{dx}{(x+2)^2|x+2|\sqrt{1-\frac{2}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}}}.$$

Пусть $\frac{1}{|x+2|}=t$; тогда $\frac{1}{x+2}=t\operatorname{sgn}(x+2)$;

$$dt = \frac{dx}{(x+2)^2}\operatorname{sgn}(x+2), \quad \frac{dx}{(x+2)^2} = \frac{dt}{\operatorname{sgn}(x+2)} = \operatorname{sgn}(x+2)\,dt.$$

Применяя результаты примера 97, получим

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \operatorname{sgn}(x+2)\int \frac{tdt}{\sqrt{1-2t\operatorname{sgn}(x+2)-5t^2}} =$$
$$= -\frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{5}\int \frac{-10t-2\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{1-2t\operatorname{sgn}(x+2)-5t^2}} +$$
$$+\frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t\operatorname{sgn}(x+2)-5t^2}} = \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{5}\sqrt{1-2t\operatorname{sgn}(x+2)-5t^2}+$$
$$+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{10t+2\operatorname{sgn}(x+2)}{\sqrt{24}} = \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{5}\sqrt{1-\frac{2}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}}+$$
$$+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{\frac{5}{|x+2|}+\operatorname{sgn}|x+2|}{\sqrt{6}}+C=$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}|x+2|}+C.$$

101. $\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем при $-1\leqslant x\leqslant 2$

$$\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx = \int\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$
$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.$$

102. $\int\frac{(1-x+x^2)\,dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. При $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x\neq 0$ имеем

$$I=\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}+\int\frac{x-1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$$

В первом интеграле положим $\frac{1}{|x|} = t$. Получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t\operatorname{sgn} x - 1}} =$$

$$= -\ln\left| t + \frac{\operatorname{sgn} x}{2} + \sqrt{t^2 + t\operatorname{sgn} x - 1}\right| = -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|.$$

Второй интеграл вычисляется непосредственно:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \frac{(-2x+1)\,dx}{2\sqrt{1+x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно имеем

$$I = -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right| - \sqrt{1+x+x^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

103. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx.$

Решение. При $x \neq 0$ имеем

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx = \operatorname{sgn} x \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx = \operatorname{sgn} x \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}} =$$

$$= \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right| + C =$$

$$= \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.$$

§ 2. Интегрирование рациональных функций

Применяя метод неопределенных коэффициентов, вычислить следующие интегралы:

104. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$

Решение. Имеем

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} =$$

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Неизвестные A, B и C определяются из тождества

$$5x^2 - 6x + 1 \equiv A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

Пусть $x = 0$; тогда $1 = 6A$, откуда $A = \frac{1}{6}$. При $x = 2$ получаем $9 = -2B$, откуда $B = -\frac{9}{2}$. Наконец, полагая $x = 3$, находим $C = \frac{28}{3}$.

Подставляя найденные коэффициенты в разложение и интегрируя, окончательно имеем

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C \qquad (x \neq 0;\ 2;\ 3).$$

105. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

Решение. Выделяя целую часть, получим

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}.$$

Учитывая, что $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$, для второго слагаемого получаем разложение

$$\frac{-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю, получим равенство числителей:

$$-5x^2-4 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A + C; \\ x^2 & -5 = B + D; \\ x & 0 = 4A + C; \\ x^0 & -4 = 4B + D. \end{array}$$

Отсюда находим $A = C = 0$; $B = \frac{1}{3}$; $D = -\frac{16}{3}$. Подставляя найденные коэффициенты в разложение и интегрируя его, получаем

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4} = x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

106. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}.$

Решение. Знаменатель имеет корни $x_{1,2} = 1$, $x = -2$. Согласно общей теории имеем

$$\int \frac{xdx}{x^3-3x+2} = A\int\frac{dx}{(x-1)^2} + B\int\frac{dx}{x-1} + C\int\frac{dx}{x+2}.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем равенство числителей:

$$x \equiv A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2.$$

Полагая последовательно x равным 1, — 2 и 0, для определения коэффициентов получаем систему:

$$1 = 3A; \ -2 = 9C; \ 0 = 2A - 2B + C.$$

Отсюда $A = \frac{1}{3}$; $B = \frac{2}{9}$; $C = -\frac{2}{9}$.

Таким образом,

$$\int \frac{xdx}{x^3 - 3x + 2} = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{2}{9} \ln|x+2| + C =$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \qquad (x \neq 1; \ x \neq -2).$$

107. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+3)^3} +$$

$$+ \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{x+3},$$

откуда

$$1 \equiv A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3(x+2) +$$
$$+ D(x+1)(x+2)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) +$$
$$+ F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2.$$

Полагая последовательно $x = -1, -2, -3$, находим $A = \frac{1}{8}$; $B = -1$; $D = -\frac{1}{2}$. Приравнивая коэффициенты при x^5, x^4 и x^3, получим систему для определения остальных коэффициентов:

$$0 = A + C + F;$$
$$0 = 13A + B + 12C + E + 11F;$$
$$0 = 67A + 10B + 56C + D + 8E + 47F.$$

Из первого уравнения находим $F = -C - \frac{1}{8}$. Подставляя F во второе и третье уравнения, получаем $C + E = \frac{3}{4}$; $9C + 8E = 8$.

Решая полученную систему, находим $C = 2$; $E = -\frac{5}{4}$; $F = -\frac{17}{8}$.

Итак, искомый интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8} \ln|x+3| + C = \frac{9x^2 + 50x + 68}{4(x+2)(x+3)^2} +$$

$$+ \frac{1}{8} \ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C \qquad (x \neq -3; \ -2; \ -1).$$

108. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

Решение. Разлагая на простейшие дроби подынтегральную функцию

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{[(x-2)^2+1]-(x-2)^2}{(x-2)^2[(x-2)^2+1]} =$$
$$= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2+1}$$

и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C \qquad (x \neq 2).$$

109. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

Решение. Согласно общей теории имеем

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} = A\int \frac{dx}{x} + B\int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{Cx+D}{1+x+x^2}\,dx,$$

откуда

$$1 \equiv A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)(x+x^2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему для определения неизвестных A, B, C и D:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A+B+C; \\ x^2 & 0 = 2A+B+D+C; \\ x & 0 = 2A+B+D; \\ x^0 & 1 = A, \end{array}$$

решая которую, находим $A = 1$; $B = -1$; $C = 0$; $D = -1$;

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + C$$
$$(x \neq 1;\ x \neq 0)$$

$$\left(\text{поскольку} \int \frac{dx}{1+x+x^2} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

110. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Так как $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, то

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = A\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,dx.$$

Аналогично предыдущему примеру получаем систему:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A+B; \\ x & 0 = -A+B+C; \\ x^0 & 1 = A+C. \end{array}$$

Отсюда $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.

Таким образом, при $x \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

111. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = A\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}dx,$$

откуда получаем $x \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$;

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A+B; \\ x & 1 = A-B+C; \quad A = \frac{1}{3}; \quad B = -\frac{1}{3}; \quad C = \frac{1}{3}. \\ x^0 & 0 = A-C. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \qquad (x \neq 1).$$

112. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Разложение легко получить с помощью элементарного преобразования

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C \qquad (x \neq \pm 1).$$

113. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Поскольку

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

то разложение подынтегральной функции на простые дроби ищем в виде

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Из тождества

$$1\equiv(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C; \\ x^2 & 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D; \\ x & 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D; \\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

Отсюда $A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $B=D=\frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+$$

$$+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)]+C.$$

Учитывая формулы сложения для арктангенсов (см. пример 370), окончательно получаем

$$I(x)=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+$$

$$+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\varepsilon(x)+C,$$

где

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}+1, & \text{если } x>1; \\ 0, & \text{если } |x|=1; \\ -1, & \text{если } x<-1;\end{cases}$$

$$I(1)=\lim_{x\to 1}I(x);\quad I(-1)=\lim_{x\to -1}I(x).$$

114. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

Решение. Так как $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$, то разложение ищем в виде

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Из равенства

$$1\equiv(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

получаем систему:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C; \\ x^2 & 0=-A+B+C+D; \\ x & 0=A-B+C+D; \\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

Отсюда $A=B=-C=D=\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Заметим, что (см. пример 370)

$$\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+\pi\varepsilon(x),$$

где функция $\varepsilon(x)$ определена в предыдущем примере, а значения арктангенса в правой части в точках $x=\pm1$ равны предельным значениям в этих точках.

Окончательно имеем

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+$$

$$+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\varepsilon(x)+C.$$

115. $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{(x^4+1)+(1-x^4)}{2(x^6+1)}=\frac{x^4+1}{2(x^6+1)}+\frac{1-x^4}{2(x^6+1)}=$$

$$=\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^4-x^2+1)}=$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x^2}{2(x^6+1)}-\frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}.$$

Первые два слагаемых легко интегрируются, поэтому найдем разложение на простые дроби только последнего слагаемого. Имеем

$$\frac{-x^2+1}{2(x^4-x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1};$$

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\equiv(Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1);$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0=A+C; \\ x^2 & -\frac{1}{2}=-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D; \\ x & 0=A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D; \\ x^0 & \frac{1}{2}=B+D. \end{array}$$

Отсюда $A=-C=\frac{1}{2\sqrt{3}}$; $B=D=\frac{1}{4}$, поэтому

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x^2}{2(x^6+1)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C.$$

116. $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

Решение. Так как $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=x^4(x-1)+$ $+x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^4+x^2+1)=(x-1)(x^2+x+1)\times$ $\times(x^2-x+1)$, то разложение подынтегральной функции на простые дроби имеет вид

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Из тождества

$$1\equiv A(x^4+x^2+1)+(Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x^3-1)$$

получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0=A+B+D; \\ x^3 & 0=-2B+C+E; \\ x^2 & 0=A+2B-2C; \\ x & 0=-B+2C-D; \\ x^0 & 1=A-C-E, \end{array}$$

решая которую, находим

$$A = -B = \frac{1}{3}; \quad C = -\frac{1}{6}; \quad D = 0; \quad E = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \qquad (x \neq 1).$$

117. При каком условии интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ представляет рациональную функцию?

Решение. Интеграл представляет рациональную функцию, если в разложении

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{F}{x-1}$$

коэффициенты D и F равны нулю. Предполагая последнее, имеем

$$ax^2 + bx + c \equiv A(x^2 - 2x + 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + Ex^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 0 = B + E; \\ x^2 & a = A - 2B; \\ x & b = -2A + B; \\ x^0 & C = A. \end{array}$$

Исключая из этой системы неизвестные A, B и E, находим требуемое условие:

$$a + 2b + 3c = 0.$$

Применяя метод Остроградского, найти интегралы:

118. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Согласно общей теории имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + D\int\frac{dx}{x-1} + E\int\frac{dx}{x+1}.$$

Дифференцируя обе части равенства, находим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{(x^2-1)(2Ax+B) - (3x-1)(Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^2(x+1)^3} + \\ + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$x \equiv -Ax^3 + (A-2B)x^2 + (-2A+B-3C)x + C - B +$$
$$+ D(x-1)(x^3+3x^2+3x+1) + E(x^4-2x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого тождества

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0 = D + E; \\ x^3 & 0 = -A + 2D: \\ x^2 & 0 = A - 2B - 2E; \\ x & 1 = -2A + B - 3C - 2D; \\ x^0 & 0 = C - B - D + E \end{array}$$

и решая эту систему, находим

$$A = B = -\frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = -E = -\frac{1}{16}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C \quad (x \neq \pm 1).$$

119. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1 \equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) +$$
$$+ (Ex+F)(x^4+x^2+x+1),$$

откуда

$$\begin{array}{l|l} x^5 & 0 = D + E; \\ x^4 & 0 = -A - D + E + F; \\ x^3 & 0 = -2B + D + F; \\ x^2 & 0 = -3C + D + E; \\ x & 0 = 2A - D + E + F; \\ x^0 & 1 = B + D + F; \end{array}$$

$$A = C = 0; \quad B = \frac{1}{3}; \quad D = -E = \frac{2}{9}; \quad F = \frac{4}{9}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx =$$
$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \quad (x \neq -1).$$

120. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,dx,$$

откуда после дифференцирования и сведения к общему знаменателю получаем тождество

$$x^2 \equiv A(x^2+2x+2) - (Ax+B)(2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

Для определения неизвестных получаем систему:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = C; \\ x^2 & 1 = -A + 2C + D; \\ x & 0 = -2B + 2C + 2D; \\ x^0 & 0 = 2A - 2B + 2D; \end{array}$$

решая которую, находим

$$A = 0; \quad B = 1; \quad C = 0; \quad D = 1,$$

так что

$$\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

121. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}\,dx,$$

откуда

$$1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1) - 4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D) +$$
$$+ (x^4+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H);$$

$$\begin{array}{c|l} x^7 & 0 = E; \\ x^6 & 0 = -A + F; \\ x^5 & 0 = -2B + G; \\ x^4 & 0 = -3C + H; \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x^3 & 0 = -4D + E, \\ x^2 & 0 = 3A + F; \\ x & 0 = 2B + G; \\ x^0 & 1 = C + H. \end{array}$$

Решая систему, получаем

$$A = B = D = E = F = G = 0; \quad C = \frac{1}{4}; \quad H = \frac{3}{4}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Пользуясь результатами примера 113, окончательно находим

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} +$$
$$+ \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{3\pi\varepsilon(x)}{8\sqrt{2}} + C,$$

где $\varepsilon(x)$ — то же, что и в примере 113.

122. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Решение. Применяя метод Остроградского, интеграл представим в виде

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2} + \\ + \int \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{x^4-1}\,dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1 \equiv (x^4-1)(7Ax^6+6Bx^5+5Cx^4+4Dx^3+3Ex^2+2Fx+G) - \\ - 8x^3(Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H) + \\ + (x^8-2x^4+1)(Kx^3+Lx^2+Mx+N).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, имеем

x^{11}	$0=K;$	x^5	$0=-6B-6F-2M;$
x^{10}	$0=-A+L;$	x^4	$0=-5C-7G-2N;$
x^9	$0=-2B+M;$	x^3	$0=-4D-8H+K;$
x^8	$0=-3C+N;$	x^2	$0=-3E+L;$
x^7	$0=-4D-2K;$	x	$0=-2F+M;$
x^6	$0=-7A-11E-2L;$	x^0	$1=-G+N.$

Решая систему, получаем

$$A=B=D=E=F=H=K=L=M=0,\quad C=\frac{7}{32},\quad G=-\frac{11}{32},$$

$$N=\frac{21}{32}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32}\int \frac{dx}{x^4-1}.$$

Используя решение примера 112, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\operatorname{arctg} x + C.$$

Выделить алгебраическую часть следующих интегралов:

123. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x^2+1}\,dx,$$

откуда получаем тождество

$$x^2+1 \equiv (x^4+x^2+1)(3ax^2+2Bx+C)-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+ \\ +Cx+D)+(x^4+x^2+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H).$$

Из системы уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^7 & 0=E; \\ x^6 & 0=-A+F; \\ x^5 & 0=-2B+G+E; \\ x^4 & 0=A-3C+F+H; \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3 & 0=-4D+G+E; \\ x^2 & 1=3A-C+H+G; \\ x & 0=2B-2D+G; \\ x^0 & 1=C+H \end{array}$$

находим

$$A=\frac{1}{6},\quad C=\frac{1}{3},\quad B=D=G=0,\ F=\frac{1}{6},\quad H=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, рациональная часть равна выражению

$$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}.$$

124. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx.$

Решение. Разложение ищем в виде

$$\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}+ \\ +\int \frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L}{x^5+x+1}\,dx,$$

отсюда получаем тождество

$$4x^5-1 \equiv (x^5+x+1)(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)- \\ -(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)+(x^5+x+1)\times \\ \times(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L);$$

решая систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^9 & 0=F; \\ x^8 & 0=-A+G; \\ x^7 & 0=-2B+H; \\ x^6 & 0=-3C+K; \\ x^5 & 4=-4D+L+F; \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4 & 0=3A-5E+G; \\ x^3 & 0=4A+2B+G+H; \\ x^2 & 0=3B+C+K+H; \\ x & 0=2C+L+K; \\ x^0 & -1=D-E+L, \end{array}$$

находим $A=B=C=E=F=G=H=K=L=0,\ D=-1.$

Таким образом, интеграл сводится к своей рациональной части:

$$\frac{-x}{x^5+x+1}.$$

125. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$

Решение. Так как $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$, то разложение ищем в виде

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}\,dx,$$

откуда

$$1 \equiv A(x^2+x+1) - (Ax+B)(2x+1) + (x^2+x+1)(Cx+D);$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = C; \\ x^2 & 0 = -A+D+C; \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x & 0 = D-2B+C; \\ x^0 & 1 = A-B+D; \end{array}$$

$$A = D = \frac{2}{3}; \quad B = \frac{1}{3},$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Применяя различные приемы, найти следующие интегралы:

126. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx.$

Решение. По формуле Тейлора $x^3 \equiv 1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$, поэтому

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx = \int \frac{1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{(x-1)^{100}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^{99}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^{98}} + \int \frac{dx}{(x-1)^{97}} =$$

$$= -\frac{1}{99(x-1)^{99}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} -$$

$$- \frac{1}{96(x-1)^{96}} + C \qquad (x \neq 1).$$

127. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^8-1}.$

Решение. Пользуясь элементарными преобразованиями, получаем

$$\int \frac{x\,dx}{x^8-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^8-1} = \frac{1}{4}\int \frac{(x^4+1)-(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)}\,d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^4-1} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^4+1} =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2 + C \qquad (x \neq \pm 1).$$

128. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^6+1}.$$

Используя пример 110, окончательно имеем

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} +$$
$$+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + C.$$

129. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^2+2)}\,dx.$

Решение. Полагая $x^4 = t$, находим

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^2+2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(t-3)\,dt}{t(t+1)(t+2)}\,.$$

Разложение функции на простые дроби ищем в виде

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2}\,,$$

откуда

$$t-3 \equiv A(t+1)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t+1).$$

Полагая последовательно $t = 0, -1, -2$, находим

$$A = -\frac{3}{2};\quad B = 4;\quad C = -\frac{5}{2}\,.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^2+2)}\,dx = -\frac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| -$$
$$-\frac{5}{8}\ln|t+2| + C = -\frac{3}{8}\ln x^4 + \ln(x^4+1) -$$
$$-\frac{5}{8}\ln(x^4+2) + C \qquad (x \neq 0).$$

130. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}\,.$

Решение. Полагая $x^5 = t$, получим

$$\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t^2-10)^2}\,.$$

Пользуясь очевидным тождеством

$$1 \equiv \left\{\frac{1}{2\sqrt{10}}\left[(t+\sqrt{10})-(t-\sqrt{10})\right]\right\}^2,$$

находим

$$\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{(t-\sqrt{10})^2} - \frac{2}{t^2-10} + \frac{1}{(t+\sqrt{10})^2}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{200}\left[-\frac{1}{t-\sqrt{10}} - \frac{1}{t+\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right|\right] + C =$$
$$= -\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right) + C \qquad (x \neq \pm\sqrt[10]{10}).$$

131. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n\,d(x^n)}{x^n+1} = \frac{1}{n}\int \frac{(x^n+1)-1}{x^n+1}\,d(x^n) =$$

$$= \frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n) = \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) + C,$$

где $-\infty < x < +\infty$ при четном n и $x \neq -1$ — при нечетном $n \neq 0$.

132. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx.$

Решение. Полагая $x^n = t$, а затем интегрируя по частям, находим

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2n}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{t^2+1} - \int\frac{dt}{t^2+1}\right) = -\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left(\frac{x^n}{x^{2n}+1} - \operatorname{arctg} x^n\right) + C.$$

133. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

Решение. Умножая числитель и знаменатель на x^4, получаем

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{x^5(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)^2}\,d(x^5) =$$

$$= \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{x^5(x^{10}+1)} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right]d(x^5) =$$

$$= \frac{1}{5}\int\left[\frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right]d(x^5) =$$

$$= \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{x^5} - \frac{x^5}{x^{10}+1} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right]d(x^5) = \frac{1}{5}\ln|x^5| -$$

$$- \frac{1}{10}\ln(x^{10}+1) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C = \frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{x^{10}+1}\right) + C \qquad (x \neq 0).$$

134. $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx.$

Решение. Полагая $x^7 = t$, получаем

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1-t}{t(1+t)}\,dt = \frac{1}{7}\int \frac{(1+t)-2t}{t(1+t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right)dt = \frac{1}{7}(\ln|t| - 2\ln|1+t|) + C =$$

$$= \frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2} + C \qquad (x \neq 0;\ -1).$$

135. $\displaystyle\int \frac{(x^4-1)\,dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}.$

Решение. Используя тождество $[x^5 - 5x + 1] - [x^5 - 5x] \equiv 1$, получаем

$$\int \frac{(x^4-1)\,dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} = \int \frac{[(x^5-5x+1)-(x^5-5x)](x^4-1)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}\,dx =$$

$$= \int\left(\frac{x^4-1}{x^5-5x} - \frac{x^4-1}{x^5-5x+1}\right)dx = \frac{1}{5}[\ln|x^5-5x| -$$

$$- \ln|x^5-5x+1|] + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right| + C$$

($x \neq 0$; $\pm\sqrt[4]{5}$; α, где α — корни уравнения $\alpha^5 - 5\alpha + 1 = 0$).

136. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

Решение. Имеем при $x \neq 0$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \begin{cases} C_1, & \text{если } x > 0; \\ C_2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Вследствие непрерывности первообразной имеем

$$\Phi(-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_2 = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_1 = \Phi(+0),$$

где $\Phi(x)$ — первообразная подынтегральной функции.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x + C,$$

причем арктангенс в точке $x = 0$ определяется по непрерывности первообразной в этой точке.

137. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx.$

Решение. После очевидных преобразований имеем

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\,dx =$$

$$\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})\,x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})\,x+2}+C.$$

138. $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx.$

Решение. Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^4-1}{x^8+1}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^4}}{x^4+\frac{1}{x^4}}\,d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}+C.$$

139. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

Решение. Производя надлежащие преобразования, получаем

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1}+\int \frac{x^2dx}{x^6+1} = \int \frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+C.$$

140. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(a \neq 0)$. Пользуясь этой формулой, вычислить $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

Решение. Используя тождество

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]$$

и замену $2ax+b=t$, получаем

$$I_n = \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}, \text{ где } \Delta = 4ac-b^2.$$

Интегрируя по частям I_{n-1}, получаем

$$I_{n-1} = \frac{(4a)^{n-1}}{2a}\left[\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} - 2(1-n)\int \frac{t^2+\Delta-\Delta}{(t^2+\Delta)^n}\,dt\right] =$$

$$= \frac{(4a)^{n-1}t}{2a\,(t^2+\Delta)^{n-1}} - \frac{(4a)^{n-1}(1-n)}{a}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n-1}} +$$

$$+ (1-n)\frac{(4a)^{n-1}}{a}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n},$$

т. е.

$$I_{n-1} = \frac{(4a)^{n-1}\,t}{2a\,(t^2+\Delta)^{n-1}} - 2(1-n)\,I_{n-1} + \frac{2(1-n)\,\Delta}{4a}\,I_n.$$

Решая это равенство относительно I_n, находим

$$I_n = -\frac{(4a)^{n-1}t}{\Delta\,(1-n)\,(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{(3-2n)\,2a}{(1-n)\,\Delta}\,I_{n-1}.$$

Подставляя вместо t его значение, окончательно имеем

$$I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)\,\Delta\,(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1}\,\frac{2a}{\Delta}\,I_{n-1}.$$

В предложенном примере $a = b = c = 1$; $n = 3$; $\Delta = 4$. Таким образом,

$$I_3 = \frac{2x+1}{6\,(x^2+x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{6\,(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} +$$

$$+ \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{6\,(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} +$$

$$+ \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

141. Применить подстановку $t = \frac{x+a}{x+b}$ для вычисления интеграла

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m\,(x+b)^n} \qquad (x \neq -a;\quad x \neq -b)$$

(m и n — натуральные числа).

Пользуясь этой подстановкой, найти

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2\,(x+3)^3}, \qquad (x = 2,\ x \neq -3).$$

Решение. Если $t = \frac{x+a}{x+b}$, то $dt = \frac{b-a}{(x+b)^2}\,dx$;

$$\frac{1}{x+b} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{x+b} = \frac{1}{b-a}\left(1 - \frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1-t}{b-a}.$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m \cdot (x+b)^{n+m-2}} \cdot \frac{b-a}{(x+b)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \cdot \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt,$$

т. е.

$$I = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt.$$

В предложенном примере $a = -2$; $b = 3$; $m = 2$; $n = 3$; $t = \frac{x-2}{x+3}$. Таким образом,

$$I = \frac{1}{625} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt = \frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2}\right) + C.$$

142. Вычислить $\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx$, если $P_n(x)$ есть многочлен степени n относительно x.

Решение. Разлагая многочлен $P_n(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = a$, получаем

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Таким образом,

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx = \int \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!\,(n-k)\,(x-a)^{n-k}} +$$

$$+ \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + C \qquad (x \neq a).$$

143. Вычислить $\int \frac{dx}{1+x^{2n}}$, где n — целое положительное число.

Решение. Знаменатель имеет корни

$$x_l = \cos\frac{\pi + 2l\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi+2l\pi}{2n}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Пусть $l = k-1$. Тогда $x_k = \cos\frac{2k\pi-\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi-\pi}{2n}$ и $\bar{x}_k = \cos\frac{2k\pi-\pi}{2n} - i\sin\frac{2k\pi-\pi}{2n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — попарно сопряженные корни знаменателя.

Следовательно,

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k)(x-\bar{x}_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi-\pi}{2n} + 1\right).$$

Разложение ищем в виде

$$\frac{1}{x^{2n}+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{x-x_k}+\frac{B_k}{x-\bar{x}_k}\right),$$

откуда

$$1\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\,\frac{x^{2n}+1}{x-x_k}+B_k\,\frac{x^{2n}+1}{x-\bar{x}_k}\right).$$

Переходя к пределу при $x\to x_k$, находим

$$A_k=\frac{1}{2nx_k^{2n-1}}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$\left(\text{воспользовались тем, что } \lim\limits_{x\to x_k}\frac{x^{2n}+1}{x-x_k}=2nx_k^{2n-1},\ \lim\limits_{x\to x_k}\frac{x^{2k}+1}{x-\bar{x}_k}=0\right)$.

Аналогично $B_k=\dfrac{1}{2n\bar{x}_k^{2n-1}}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Подставляя найденные коэффициенты в разложение, находим

$$\frac{1}{x^{2n}+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{x-x_k}+\frac{B_k}{x-\bar{x}_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x\,(A_k+B_k)-(A_k\,\bar{x}_k+B_kx_k)}{x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{n}\pi+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x\left(\dfrac{1}{2nx_k^{2n-1}}+\dfrac{1}{2n\bar{x}_k^{2n-1}}\right)-\left(\dfrac{\bar{x}_k}{2nx_k^{2n-1}}+\dfrac{x_k}{2nx_k^{2n-1}}\right)}{x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{x}{n}\cos\dfrac{(2k-1)(2n-1)}{2n}\pi-\dfrac{1}{n}\cos(2k-1)\pi}{x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{-x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}{n\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1\right)}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^{2n}+1}=\sum_{k=1}^{n}\int\frac{-x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}{n\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1\right)}\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\frac{-x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+\cos^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi-\cos^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}{n\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1\right)}\,dx=$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{2n}\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\,dx+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}{n}\int\frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]+C.$$

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

С помощью приведения подынтегральных функций к рациональным функциям найти следующие интегралы:

144. $\displaystyle\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx \qquad (x\neq-1).$

Решение. Полагая $x+2=t^3$, имеем

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx=3\int\frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}\,dt=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+\int\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt.$$

К последнему интегралу применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+2};$$

$$3t^2-6t\equiv A(t^2+t+2)+(Bt+C)(t-1);$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & 3=A+B; \\ t & -6=A-B+C; \\ t^0 & 0=2A-C; \end{array}$$

$$A=-\frac{3}{4};\quad B=\frac{15}{4};\quad C=-\frac{3}{2};$$

$$\int\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{15}{4}\int\frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}\,dt=$$

$$=-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + $$
$$+ \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C.$$

145. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \qquad (a>0).$

Решение. Заметим, что

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}\,dx \qquad (0<x<a).$$

Подстановка $\frac{x}{a-x} = t^4$ приводит нас к интегралу от рациональной функции

$$I = 4a\int \frac{t^4\,dt}{(t^4+1)^2} = a\int t\,d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right) \qquad (0<t<+\infty).$$

Интегрируя по частям, находим

$$I = a\frac{t^5}{1+t^4} - a\int \frac{t^4}{1+t^4}\,dt = \frac{at^5}{1+t^4} - at + a\int \frac{dt}{1+t^4} =$$
$$= -\frac{at}{1+t^4} + a\int \frac{dt}{1+t^4}.$$

Последний интеграл вычислим путем преобразования подынтегрального выражения:

$$\int \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^4}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{1+t^4}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$I = -\frac{at}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + C.$$

146. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n — натуральное число).

Решение. Заметим, что

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int \frac{dt}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}\cdot(x-a)^2}}.$$

Положим, $\frac{x-b}{x-a}=t^n$. Тогда $\frac{dx}{(x-a)^2}=\frac{n}{b-a}t^{n-1}dt$ и

$$I=\frac{n}{b-a}\int \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}\,dt=\frac{n}{b-a}\int dt=\frac{n}{b-a}t+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

147. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=u$, т. е. $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{u^3-u^2+u-1}{u^3}\,du=$$

$$=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\ln u-\frac{1}{2u}+\frac{1}{4u^2}+C=\frac{u^2-1}{2u}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln u+\frac{1}{4u^2}+C=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+$$

$$+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C, \qquad (x>0 \text{ или } x<-1).$$

148. Доказать, что интеграл $\int R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$, где R — рациональная функция и p, q, n — целые числа, является элементарной функцией, если $p+q=kn$, где k — целое число.

Доказательство. Пусть $\frac{x-a}{x-b}=t^n$. Тогда

$$x=\frac{bt^n-a}{t^n-1}; \quad dx=\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}\,dt; \quad x-b=\frac{b-a}{t^n-1}.$$

Следовательно, при $\frac{p+q}{n}=k$ (k — целое число)

$$R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx=R\left[x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{p+q}{n}}\right]dx=$$

$$=R\left[\frac{bt^n-a}{t^n-1},\ t^p\left(\frac{b-a}{t^n-1}\right)^{\frac{p+q}{n}}\right]\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}\,dt=r(t)\,dt,$$

т. е.

$$\int R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx=\int r(t)\,dt,$$

где $r(t)$ — рациональная функция от t.

149. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

Решение. Применяя метод разложения, получаем

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx - \int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \int \sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}\,dx - \int \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}} = \frac{1+2x}{4}\sqrt{1+x+x^2} +$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right) - \sqrt{1+x+x^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right) + C.$$

150. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx.$

Решение. Имеем

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx = \int \frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} + 2\int \frac{\operatorname{sgn} x\,dx}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) -$$

$$-\sqrt{2}\int \frac{\operatorname{sgn} x\; d\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^2+2x+2} +$$

$$+ \ln\left(x+1+\sqrt{x^2-2x+2}\right) -$$

$$-\operatorname{sgn} x\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) -$$

$$-\operatorname{sgn} x\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right| + C.$$

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — число, найти следующие интегралы:

151. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$

Решение. Применяя предложенную формулу, имеем

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Дифференцируя это тождество и приводя к общему знаменателю, получаем

$$x^3 \equiv (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda,$$

откуда

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=-3A; \\ x^2 & 0=5A-2B; \\ x & 0=2A+3B-C; \\ x^0 & 0=B+C+\lambda; \end{array}$$

$$A=-\frac{1}{3};\quad B=-\frac{5}{6};\quad C=-\frac{19}{3};\quad \lambda=4.$$

Таким образом, окончательно имеем при $|x-1|<\sqrt{2}$:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

152. $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Решение. Имеем $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2x^4-x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = (Ax^5+$

$$+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

откуда

$$a^2x^4-x^6 \equiv (5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)-$$
$$-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$$

Для определения коэффициентов разложения сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^6 & -1=-6A; \\ x^5 & 0=-5B; \\ x^4 & a^2=5a^2A-4C; \\ x^3 & 0=4Ba^2-3D; \end{array}\qquad \begin{array}{c|l} x^2 & 0=3Ca^2-2E; \\ x & 0=2Da^2-F; \\ x^0 & 0=Ea^2+\lambda. \end{array}$$

Из этой системы находим

$$A = \frac{1}{6}; \quad B = 0; \quad C = -\frac{a^2}{24}; \quad D = 0;$$

$$E = -\frac{a^4}{16}; \quad F = 0; \quad \lambda = \frac{a^6}{16}.$$

Следовательно,

$$\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{a^2x^3}{24} - \frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|} + \\ + C \quad (|x| \leqslant |a|).$$

153. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$.

Решение. Применяя подстановку $x + 1 = \frac{1}{t}$, получаем

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{t^4 d\,|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Имеем

$$-\int \frac{t^4 d\,|t|}{\sqrt{1-t^2}} = (A|t|^3 + B|t|^2 + C|t| + D)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{d\,|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Дифференцируя по $|t|$ и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$-|t|^4 \equiv (3A|t|^2 + 2B|t| + C)(1 - |t|^2) - |t|(A|t|^3 + B|t|^2 + \\ + C|t| + D) + \lambda,$$

откуда

$$\begin{array}{l|l} |t|^4 & -1 = -4A; \\ |t|^3 & 0 = -3B; \\ |t|^2 & 0 = 3A - 2C; \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} |t| & 0 = 2B - D; \\ |t|^0 & 0 = C + \lambda; \end{array}$$

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = 0; \quad C = \frac{3}{8}; \quad D = 0; \quad \lambda = -\frac{3}{8}.$$

Таким образом,

$$I = \left(\frac{1}{4|x+1|^3} + \frac{3}{8|x+1|}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{(x+1)^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|} + C = \\ = \frac{3x^2 + 6x + 5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|} + C \qquad (x < -2,\ x > 0).$$

154. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

представляет собой алгебраическую функцию?

Решение. Интеграл представляет алгебраическую функцию, если в разложении

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = (Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

коэффициент λ равен нулю. Пусть $\lambda = 0$. Тогда

$$a_1x^2 + b_1x + c \equiv A(ax^2 + bx + c) + (Ax + B)\left(ax + \frac{b}{2}\right),$$

откуда

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a_1 = 2Aa; \\ x & b_1 = \dfrac{3Ab}{2} + Ba; \\ x^0 & c_1 = AC + \dfrac{bB}{2} \end{array}$$

Исключая из этой системы неизвестные A и B, получаем требуемое условие:

$$8a^2c_1 + 3b^2a_1 = 4a(a_1c + b_1b) \qquad (a \neq 0).$$

Найти $\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx$, где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, разлагая рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби.

155. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Решение. Пользуясь тождеством

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2},$$

получаем разложение

$$I = \int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}} + \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{2-(x-1)^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)(x-1)\sqrt{\dfrac{2}{(x-1)^2}-1}} + \int \frac{dx}{(x-1)^2|x-1|\sqrt{\dfrac{2}{(x-1)^2}-1}}.$$

Пусть $\frac{1}{|x-1|} = t$. Тогда

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}} - \operatorname{sgn}(x-1)\int \frac{tdt}{\sqrt{2t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\,t + \sqrt{2t^2-1}\right| - \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{2}\sqrt{2t^2-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{x-1}\right| - \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)} + C$$

$$(|x-1| < \sqrt{2};\quad x \neq 1).$$

156. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}=\frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+2}).$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ применим подстановку $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=t$. Тогда

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C.$$

Приводя квадратные трехчлены к каноническому виду, вычислить следующие интегралы:

157. $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Р е ш е н и е. Полагая $x+\frac{1}{2}=z$, получаем интеграл

$$I=\int\frac{dz}{\left(z^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{z^2-\frac{5}{4}}},$$

к которому применим подстановку

$$\frac{z}{\sqrt{z^2-\frac{5}{4}}}=t.$$

Тогда получим

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{3}{8}-t^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2t\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2t\sqrt{2}}\right|+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно будем иметь

$$I=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x-1)}+(2x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x-1)}-(2x+1)\sqrt{2}}\right|+C \qquad \left(\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

158. $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$I=\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}+$$
$$+\int\frac{(2x-4)\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется непосредственно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Ко второму интегралу применим подстановку $x - 1 = z$. Тогда он преобразуется к интегралу

$$\int \frac{2z-2}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}\,dz,$$

который разлагается на два:

$$I_1 + I_2 = \int \frac{2z\,dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}} - 2\int \frac{dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}.$$

Первый из них вычисляется подстановкой $\sqrt{3-z^2} = t$:

$$I_1 = -2\int \frac{dt}{6-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right|.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Для вычисления интеграла $I_2 = -2\int \frac{dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}$ полагаем $\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} = t$; тогда

$$I_2 = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{2t^2+1} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,t = -\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$I = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C.$$

159. С помощью дробно-линейной подстановки $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Решение. Применяя предложенную подстановку, получаем

$$x^2 - x + 1 = \frac{(\alpha+\beta t)^2 - (1+t)(\alpha+\beta t) + (1+t)^2}{(1+t)^2};$$

$$x^2 + x + 1 = \frac{(\alpha+\beta t)^2 + (1+t)(\alpha+\beta t) + (1+t)^2}{(1+t)^2}.$$

Числа α и β определяем так, чтобы коэффициенты при t были равны нулю. Следовательно,

$$2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0;\quad 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2 = 0.$$

Решая систему, находим $\alpha = 1$; $\beta = -1$.

Имеем

$$x = \frac{1-t}{1+t}, \quad dx = \frac{-2dt}{(1+t)^2}, \qquad x^2 - x + 1 = \frac{3t^2+1}{(1+t)^2};$$

$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{t^2+3}}{1+t}$ (для случая, когда $1+t>0$, т. е. если $x>-1$).

Таким образом,

$$I = -2\int \frac{(t+1)\,dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = -2\int \frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} - $$
$$-2\int \frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}.$$

Для вычисления первого из этих интегралов применим подстановку $\sqrt{t^2+3} = u$. Тогда

$$-2\int \frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = 2\int \frac{du}{8-3u^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}\,u}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}\,u}\right| = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3(t^2+3)}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3(t^2+3)}}\right|.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$-2\int \frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{(1+x)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|.$$

Второй интеграл вычисляется с помощью подстановки $\frac{t}{\sqrt{t^2+3}} = z$:

$$-2\int \frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = -2\int \frac{dz}{8z^2+1} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}\,z}{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Окончательно имеем

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{(1+x)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

160. Найти

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, применим подстановку $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$, причем числа α и β выберем так, чтобы оба квадратные трехчлена привелись к каноническому виду. Из этого условия находим, что $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

Следовательно,

$$x=\frac{2-t}{1+t},\quad dx=-\frac{3dt}{(1+t)^2},\quad x^2+2=\frac{3(2+t^2)}{(1+t)^2};$$

$$\sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3}{1+t}\sqrt{1+t^2}$$

(для $1+t>0$, т. е. для $x>-1$);

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{(t+1)\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}-$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}.$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно:

$$-\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{3}\int\frac{d\sqrt{t^2+1}}{(\sqrt{t^2+1})^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{1+t^2}.$$

Для вычисления второго интеграла положим $\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=z$.

Тогда

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2-2}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2(t^2+1)}}{t+\sqrt{2(t^2+1)}}\right|.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получаем

$$I=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+x-2}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-x+2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{1+x}+C.$$

Применяя подстановки Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+z$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}\equiv\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

Найти следующие интегралы:

161. $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Здесь $a=1>0$, поэтому применим первую подстановку:

$$\sqrt{x^2+x+1}=-x+z.$$

Отсюда $x=\frac{z^2-1}{1+2z}$; $dx=\frac{2z^2+2z+2}{(1+2z)^2}dz$.

Подставив в интеграл, получим

$$I = \int \frac{2z^2 + 2z + 2}{z(1+2z)^2}\, dz.$$

Разложение подынтегральной функции ищем в виде

$$\frac{2z^2 + 2z + 2}{z(1+2z)^2} = \frac{A}{(1+2z)^2} + \frac{B}{1+2z} + \frac{C}{z}.$$

Для определения неизвестных A, B и C получаем систему $2 = 2B + 4C$; $2 = A + B + 4C$; $2 = C$, откуда $A = -3$; $B = -3$; $C = 2$. Таким образом,

$$I = -3\int \frac{dz}{(1+2z)^2} - 3\int \frac{dz}{1+2z} + 2\int \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{3}{2(1+2z)} + \frac{1}{2}\ln \frac{z^4}{|1+2z|^3} + C,$$

где $z = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$; $\quad x \neq -1$.

162. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Решение. Так как $C = 1 > 0$, то, применяя вторую подстановку Эйлера $xt - 1 = \sqrt{1 - 2x - x^2}$, получаем

$$I = \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t-1)(t^2+1)}\, dt.$$

Разлагаем подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct + D}{t^2+1}.$$

Приводим последнее равенство к общему знаменателю

$$-t^2 + 2t + 1 \equiv A(t^3 - t^2 + t - 1) + B(t^3 + t) + (Ct + D)(t^2 - t)$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} t^3 & \;\;0 = A + B + C; \\ t^2 & -1 = -A - C + D; \\ t & \;\;2 = A + B - D; \\ t^0 & \;\;1 = -A. \end{array}$$

Отсюда находим $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$ и $D = 2$.

Следовательно,

$$I = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C,$$

где $tx = 1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}$.

163. $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}\, dx$.

Решение. Здесь $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, поэтому можно положить: $\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1)$ (третья подстановка Эйлера). Имеем $x=\frac{2-t^2}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$;

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}dt.$$

Разложение подынтегральной функции ищем в виде

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{E}{t-2},$$

откуда

$$-2t^2-4t\equiv A(t-2)(t-1)+B(t-2)(t^2-1)+C(t^2-3t+2)\times$$
$$\times(t^2+2t+1)+D(t-2)(t^3+3t^2+3t+1)+$$
$$+E(t-1)(t^3+3t^2+3t+1).$$

Полагая последовательно $t=-1$, 1; 2, находим $A=\frac{1}{3}$; $D=\frac{3}{4}$ и $E=-\frac{16}{27}$. Далее, приравнивая в тождестве коэффициенты при t^4 и t^3, получаем систему $0=C+D+E$; $0=B-C+D+2E$, откуда находим остальные неизвестные:

$$C=-\frac{17}{108};\quad B=\frac{5}{18}.$$

Таким образом,

$$I=-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-$$
$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C.$$

Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

164. $\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(|x|<1)$.

Решение. Полагая $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, получаем

$$\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{t^4-1}{3t^4+1}dt=$$
$$=\int\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3t^4+1}\right)dt=\frac{t}{3}-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{3t^4+1}\quad(t>0).$$

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку $\sqrt[4]{3}\,t=$ $=u$. Тогда приходим к интегралу

$$\int\frac{dt}{3t^4+1}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{du}{u^4+1},$$

который вычисляем путем разложения подынтегральной функции (см. решение примера 145):

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{du}{u^4+1}=\frac{1}{2\sqrt[4]{12}}\operatorname{arctg}\frac{u^2-1}{u\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{12}}\ln\frac{u^2+u\sqrt{2}+1}{u^2-u\sqrt{2}+1}+C.$$

Возвращаясь к переменной t, получаем

$$\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}=\frac{t}{3}-\frac{2}{3\sqrt[4]{12}}\operatorname{arctg}\frac{t^2\sqrt{3}-1}{t\sqrt[4]{12}}-$$

$$-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\ln\frac{t^2\sqrt{3}+t\sqrt[4]{12}+1}{t^2\sqrt{3}-t\sqrt[4]{12}+1}+C,$$

где $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

165. $I=\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

Решение. Пусть $t=x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}$;

тогда

$$x=\frac{1}{2}\left(t-1-\frac{3}{4t}\right)\quad(t>0);\qquad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4t^2}\right)dt;$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4t^2}\right)dt=\frac{1}{8}\int\left(4-\frac{8t^2-6t+3}{t^2(2t+1)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(4-\frac{A}{t^2}-\frac{B}{t}-\frac{C}{2t+1}\right)dt.$$

Для определения коэффициентов A, B и C получаем тождество

$$8t^2-6t+3\equiv A(2t+1)+Bt(2t+1)+Ct^2,$$

из которого находим: $A=3$; $B=-4$; $C=8$.

Следовательно,

$$I=\frac{t}{2}+\frac{3}{8t}+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|2t+1|+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем:

$$I=\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(x+2+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C.$$

166. $\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx=\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{sgn}x}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx=$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x\, d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x\, d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left|x+\frac{1}{x}\right|\sqrt{1-\frac{2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}} = -\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-1}}{\sqrt{1-\frac{2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C.$$

167. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

Решение. Подынтегральная функция определена, очевидно, при $|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1}$. Применяя элементарные преобразования, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}+C.$$

168. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sgn} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x\, d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}} =$$

$$= \operatorname{sgn} x \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\right|+C =$$

$$= \operatorname{sgn} x \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+x^2+1}}{x}\right|+C \qquad (x\neq 0).$$

169. Доказать, что нахождение интеграла

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx,$$

где R — рациональная функция, сводится к интегрированию рациональной функции.

Доказательство. Полагая $t=\sqrt{ax+b}$, получаем интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{ct^2}{a}+\frac{ad-cb}{a}}\right)\frac{2t}{a}dt,$$

который одной из подстановок Эйлера сводится к интегралу от рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a+bx^n)\,dx,$$

где m, n и p — рациональные числа, может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трех случаях:

1. Пусть p — целое. Полагаем $x=t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a+bx^n=t^N$, где N — знаменатель дроби p.

3. Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Применим подстановку $ax^{-n}+b=t^N$, где N — знаменатель дроби p.

Если $n=1$, то эти случаи эквивалентны следующим: 1) p — целое; 2) m — целое; 3) $m+p$ — целое.

Найти следующие интегралы:

170. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

Решение. Имеем при $x>0$, а также при $x\leqslant -1$

$$I=\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}dx \qquad (x>0).$$

Здесь $n=1$, $m=\frac{3}{2}$, $p=\frac{1}{2}$ и $m+p=2$ — целое. Поэтому, полагая $x^{-1}+1=t^2$, получим

$$I=-\int\frac{2t^2dt}{(t^2-1)^4}=-2I_3-2I_4,$$

где $I_n=\int\frac{dt}{(t^2-1)^n}$, $\qquad n=3,\ 4.$

Для вычисления последнего интеграла найдем рекуррентную формулу. Пусть

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2-a^2)^n} \qquad (a\neq 0).$$

Интегрируя по частям I_{n-1}, имеем

$$I_{n-1}=\int\frac{dt}{(t^2-a^2)^n}=\frac{t}{(t^2-a^2)^n}-2(n-1)\int\frac{t^2dt}{(t^2-a^2)^n}=$$

$$=\frac{t}{(t^2-a^2)^{n-1}}-2(n-1)\int\frac{(t^2-a^2)+a^2}{(t^2-a^2)^n}dt=$$

$$=\frac{t}{(t^2-a^2)^{n-1}}-2(n-1)I_{n-1}+2(n-1)a^2I_n,$$

откуда

$$I_n = -\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

Последовательно применяя эту формулу (при $a = 1$), получаем

$$I = 2I_3 - 2\left[-\frac{t}{6(t^2-1)^3} - \frac{5}{6} I_3\right] = \frac{t}{3(t^2-1)^3} - \frac{1}{3} I_3 =$$

$$= \frac{t}{3(t^2-1)^3} - \frac{1}{3}\left[\frac{-t}{4(t^2-1)^2} - \frac{3}{4} I_2\right] = \frac{t}{3(t^2-1)^3} +$$

$$+ \frac{t}{12(t^2-1)^2} + \frac{1}{4}\left[\frac{-t}{2(t^2-1)} - \frac{1}{2} I_1\right] = \frac{t}{3(t^2-1)^3} +$$

$$+ \frac{t}{12(t^2-1)^2} - \frac{t}{8(t^2-1)} - \frac{1}{16} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно имеем

$$I = \sqrt{x+x^2}\,\frac{8x^2+2x-3}{24} + \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) + C.$$

171. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$

Решение. Здесь $p = -2$ — целое. Применяя первую подстановку $x = t^6$, получаем

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = 6\int \frac{t^8 dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= 6\int\left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}.$$

Поскольку

$$\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) =$$

$$= -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

то окончательно имеем

$$I = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21\operatorname{arctg} t + C, \qquad t = x^6.$$

172. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

Решение. В нашем случае $m = 1$; $n = \frac{2}{3}$; $p = -\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n} = 3$ — целое. Положим $1 + x^{\frac{2}{3}} = t$. Тогда

$$I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int (t^2-1)^2 dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C,$$

где $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

173. $\int \sqrt[3]{3x - x^3}\, dx.$

Решение. Здесь $m = \frac{1}{3}$; $n = 2$; $p = \frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n} + p = 1$ — целое. Положим $3x^2 - 1 = t^3$.

Тогда $I = \int \sqrt[3]{3x - x^3}\, dx = -\frac{9}{2}\int \frac{t^3 dt}{(t^3+1)^2} =$

$$= \frac{3}{2}\int t d\left(\frac{1}{t^3+1}\right) = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3+1}.$$

Поскольку (см. пример 110)

$$\int \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

то окончательно имеем

$$I = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \frac{\sqrt[3]{3x - x^3}}{x}$ $\quad (0 < x < \sqrt{3};\quad x \leqslant -\sqrt{3}).$

§ 4. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применения формул понижения.

Найти интегралы:

174. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2}\int \cos^3 x d\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + 3\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx\right] = -\frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} -$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \qquad x \neq k\pi \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

175. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущему

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sin x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \qquad (x \neq k\pi).$$

176. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^3 \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x} =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C \qquad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right).$$

177. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Р е ш е н и е. Очевидно,

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)^2 \frac{d(\sec^2 x)}{\sec^2 x} =$$

$$= \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \frac{1}{2}\ln(\sec^2 x) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

или

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

178. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$.

Р е ш е н и е. После очевидных преобразований имеем

$$\int \operatorname{ctg}^6 x dx = \int \operatorname{ctg}^4 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} -$$

$$-\int \operatorname{ctg}^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C$$

$$(x \neq k\pi).$$

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{2}{3\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}} + C = -2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C$$

$$\left(k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

180. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Решение. Полагая $t^3 = \sin x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, имеем

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= 3\int \frac{dt}{1-t^6} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^3} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^3} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{(1-t)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{t^2-t+1} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t+1)}{(t^2-t+1)(t-1)^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,t}{1-t^2} + C.$$

181. Вывести формулы понижения для интегралов:

а) $I_n = \int \sin^n x dx$; б) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n > 2)$

Решение. Интегрируя по частям, получаем:

$$\text{а) } I_n = -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x +$$

$$+ (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$- (n-1) I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{n}[(n-1) I_{n-2} - \cos x \cdot \sin^{n-1} x] \qquad (n = 3, 4, \ldots)$$

$$\text{б) } K_n = \int \frac{d(\sin x)}{\cos^{n+1} x} = \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} - (n+1)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x} dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} - (n+1) K_{n+2} + (n+1) K_n,$$

откуда

$$K_{n+2} = \frac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1} x} + \frac{n}{n+1} K_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

С помощью формул:

I. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

II. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$;

III. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

найти интегралы:

182. $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{5x}{6}+\sin\frac{7x}{6}-\sin\frac{11x}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6}+C.$$

183. $\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx$.

Решение. Используя формулу III, имеем

$$\int\sin^3 2x\cos^2 3x\,dx = \frac{1}{8}\int(3\sin 2x-\sin 6x)(1+\cos 6x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(3\sin 2x-\frac{3}{2}\sin 4x+\frac{3}{2}\sin 8x-\sin 6x-\frac{1}{2}\sin 12x\right)dx =$$

$$= -\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{48}\cos 6x+$$

$$+\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$

Применяя формулы:

IV. $\sin(\alpha-\beta)\equiv\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$;

V. $\cos(\alpha-\beta)\equiv\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$,

найти интегралы:

184. $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\,dx-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C.$$

$$\sin(a-b) \neq 0.$$

185. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

Решение. Из тождества $\cos a = \cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right)$ следует

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{2\cos a}\int \frac{\cos\left[\left(\frac{x-a}{2}\right) - \left(\frac{x+a}{2}\right)\right]}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right| + C \qquad (\cos a \neq 0, \quad \sin x \neq \sin a).$$

186. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\, dx$.

Решение. Имеем $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\, dx =$

$$= \int\left[\frac{\cos x\cos(x+a) + \sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} - 1\right] dx = \int \frac{\cos a}{\cos x \cos(x+a)}\, dx - x =$$

$$= -x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| + C \ (\sin a \neq 0;\ \cos x \neq 0;\ \cos(x+a) \neq 0).$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx,$$

где R — рациональная функция, в общем случае приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

а) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x,\ \cos x) \equiv -R(\sin x,\ \cos x),$$

или

$$R(\sin x;\ -\cos x) \equiv -R(\sin x;\ \cos x),$$

то выгодно применять подстановку $\cos x = t$ или соответственно $\sin x = t$.

б) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x,\ -\cos x) \equiv R(\sin x,\ \cos x),$$

то полезно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Найти интегралы:

187. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$ $(n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$, получаем

$$I = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_n.$$

Из непрерывности первообразной следует

$$I(2n\pi+\pi-0) = I(2n\pi+\pi+0),\quad \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = \frac{-\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1},$$

откуда находим $C_n = \frac{\pi n}{\sqrt{5}} + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная. Из неравенств $2n\pi < x+\pi < (2n+2)\pi$; $n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1$ следует, что $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Таким образом,

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C,\qquad x \neq (2n+1)\pi;$$

$$I = \lim_{x\to(2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}}\pi,\qquad x = (2n+1)\pi.$$

188. $I = \int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx.$

Решение. Пользуясь тождеством $\sin x\cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}$, находим $I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C$ $\left(x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

189. $I = \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx.$

Решение. Положим $t = \operatorname{tg}2x$; $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тогда

$$I = \int \frac{t^2dt}{t^4+8t^2+8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{t^2+4+2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4-2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n.$$

Из условия непрерывности первообразной следует

$$I\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}-0\right)=I\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}+0\right) \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\,\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\,\frac{\pi}{2}+C_n=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\,\frac{\pi}{2}+$$
$$+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\,\frac{\pi}{2}+C_{n+1},$$

откуда (по аналогии с примером 187) находим

$$C_n=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)n+C \qquad (C=C_0);$$

$$C_n=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right].$$

Следовательно,

$$I(x)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+$$
$$+\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right]+C;$$

$$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\quad I\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}} I(x).$$

190. Доказать, что

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

где A, B, C — постоянные; $x\neq k\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Доказательство. Положим

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x), \quad (1)$$

откуда $a_1=Aa-Bb$; $b_1=Ab+Ba$; поскольку $a^2+b^2\neq 0$, то из данной системы уравнений находим

$$A=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2};\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}.$$

Наконец, подставляя (1) в интеграл, получим требуемое, где C — постоянная интегрирования.

Найти интегралы:

191. $I=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx.$

Решение. Решение состоит в непосредственном использовании предыдущего примера. Замечая, что $a_1=1$; $b_1=-1$; $a=1$; $b=2$, находим $I=-\frac{x}{5}-\frac{3}{2}\ln|\sin x+2\cos x|+C$, $x\neq k\pi-\operatorname{arctg}2$.

192. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$

Решение. Используя пример 190, получаем

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx = A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\sin (x+\varphi)} - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} + C,$$

где

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad x \neq k\pi - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

193. Доказать, что $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$, где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты.

Доказательство. Положим

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a \sin x + b \cos x + c) + B(a \cos x - b \sin x) + C, \tag{1}$$

откуда $a_1 = Aa - Bb$; $b_1 = Ab + Ba$; $c_1 = Ac + C$.

Из данной системы уравнений находим

$$A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2+b^2}; \quad B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2+b^2}; \quad C = c_1 - AC.$$

Подставляя представление (1) в интеграл, получим требуемое.

194. Найти $\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx.$

Решение. Используем результат примера 193.

Здесь: $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{4}{5}$, $C = -\frac{6}{5}$. Таким образом,

$$\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx = -\frac{3}{5} x + \frac{4}{9} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3| - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 3}.$$

Произведя в последнем интеграле подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, находим

$$I = \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 3} = 2 \int \frac{dt}{\left(\sqrt{5}\, t + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{4}{5}} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{5t+1}{2} + C_n = \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} + C_n.$$

Из условия $I(2n\pi+\pi-0)=I(2n\pi+\pi+0)$ находим $C_n=\pi n+ + C$; $C=C_0$. Окончательно имеем

$$I=\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right];\quad x\neq 2n\pi+\pi;$$
$$I(2n\pi+\pi)=\lim_{x\to 2n\pi+\pi} I(x).$$

195. Доказать, что

$$\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\,dx=$$
$$=C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}+A\sin x+B\cos x,$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты, $x\neq k\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Доказательство. Запишем числитель дроби, стоящей под знаком интеграла, в виде

$$a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x=$$
$$=(a\sin x+b\cos x)(A\cos x-B\sin x)+C(\sin^2 x+\cos^2 x),\qquad (1)$$

откуда, приравнивая коэффициенты при функциях $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x\cos x$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1=-aB+C;\\ 2b_1=aA-bB;\\ c_1=Ab+C,\end{cases}$$

решая которую, находим

$$A=\frac{b(c_1-a_1)+2ab_1}{a^2+b^2};\quad B=\frac{a(c_1-a)-2bb_1}{a^2+b^2};\quad C=\frac{a_1b^2+c_1a^2-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

Наконец, подставляя выражение (1) в интеграл, получим требуемое.

196. Доказать, что если $(a-c)^2+b^2\neq 0$, то

$$\int\frac{(a_1\sin x+b_1\cos x)\,dx}{a\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x}=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

где A, B — неопределенные коэффициенты; λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0\qquad(\lambda_1\neq\lambda_2);$$

$$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x \text{ и } k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}\qquad(i=1,\ 2).$$

Доказательство. Приводя квадратичную форму $a\sin^2 x+ + 2b\sin x\cos x+c\cos^2 x$ к каноническому виду, получаем

$$a\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x=\lambda_1Y_1^2+\lambda_2Y_2^2,$$

где

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+b^2k_1^2}}(\cos x - bk_1 \sin x);$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+b^2k_2^2}}(\cos x - bk_2 \sin x). \qquad (1)$$

Разрешая уравнения (1) относительно $\cos x$ и $\sin x$, а также пользуясь тождеством $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$ (вектор $\boldsymbol{x} = \{\sin x, \cos x\}$ при переходе к другому базису не меняет длины), представляем левую часть доказываемого равенства в виде

$$\int \frac{-a_1 d(\cos x) + b_1 d(\sin x)}{\lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2} = -\frac{b_1 bk_1 + a_1}{\sqrt{1+b^2k_1^2}} \int \frac{dY_1}{(\lambda_1-\lambda_2) Y_1^2 + \lambda_2} -$$

$$-\frac{b_1 bk_2 + a_2}{\sqrt{1+b^2k_2^2}} \int \frac{dY_2}{(\lambda_2-\lambda_1) Y_2^2 + \lambda_1}. \qquad (2)$$

Замечая, далее, что $\frac{1}{k_2 b} = -bk_1$, из (1) получаем

$$Y_1 = \frac{u_2}{b\sqrt{1+b^2k_1^2}}, \qquad Y_2 = \frac{u_1}{b\sqrt{1+b^2k_2^2}}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), находим окончательно требуемое равенство. При этом получаем

$$A = -\frac{b_1 bk_2 + a_1}{b(1+b^2k_2^2)}, \qquad B = -\frac{b_1 bk_1 + a_1}{b(1+b^2k_1^2)}.$$

Найти интегралы:

197. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\, dx.$

Решение. Имеем

$$\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\, dx = -2\int \frac{d(\cos x)}{3+\cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4-\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \ln \frac{2-\sin x}{2+\sin x} + C.$$

198. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$

Решение. Пользуясь предыдущей теоремой, находим

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \frac{3}{5}\int \frac{du_1}{u_1^2+1} +$$

$$+ \frac{1}{10}\int \frac{du_2}{-\frac{1}{4}u_2^2 + 6} = \frac{3}{5} \operatorname{arctg}(\sin x - 2\cos x) +$$

$$+ \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + 2\sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x - \cos x} \right| + C.$$

199. $I = \int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x}\, dx.$

Указание. Представить знаменатель в виде

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 4 \sin x \cos x$$

и воспользоваться предыдущей теоремой.

Ответ. $I = \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1} \right| -$

$- \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)} \right| + C \qquad \left(\sin 2x \neq -\frac{1}{2}\right).$

200. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

где A, B, C — неопределенные коэффициенты.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \int \frac{d(-a\cos x + b\sin x)}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} = \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} -$$

$$-(n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}} = \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} -$$

$$-(n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2 + (b\cos x + a\sin x)^2}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}\, dx,$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)\, I_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}\right],$$

что и требовалось доказать.

201. Найти $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

Решение. Используя доказанную выше формулу, находим

$$I_3 = \frac{1}{10}\left[\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right)\right| + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right] + C$$

$$(x \neq k\pi - \operatorname{arctg} 2).$$

202. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} +$$

$$+ C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \qquad (|a| \neq |b|)$$

и определить коэффициенты A, B и C, если n — натуральное число, больше единицы.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$I_{n-2} = \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} = \int \frac{a + b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\, dx =$$

$$= aI_{n-1} + b \int \frac{d \sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} =$$

$$= aI_{n-1} + \frac{b \sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} - (n-1) \int \frac{b^2 \sin^2 x}{(a + b\cos x)^n}\, dx,$$

откуда, используя тождество

$$b^2 \sin^2 x = -(a^2 - b^2) + 2a(a + b\cos x) - (a + b\cos x)^2,$$

находим

$$I_{n-2} = aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + (a^2 - b^2)(n-1) I_n -$$

$$- 2a(n-1) I_{n-1} + (n-1) I_{n-2};$$

$$I_n = - \frac{b \sin x}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)} I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)} I_{n-2}.$$

Таким образом,

$$A = - \frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)}; \qquad B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}; \quad C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}.$$

Найти интегралы:

203. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

Решение. Полагая $\cos x = t$, имеем

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} = - \int \frac{dt}{t\sqrt{2 - t^2}}.$$

Если $t > 0$, то

$$- \int \frac{dt}{t\sqrt{2 - t^2}} = - \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2} - 1} \right| + C.$$

Если же $t < 0$, то

$$- \int \frac{dt}{t\sqrt{2 - t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{2}{t^2} - 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{t} + \sqrt{\frac{2}{t^2} - 1} \right| + C.$$

Объединяя оба ответа в один, получаем

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2}}{|t|} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|} + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

204. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

Решение. Произведем замену переменной, полагая $\operatorname{tg} x = t^2$; $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots)$:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx = \int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x dx = \int \frac{2t^4}{1+t^4} dt = 2t - 2\int \frac{dt}{1+t^4}.$$

Используя решение примера 145, получаем

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx = 2t - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x} + 1} + C.$$

205. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}} dx.$

Решение. Используя тождественные преобразования, получаем

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3-(\sin x - \cos x)^2}} = -\frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x +$$

$$+ \sqrt{2+\sin 2x}) + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} + C.$$

206. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$, если: а) $0 < \varepsilon < 1$; б) $\varepsilon > 1$.

Решение. Положим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $\quad (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тогда

$$I = \int \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} = \frac{2}{1-\varepsilon} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

а) $I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n.$

По аналогии с решением примера 187 находим

$$I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\, \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq (2n+1)\pi;$$

$$I((2n+1)\pi) = \lim_{x \to (2n+1)\pi} I(x).$$

б) $$I = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}}{t + \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}} \right| + C, \qquad x \neq 2n\pi + \pi.$$

207. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$, если $0 < \varepsilon < 1$.

Решение. Применим формулу, полученную в примере 202. Полагая там $a = 1$, $b = \varepsilon$, $n = 2$, получим (см. пример 206):

$$I(x) = \int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{-\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{-\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\, \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right) + C, \qquad x \neq 2n\pi + \pi,$$

$$I(2n\pi + \pi) = \lim_{x \to 2n\pi+\pi} I(x).$$

208. $$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n-1}\frac{x-a}{2}}\, dx.$$

Решение. Положим при $x \neq a + 2n\pi$ $\quad t = \dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$.

Тогда $dt = -\dfrac{1}{2} \dfrac{\cos a\, dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}$

и

$$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\, dx = -\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1} dt = -\frac{2t^n}{n\cos a} + C =$$

$$= -\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n + C \qquad (\cos a \neq 0).$$

209. Вывести формулу понижения для интеграла

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx \quad (n \text{ — натуральное число}).$$

Решение. Обозначим $t = \sin \frac{x-a}{2} \cdot \left(\sin \frac{x+a}{2}\right)^{-1}$ и рассмотрим интеграл

$$I_n - I_{n-2} = \int t^{n-2} (t^2 - 1)\, dx = \int t^{n-2} \frac{\sin^2 \frac{x-a}{2} - \sin^2 \frac{x+a}{2}}{\sin^2 \frac{x+a}{2}}\, dx.$$

Так как $dt = \dfrac{\sin a dx}{2 \sin^2 \frac{x+a}{2}}$, то

$$I_n - I_{n-2} = -2 \int t^{n-2} \sin x dt = 2 \int t^{n-2} [\sin a - (\sin a + \sin x)]\, dt =$$

$$= 2 \sin a \int t^{n-2} dt - 2 \int t^{n-2} (\sin a + \sin x)\, dt,$$

откуда

$$I_n - I_{n-2} = \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} - 2 \int t^{n-2} \frac{(\sin a + \sin x) \sin a}{2 \sin^2 \frac{x+a}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} - 2 \int t^{n-2} dx - 2 \int t^{n-2} \left[\frac{(\sin a + \sin x) \sin a}{2 \sin^2 \frac{x+a}{2}} - 1 \right] dx =$$

$$= \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} - 2 I_{n-2} + \sigma,$$

где

$$\sigma = -2 \int t^{n-1} \frac{(\sin a + \sin x) \sin a - 2 \sin^2 \frac{x+a}{2}}{2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}\, dx =$$

$$= -2 \int t^{n-1} \frac{\sin^2 a + \sin x \sin a - 1 + \cos (x+a)}{\cos a - \cos x}\, dx =$$

$$= -2 \int t^{n-1} \frac{\cos a (\cos x - \cos a)}{\cos a - \cos x}\, dx = 2 \cos a \int t^{n-1}\, dx = 2 I_{n-1} \cos a.$$

Окончательно имеем

$$I_n = \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-2} - I_{n-2} + 2 I_{n-1} \cos a \qquad (n > 2)$$

§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций

210. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\, e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

Доказательство проводится методом интегрирования по частям. Имеем

$$\int P(x)\, e^{ax}dx = \frac{1}{a} e^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} e^{ax}P'(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}P''(x)\, dx\right) =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right) + \frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''(x)\, dx.$$

Применив метод математической индукции, находим

$$\int P(x)\, e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}}\right) +$$

$$+ (-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}\int e^{ax}P^{(k+1)}(x)\, dx \qquad (k \leqslant n).$$

Положив $k = n$ и приняв во внимание, что $P^{n+1}(x) \equiv 0$, получим требуемую формулу.

211. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C$$

и

$$\int P(x)\sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\sin ax}{a}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

Доказательство опирается на доказанную выше теорему. Заменяя там a на ia, где $i = \sqrt{-1}$, получаем

$$\int P(x)\, e^{iax}dx = e^{iax}\left[-i\frac{P(x)}{a} + \frac{P'(x)}{a^2} + i\frac{P''(x)}{a^3} + \ldots\right] + C.$$

Пользуясь формулой Эйлера и разделяя вещественные и мнимые части, найдем требуемое.

Найти интегралы:

212. $\int x^3 e^{3x}dx$.

Решение. Пользуясь примером 210, находим

$$\int x^3 e^{3x} dx = e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right) + C =$$
$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\right) + C.$$

213. $\int x^7 e^{-x^2} dx.$

Решение. Полагая $x^2 = t$, имеем

$$\int x^7 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^6 e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}\int t^3 e^{-t} dt =$$
$$= \frac{e^{-t}}{2}(-t^3 - 3t^2 - 6t - 6) + C = -\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C.$$

214. $\int xe^x \sin x dx.$

Решение. Полагая $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, пользуемся примером 210:

$$\int xe^x \sin x dx = \frac{1}{2i}\int x\left(e^{x(1+i)} - e^{x(1-i)}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{x(1+i)}\left(\frac{x}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\right) - e^{x(1-i)}\left(\frac{x}{1-i} - \frac{1}{(1-i)^2}\right)\right] + C =$$
$$= \frac{e^x}{2}[x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C.$$

215. $\int x^2 e^x \cos x dx.$

Решение. Полагая $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, пользуемся примером 210.

$$\int x^2 e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\int x^2\left(e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[e^{x(1+i)}\left(\frac{x^2}{1+i} - \frac{2x}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{x(1-i)}\left(\frac{x^2}{1-i} - \frac{2x}{(1-i)^2} + \frac{2}{(1-i)^3}\right)\right] + C =$$
$$= \frac{e^x}{2}[x^2(\sin x + \cos x) - 2x \sin x + \sin x - \cos x] + C.$$

Примечание. Этот пример, как и предыдущий, можно решать, применяя многократное интегрирование по частям, положив (для начала): $u = x^2 e^x$; $dv = \cos x dx$.

216. $\int \cos^2 \sqrt{x}\, dx.$

Решение. Положим $\sqrt{x} = t$, откуда $x = t^2$, $dx = 2tdt$. Тогда

$$\int \cos^2 \sqrt{x} dx = 2\int t\cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t)\, dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\sin 2t +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos 2t + C = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x}) + C.$$

217. Доказать, что если R — рациональная функция и числа a_1, a_2, ..., a_n соизмеримы, то интеграл

$$\int R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ \ldots, \ e^{a_nx})\,dx$$

есть элементарная функция.

Доказательство. Напомним, что числа a_1, a_2, ..., a_n называются соизмеримыми, если отношение любых двух из них рационально, т. е. их можно представить в виде

$$a_1 = \alpha\frac{p_1}{q_1}, \ \alpha_2 = \alpha\frac{p_2}{q_2}, \ \ldots, \ a_n = \alpha\frac{p_n}{q_n},$$

где α — действительное число; p_i, q_i — взаимно простые целые числа.

Пусть r — наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2, ..., q_n. Тогда, положив в рассматриваемом интеграле $e^{\frac{\alpha x}{r}} = u$, получим

$$\int R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ \ldots, \ e^{a_nx})\,dx = \frac{r}{\alpha}\int R(u^{r_1p_1}, u^{r_2p_2}, \ \ldots, \ u^{r_np_n})\frac{du}{u} = \int \Phi(u)\,du,$$

где $r_i = \frac{r}{q_i}$ — целые числа, а $\Phi(u)$ — рациональная функция. Так как интеграл от рациональной функции есть функция элементарная, то теорема доказана.

Найти следующие интегралы:

218. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

Решение. В соответствии с доказанной в примере 217 теоремой положим $e^x = u$.
Тогда

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{udu}{1+u} = u - \ln(1+u) + C = e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

219. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

Решение. Положим $e^{\frac{x}{6}} = u$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = 6\int \frac{du}{u(1+u+u^2+u^3)} = 6\int \frac{du}{u(1+u)(1+u^2)} =$$

$$= \int \frac{A}{u}du + \int \frac{Bdu}{1+u} + \int \frac{Cu+D}{1+u^2}du = A\frac{x}{6} + B\ln(1+e^{\frac{x}{6}}) + $$

$$+ D\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} + \frac{C}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{6}}) + C,$$

где $A=6$, $B=C=D=-3$. Окончательно

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = x-3\ln\left[(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-$$

$$-3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}+C.$$

220. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx.$

Решение. Положим $t=e^x$. Тогда

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}-$$

$$-\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \ln(t+\sqrt{t^2-1})+$$

$$+\arcsin\frac{1}{t}+C = \ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})+C.$$

221. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

Решение. Положив $e^x=u$, имеем

$$I=\int \frac{du}{u(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u})} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u^2}\,du-\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-u}}{u^2}\,du.$$

Вычислим один из интегралов:

$$\int \frac{\sqrt{1+u}}{u^2}\,du = \int \sqrt{1+u}\,d\left(-\frac{1}{u}\right) = -\frac{\sqrt{1+u}}{u}+\int \frac{d(\sqrt{1+u})}{u} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+u}}{u}+\int \frac{d(\sqrt{1+u})}{(\sqrt{1+u})^2-1} = -\frac{\sqrt{1+u}}{u}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt{1+u}+1}+$$

$$+C = -\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$$

Второй интеграл получаем из первого заменой u на $-u$.

222. Доказать, что интеграл $\int R(x)\,e^{ax}\,dx$, где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \operatorname{li}(e^{ax})+C,$$

где $\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}.$

Доказательство. Рациональная функция представляется в виде

$$R(x) = \frac{M(x)}{N(x)},$$

где $M(x)$ и $N(x)$ — многочлены. Выделяя целую часть $P(x)$ (если она имеется), получаем

$$R(x) = P(x) + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{ki}}{(x - x_k)^i},$$

где m_k — кратность корня x_l; A_{ij} — неопределенные коэффициенты. Наконец, интегрируя $R(x)$, получаем

$$\int R(x)\, e^{ax} dx = \int P(x)\, e^{ax}\, dx + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} A_{ki} \int \frac{e^{ax}}{(x - x_k)^i}\, dx.$$

Первый интеграл вычисляется l-кратным интегрированием по частям (l — степень многочлена $P(x)$). Вычисляя второй, находим

$$I_{ik} = \int \frac{e^{ax} dx}{(x - x_k)^i} = \int e^{ax} d\left[-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^i}\right] = -\frac{e^{ax}}{(i-1)(x-x_k)^i} +$$

$$+ \frac{a}{i-1} \int \frac{e^{ax} dx}{(x-x_k)^{i-1}} = e^{ax}\left(-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} -\right.$$

$$\left. - \frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}} - \ldots - \frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\ldots 1\,(x-x_k)}\right) +$$

$$+ \frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\ldots 1} \int \frac{e^{ax} dx}{x - x_k} = -e^{ax}\left(\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} +\right.$$

$$\left. + \frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}} + \ldots + \frac{a^{i-2}}{(i-1)!\,(x-x_k)}\right) +$$

$$+ \frac{a^{i-2} e^{ax_k}}{(i-1)!} \int \frac{e^{a(x-x_k)}}{x-x_k}\, d(x - x_k) = -e^{ax}\left(\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} +\right.$$

$$\left. + \frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}} + \ldots + \frac{a^{i-2}}{(i-1)!\,(x-x_k)}\right) +$$

$$+ \frac{a^{i-2} e^{ax_k}}{(i-1)!} \operatorname{li}\left(e^{a(x-x_k)}\right).$$

Итак,

$$\int R(x)\, e^{ax} dx = R_1(x) + \sum_l \sum_{i=1}^{m_k} A_{ki} I_{ik},$$

что и требовалось доказать.

223. В каком случае интеграл $\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$, где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \dots, a_n$ постоянны, представляет собой элементарную функцию?

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^{ax} dx = \int \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right) e^x dx =$$

$$= a_0 e^x + a_1 \operatorname{li}(e^x) - \frac{a_2}{x} e^{ax} + a_2 \operatorname{li}(e^x) - \frac{a_3}{2x^2} - \frac{a_3}{2x} +$$

$$+ \frac{a_3}{2} \operatorname{li}(e^x) - \dots - \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a_n}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \dots -$$

$$- \frac{a_n}{(n-1)!\,x} + \frac{a_n}{(n-1)!} \operatorname{li}(e^x).$$

Отсюда следует, что если

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0,$$

то данный интеграл есть элементарная функция.

Найти интегралы:

224. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

Решение. Интегрируя по частям, имеем

$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx =$$

$$= e^x - 4 \operatorname{li}(e^x) - \frac{4}{x} e^x + 4 \operatorname{li}(e^x) = e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C \qquad (x \neq 0).$$

225. $\int \frac{e^{2x} dx}{x^2 - 3x + 2}.$

Решение. Разлагая рациональную функцию на простые дроби и интегрируя, находим

$$\int \frac{e^{2x} dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1} dx =$$
$$= e^4 \operatorname{li}(e^{2(x-2)}) - e^2 \operatorname{li}(e^{2(x-1)}) + C \qquad (x \neq 1,\ x \neq 2).$$

226. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$

Решение. Выделяя целую часть и применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx = \int (x^2 + 4x + 12) e^{2x} dx + \int \frac{(32x - 48) e^{2x}}{(x-2)^2} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right) e^{2x} - \int (32x - 48)\, e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right) =$$

$$= \left(x^2 + 3x - \frac{32}{x-2}\right) \frac{e^{2x}}{2} + 64e^4 \operatorname{li}(e^{2x-2}) + C \qquad (x \neq 2).$$

Найти интегралы, содержащие функции $\ln f(x)$, $f(\ln x)$; $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, где $f(x)$ — алгебраическая функция:

227. $\int \ln^n x dx$ (n — натуральное число):

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx =$$

$$= x \ln^n x - nI_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad I_0 = x,$$

откуда

$$I_n = x \ln^n x - n\,(x \ln^{n-1} x - (n-1)\, I_{n-2}) = x \ln^n x - nx \ln^{n-1} x +$$

$$+ n(n-1)\, I_{n-2} = x \ln^n x - nx \ln^{n-1} x + n(n-1)(x \ln^{n-2} x -$$

$$- (n-2)\, I_{n-3}) = x \ln^n x - nx \ln^{n-1} x + n(n-1)\, x \ln^{n-2} x -$$

$$- n(n-1)(n-2)\, I_{n-3} = x(\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1) \ln^{n-2} x -$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} n(n-1) \ldots 2 \cdot \ln x + (-1)^n \cdot n!) + C$$

$$(x > 0).$$

228. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}\right] \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

Решение. Преобразовывая подынтегральную функцию, находим

$$\int \ln\left[(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}\right] \frac{dx}{(x+a)(x+b)} =$$

$$= \int \left[\frac{\ln(x+a)}{x+b} + \frac{\ln(x+b)}{x+a}\right] dx = \int [\ln(x+a)\, d(\ln(x+b)) +$$

$$+ \ln(x+b)\, d(\ln(x+a))] = \int d[\ln(x+a) \cdot \ln(x+b)] =$$

$$= \ln(x+a) \cdot \ln(x+b) + C.$$

229. $\int \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2})\, dx$.

Решение. Применяя интегрирование по частям, находим

$$\int \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2})\, dx = x \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) -$$

$$- 2\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = x \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) -$$

$$- \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, d(2\sqrt{1+x^2}) = x \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) -$$

$$- 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

230. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\, dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx = x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx =$$

$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) - \frac{1}{2}\int \frac{x(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{-2x}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{x(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{-2x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) +$$

$$+\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right)dx + \frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)dx =$$

$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) - \frac{x}{2} + \int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx =$$

$$= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C \qquad (|x|<1).$$

231. $\int\left(\frac{\ln x}{}\right)^3 dx.$

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = -\int \ln^3 x\, d\left(\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} + \int \frac{3\ln^2 x}{2x^3}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \int \ln^2 x\, d\left(\frac{3}{4x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} + \int \frac{3\ln x}{2x^3}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} - \int \ln x\, d\left(\frac{3}{4x^2}\right) = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} -$$

$$-\frac{3\ln x}{4x^2} + \int \frac{3dx}{4x^3} = -\frac{\ln^3 x}{2x^2} - \frac{3\ln^2 x}{4x^2} - \frac{3\ln x}{4x^2} - \frac{3}{8x^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C \qquad (x>0).$$

232. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

Решение. Положим $\ln x = u$; $\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = dv$. Тогда (см. пример 11)

$$v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя исходный интеграл по частям, получаем

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

233. $\int x \arcsin(1-x)\,dx$.

Решение. Применяя простейшие преобразования и интегрирование по частям, находим

$$\int x\arcsin(1-x)\,dx = \int (1-x)\arcsin(1-x)\,d(1-x) -$$
$$-\int \arcsin(1-x)\,d(1-x) = \int t\arcsin t\,dt -$$
$$-\int \arcsin t\,dt = \frac{t^2}{2}\arcsin t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}} - t\arcsin t +$$
$$+\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2}{2}\arcsin t - t\arcsin t - \sqrt{1-t^2} - I,$$

где $I = \int \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Положим $t = \sin\varphi$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\varphi}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\varphi = \frac{1}{4}\arcsin t - \frac{t}{4}\sqrt{1-t^2}.$$

Окончательно имеем

$$\int x\arcsin(1-x)\,dx = \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) - \frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2} + C$$
$$(0<x<2).$$

234. $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx = \int \arccos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{|x|\,dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{sgn} x + C \qquad (|x|>1).$$

235. $\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \arccos x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{dx}{1-x^2} =$$
$$= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad (|x|<1).$$

236. $\int x\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2)\,dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int x\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2)\,d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot \int \ln(1+x^2)\, d(x^2) - \frac{1}{2}\int [(x^2+1)\ln(1+x^2) - x^2] \times$$

$$\times \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,[(x^2+1)\ln(1+x^2) - x^2] - \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot [(x^2+1)\ln(1+x^2) - x^2] -$$

$$- \frac{1}{2}[x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x] + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(3+x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) +$$

$$+ \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) + C.$$

237. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

Решение. Используя результат решения примера 11 и интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Найти интегралы, содержащие гиперболические функции:

238. $\int \operatorname{ch}^4 x dx.$

Решение. Применяя формулы понижения степени, получаем

$$\int \operatorname{ch}^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1+\operatorname{ch} 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} + 2\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{2}\operatorname{ch} 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x\right) + C.$$

239. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx.$

Решение. Последовательно применяя формулы перехода от произведения гиперболических функций к сумме, получаем

$$\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sh} 2x(\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} 4x)\,dx = \frac{\operatorname{ch} 6x}{24} - \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} + C.$$

240. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}dx.$

Решение. Положим $t = \sqrt{\operatorname{th} x}$. Тогда $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2tdt}{1-t^4}$;

$$\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx = 2\int \frac{t^2 dt}{1-t^4} = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} -$$

$$-\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{1-\sqrt{\operatorname{th} x}}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x} + C \qquad (x \geqslant 0).$$

241. $\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx dx.$

Решение. Применяя последовательно дважды интегрирование по частям, находим

$$\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx dx = \frac{\operatorname{sh} ax}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} ax \cdot \sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}\operatorname{ch} ax \cdot \cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx dx,$$

откуда

$$\int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx dx = \frac{a \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx + b \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx}{a^2+b^2} + C.$$

§ 6. Разные примеры на интегрирование функций

Найти интегралы:

242. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

Решение. Положим $x = \frac{1}{t}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = -\int \frac{t^6 dt}{t^2+1} = -\int (t^4 - t^2 + 1)\,dt + \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} -$$

$$-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + C \qquad (x \neq 0).$$

243. $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}$.

Решение. Применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} = \int x \frac{x dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{4}I,$$

где

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} = \int x \cdot \frac{x dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x}{2(1-x^2)} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Итак,

$$\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad (x \neq \pm 1).$$

244. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

Решение. Представляя знаменатель в виде $1+x^4+x^8 = (x^4+1)^2 - x^4 = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$, разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$$\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\right).$$

Интегрируя последнее выражение почленно, получим

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x;$$

$$\int \frac{1-x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = -\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right|.$$

Итак, искомый интеграл равен

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right| + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right) + C.$$

245. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx.$

Решение. Произведем подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx = 2\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{2}{3}\int \frac{d(t^3)}{\sqrt{1-t^3}} =$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C \qquad (0 < x < 1).$$

246. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Решение. Рассматривая подынтегральную функцию как дифференциальный бином, имеем $m = -\frac{2}{3}$, $n = 1$, $p = -\frac{1}{3}$, $a = 1$, $b = -1$. Тогда подстановка $\left(\frac{m+1}{n} + p\text{ — целое}\right)$ $z^3 = \frac{1}{x} - 1$ приводит к интегралу

$$-3\int \frac{zdz}{z^3+1},$$

который можно вычислить методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{zdz}{z^3+1} = \int \frac{A}{z+1}\,dz + \int \frac{Bz+D}{z^2-z+1}\,dz,$$

где $A = -B = -D = -\frac{1}{3}$. Выделяя в знаменателе второго интеграла полный квадрат, получаем

$$\int \frac{Bz+D}{z^2-z+1}\,dz = \frac{1}{3}\int \frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = -3\int \frac{zdz}{z^3+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{z^2-z+1} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2z}{\sqrt{3}} + C,$$

где $z = \left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}$ $(x \neq 0,\ x \neq 1)$.

247. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

Решение. Произведем подстановку $x^3 = t$. Тогда $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}}$ (здесь мы воспользовались тем, что всегда $\alpha\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}$, где $t = x^\alpha$).

Полагая далее $t = \begin{cases} \frac{1}{z} & (t>0), \\ -\frac{1}{z} & (t<0) \end{cases}$ и выделяя затем полный квадрат, получаем

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3}\ln\left(z+\frac{1}{2}+\sqrt{z^2+z+1}\right) + C$$

$$(t>0);$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} = -\frac{1}{3}\ln\left(z-\frac{1}{2}+\sqrt{z^2-z+1}\right) + C \qquad (t<0).$$

Объединяя два ответа в один, окончательно имеем

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}}=-\frac{1}{3}\ln\frac{2+t+2\sqrt{1+t+t^2}}{2|t|}+C.$$

248. $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Решение. Произведя подстановку $x=\sin t$ и интегрируя затем по частям, получаем

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{t}{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)\,dt=\frac{t^2}{2}+\int\frac{tdt}{\sin^2 t}=$$
$$=\frac{t^2}{2}-\int t\,d(\operatorname{ctg}t)=\frac{t^2}{2}-t\operatorname{ctg}t+\ln|\sin t|+C=$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin^2 x-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C\qquad(0<|x|<1).$$

249. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

Решение. Положим $t=\sqrt{x^2+1}$. Тогда

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int t^2\ln(t^2-2)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int\ln(t^2-2)\,d\left(\frac{t^3}{3}\right)=\frac{1}{6}t^3\ln(t^2-2)-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}=$$
$$=\frac{t^3}{6}\ln(t^2-2)-\frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}+2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)+C.$$

250. $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

Решение. Интегрируя по частям, получим

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx=-\int\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,d\left(\sqrt{1-x^2}\right)=$$
$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\int\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}\right)dx=$$
$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+$$
$$+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C\qquad(0<x<1).$$

251. $\bar{I} = \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

Решение. Пользуясь теоремой примера 202

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2} = -I_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\cos x}{2+\sin x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{2+\sin x},$$

последний интеграл вычислим с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$I(x) = \int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + C_n.$$

Из условия $I(\pi + 2n\pi - 0) = I(\pi + 2n\pi + 0)$ аналогично тому, как мы поступали при решении примера 187, находим

$$C_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n + C; \quad C = C_0; \quad 2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi.$$

Таким образом,

$$\bar{I}(x) = \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{1}{3}\frac{\cos x}{2+\sin x} +$$

$$+ \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C; \qquad x \neq 2n\pi + \pi;$$

$$\bar{I}(2n\pi + \pi) = \lim_{x \to 2n\pi+\pi} I(x).$$

252. $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}}$.

Решение. Произведя подстановку $t = \sqrt{1+\cos x}$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = 2\int \frac{dt}{t^2(t^2-2)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2-2}\right) dt,$$

где $A = 0$; $B = -1$; $C = 0$; $D = 1$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos t}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}} + C \qquad (x \neq k\pi).$$

253. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим $x = \operatorname{tg} t$. Тогда

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx = \int t(a\operatorname{tg}^2 t + b)\, dt = \frac{bt^2}{2} + a\int t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt.$$

Последний интеграл вычислим интегрированием по частям:

$$\int t\cdot \operatorname{tg}^2 t dt=\int t d(\operatorname{tg} t-t)=t(\operatorname{tg} t-t)-$$
$$-\int(\operatorname{tg} t-t)\,dt=t\cdot\operatorname{tg} t-\frac{t^2}{2}+\ln|\cos t|+C.$$

Итак,

$$\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x dx=\frac{b-a}{2}\operatorname{arctg}^2 x+a\left(x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)+C.$$

254. $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

Решение. Положим $x=\operatorname{th} t$. Тогда

$$\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=2\int(a\operatorname{th}^2 t+b)\,t dt=bt^2+2a\int t\cdot\operatorname{th}^2 t dt.$$

Последний интеграл вычисляем интегрированием по частям:

$$\int t\cdot\operatorname{th}^2 t dt=t(t-\operatorname{th} t)=\int(t-\operatorname{th} t)\,dt=\frac{t^2}{2}-t\cdot\operatorname{th} t+\ln|\operatorname{ch} t|+C.$$

Итак,

$$\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\right.$$
$$\left.-\ln|1-x^2|\right)+C.$$

255. $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx.$

Решение. Переходим к удвоенному аргументу в знаменателе:

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx=2\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 2x+4\cos 2x+5}}=$$
$$=-2\int\frac{d(\cos 2x)}{\sqrt{\cos^2 2x+4\cos 2x+4}}$$

Последний интеграл вычислим, приводя знаменатель к каноническому виду:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+5}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2+1}}=\ln|t+2+\sqrt{t^2+4t+5}|+C,$$

где $t=\cos 2x$.

Итак,

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx=-\ln|\cos 2x+2+2\sqrt{1+\cos^4 x}|+C.$$

256. $\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Решение. Положим $x=\cos t$. Тогда

$$\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int t\cos^3 t dt=-\int t d\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)=$$

$$= -t\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) + \int\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)dt = t\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \sin t\right) -$$
$$-\cos t - \frac{1}{3}\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right) + C = -\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2+x^2}{3}\right)\arccos x -$$
$$-\frac{6x+x^3}{9} + C\ (|x| < 1).$$

257. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

Р е ш е н и е. Подстановка $x = \operatorname{tg} t$ приводит к интегралу $\int t \cdot \operatorname{tg}^4 t\,dt$, который вычисляется методом интегрирования по частям:

$$\int t \cdot \operatorname{tg}^4 t\,dt = t\left(t - \operatorname{tg} t + \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}\right) - \int\left(t - \operatorname{tg} t + \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}\right)dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} + t\left(\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3} - \operatorname{tg} t\right) - \frac{\operatorname{tg}^2 t}{6} - \frac{4}{3}\ln|\cos t| + C.$$

Поэтому

$$\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} +$$
$$+ \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C \qquad (x \neq k\pi).$$

258. $I = \int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,dx.$

Р е ш е н и е. Интегрируя по частям, получаем

$$I = \frac{1}{2}\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\frac{d(x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} -$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью подстановки $t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{dx}{1-2t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right| =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|.$$

Окончательно имеем

$$I = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C \qquad (x = \pm 1).$$

259. $\int x^x(1+\ln x)\,dx.$

Р е ш е н и е. Положим $x^x = t$. Тогда $x^x(1+\ln x)\,dx = dt$. Таким образом,

$$\int x^x(1+\ln x)\,dx = \int dt = t + C = x^x + C \qquad (x > 0).$$

260. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx.$

Решение. Положим $t = e^x$ и применим метод интегрирования по частям. Тогда

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx = \int \frac{\arcsin t}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\arcsin t +$$

$$+\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{t}\arcsin t - \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} + C \qquad (0<t<1).$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx = -e^{-x}\arcsin e^x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right) + x + C$$

$$(-\infty<x<0).$$

261. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx.$

Решение. Положим $e^{\frac{x}{2}} = t$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1+t^2)}\,dt = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,dt -$$

$$-2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt = -\operatorname{arctg}^2 t - \frac{2}{t}\operatorname{arctg} t + 2\int \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Но $\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \ln\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, поэтому

$$\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}\,dx}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} = -2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + x - \ln(1+e^x) + C.$$

262. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x dx.$

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,d(e^x) = e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x} -$$

$$-\int e^x\cdot\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx = e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int\frac{e^x dx}{1+\cos x} +$$

$$+\int\frac{e^x d(\cos x)}{(1+\cos x)^2} = e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int\frac{e^x dx}{1+\cos x} -$$

$$-e^x\cdot\frac{1}{1+\cos x} + \int e^x\frac{dx}{1+\cos x} + C = \frac{e^x\sin x}{1+\cos x} + C.$$

263. $\int |x|\,dx.$

Решение. При $x > 0$ имеем

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

аналогично при $x < 0$

$$-\int x dx = -\frac{x^2}{2} + C_2.$$

В точке $x = 0$ согласно определению первообразной должно быть $C_1 = C_2 = C$, где C — произвольная постоянная. Поэтому при всех x имеем

$$\int |x|\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x + C = \frac{x|x|}{2} + C.$$

264. $\int \{|1 + x| - |1 - x|\}\,dx.$

Решение. Разбивая интеграл на два и пользуясь результатом предыдущего примера, находим

$$\int \{|1+x| - |1-x|\}\,dx = \int |1+x|\,dx + \int |1-x|\,d(1-x) =$$

$$= \frac{1}{2}[(1+x)|1+x| + (1-x)|1-x|] + C.$$

265. $\int e^{-|x|}dx.$

Решение. Рассмотрим случаи: $x \geqslant 0$ и $x < 0$. Имеем

$$\int e^{-|x|}dx = \int e^x dx = e^x + C_1 \qquad (x < 0);$$

$$\int e^{-|x|}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_2 \qquad (x \geqslant 0).$$

Первообразная функция непрерывна, поэтому в точке $x = 0$ имеем $-1 + C_2 = 1 + C_1$, откуда $C_2 = 2 + C_1$.
Итак,

$$\int e^{-|x|}dx = \begin{cases} 2 - e^{-x} + C, & x \geqslant 0; \\ e^x + C, & x < 0, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

266. $\int \max(1, x^2)\,dx.$

Решение. Рассматриваем случаи: $|x| \leqslant 1$ и $|x| > 1$. В первом случае находим

$$\max(1, x^2)\,dx = \int dx = x + C_1;$$

во втором

$$\int \max(1, x^2)\,dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Поскольку первообразная функция непрерывна, то в точке $x = 1$ должно выполняться равенство $1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2$ (при $x > 0$).

Аналогично в точке $x=-1$ имеем $-1+C_1=-\frac{1}{3}+C_2$ (при $x<0$).

Итак, при $x>0$ находим

$$\int \max(1, x^2)\,dx = \begin{cases} x+C, & 0<x\leqslant 1; \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}+C, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

При $x\leqslant 0$ получим

$$\int \max(1, x^2)\,dx = \begin{cases} x+C, & -1\leqslant x<0; \\ \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}+C, & -\infty<x<-1. \end{cases}$$

Объединяя два ответа в один, имеем

$$\int \max(1, x^2)\,dx = \begin{cases} x+C, & |x|\leqslant 1; \\ \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}\operatorname{sgn} x+C, & |x|>1, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

267. $\int \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа.

Решение. По определению $\varphi(x)=|x-n|$; $n-\frac{1}{2}\leqslant x<$ $<n+\frac{1}{2}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, поэтому (см. пример 264):

$$I(x)=\int \varphi(x)\,dx=\frac{1}{2}(x-n)|x-n|+C_n, \quad n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}.$$

Из непрерывности первообразной получаем

$$I\left(n+\frac{1}{2}-0\right)=I\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

т. е. $\frac{1}{8}+C_n=-\frac{1}{8}+C_{n+1}$, $C_{n+1}=C_n+\frac{1}{4}$, откуда $C_n=\frac{n}{4}+C$, где $C=C_0$ — произвольная постоянная.

Поскольку $n\leqslant x+\frac{1}{2}<n+1$, то $n=\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Окончательно находим

$$I(x)=\frac{1}{2}\left(x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)\left|x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|+\frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{2}\right]+C.$$

268. $\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx$.

Решение. По определению имеем

$$[x]\,|\sin \pi x|=(-1)^n n \sin \pi x; \quad n\leqslant x<n+1 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} n \cos \pi x + C_n; \quad n \leqslant x < n+1.$$

По непрерывности первообразной в точках $x = n + 1$ должно быть

$$\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot n \cos \pi x + C_n\right]\Bigg|_{x=n+1} =$$
$$= \left[\frac{(-1)^{n+2}}{\pi} (n+1) \cos \pi x + C_{n+1}\right]\Bigg|_{x=n+1},$$

откуда $C_{n+1} = C_n + \dfrac{2n+1}{\pi}$.

Решая это разностное уравнение, получаем $C_n = C + \dfrac{n^2}{\pi}$ $(C = C_0)$. Поэтому

$$\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx = \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cos \pi x + n\right] \cdot \frac{n}{\pi} + C; \quad n \leqslant x < n+1.$$

Так как x меняется в указанных пределах, то всегда $n = [x]$. Таким образом, окончательно имеем

$$\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx = \frac{[x]}{\pi} \{[x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x\} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

269. $\int f(x)\,dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ 1 - |x| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Интегрируя на различных участках, получаем

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + \dfrac{x^2}{2} + C_1 & \text{при } -\infty < x < -1; \\ x - \dfrac{x^3}{3} + C_2 & \text{при } -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C_3 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x - \dfrac{x^2}{2} + C_4 & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

По непрерывности первообразной должно быть

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{6}, \; C_2 = C_3, \; C_4 - C_3 = \frac{1}{6},$$

откуда $C_2 = C_3 = \dfrac{1}{6} + C_1$; $C_4 = \dfrac{1}{3} + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

Полагая для симметрии в ответе $C_1 = -\frac{1}{6} + C$, где C — новая произвольная постоянная, получаем

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C, & |x| \leqslant 1; \\ x - \dfrac{x}{2}|x| + \dfrac{1}{6}\operatorname{sgn} x + C, & 1 < |x| < +\infty. \end{cases}$$

270. $\int f(x)\,dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Интегрируя на различных участках, находим

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + C_1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2} + x + C_2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2 + C_3, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

По непрерывности первообразной полагаем $C_1 = C_2 = C_3 - \frac{1}{2}$. Итак,

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x + C, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2} + x + C, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2 + \dfrac{1}{2} + C, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

271. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

Решение. Положим $x = \sqrt{t}$. Тогда $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, откуда получаем $f(t) = 2\sqrt{t} + C$. Следовательно, $f(x) = 2\sqrt{x} + C$.

272. Найти $f(x)$, если

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ x & \text{при } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

и $f(0) = 0$.

Решение. Положим $t = \ln x$. Тогда

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\infty < t \leqslant 0; \\ e^t & \text{при } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$f(t) = \begin{cases} t + C_1 & \text{при } -\infty < t \leqslant 0; \\ e^t + C_2 & \text{при } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

По непрерывности первообразной $f(t)$ должно быть $C_1 = 1 + C_2$. Поэтому

$$f(t) = \begin{cases} t + C_1 & \text{при } -\infty < t \leqslant 0; \\ e^t - 1 + C_1 & \text{при } 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Произвольную постоянную находим из условия: $f(0) = 0$. Это дает $C_1 = 0$.

273. Пусть $f(x)$ — монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ — ее обратная функция.

Доказать, что если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Доказательство. В силу условия теоремы справедливо равенство $x = f(f^{-1}(x)) = F'(f^{-1}(x))$.

Интегрируя это тождество по $f^{-1}(x)$, получаем

$$\int x d(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)) + C,$$

откуда

$$\int x d(f^{-1}(x)) = xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)\,dx = F(f^{-1}(x)) + C,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры:

а) $f(x) = x^n\ (n > 0)$; б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = \arcsin x$; г) $f(x) = \operatorname{Arth} x$.

Решение. а) $f(x) = x^n\ (n > 0)$.

Отсюда находим $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ и $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

По доказанной теореме получаем

$$\int f^{-1}(x)\,dx = x \cdot x^{\frac{1}{n}} - \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}},$$

что подтверждается непосредственной проверкой.

Аналогично поступаем и в остальных случаях.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

Пользуясь свойством инвариантности формул интегрирования, найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{x[\ln(1+x) + \ln(1-x)]^2}{x^2 - 1}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}.$

5. $\int \frac{(x^8-1)\,dx}{x(x^8-x^4+1)}$.

6. $\int \frac{x^5-x}{x^8+3x^4+1}dx$

7. $\int \frac{(x^8-x^2)\,dx}{x^{12}+3x^6+1}$.

8. $\int \sqrt{1-2x^2+x^4}\,dx$.

9. $\int \arcsin(\sin x)\,dx$.

10. $\int \arccos(\cos x)\,dx$.

Методом подстановки найти интегралы:

11. $\int \frac{xe^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

12. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

13. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}$.

14. $\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{(x^6+2x^4+2x^2+1)}}dx$.

15. $\int \frac{x^3-x}{x^6+4x^4+4x^2+1}dx$.

16. $\int \frac{2x^6+1}{x^6(1+x^2)}dx$.

Применяя интегрирование по частям, найти следующие интегралы:

17. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

18. $\int \arcsin x\cdot\arccos x dx$.

19. $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

20. $\int x^2e^x\sin x dx$.

21. $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

22. $\int \frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$.

23. $\int \frac{x^8dx}{(x^3-1)^3}$.

24. $\int \frac{x^8dx}{(x^4-1)^3}$.

Методом неопределенных коэффициентов найти интегралы:

25. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$.

26. $\int \left(\frac{x}{x^2+6x+8}\right)^2dx$.

27. $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$.

28. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

29. $\int \frac{dx}{x^7-4x^5+6x^3-4x}$.

30. $\int \frac{x^5-x^2-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

Найти алгебраическую часть в интегралах:

31. $\int \frac{3x^5+4x^3+x}{(x^3+x+1)^2}dx$.

32. $\int \frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}dx$.

33. $\int \frac{2-5x^6}{(x^6+1)^2}dx$.

34. $\int \frac{1-64x^7-7x^8}{(1+x^8)^2}dx$

Найти интегралы от иррациональных функций:

35. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^3}dx$.

36. $\int \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{2x^3+9x^2+15x+9}$

37. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$.

38. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}dx$.

39. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

40. $\int \frac{8x^4+7x^3+6x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

41. $\int \frac{dx}{(x^4+4x^3+6x^2+4x)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

42. $\int \frac{xdx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+1}}$.

43. $\int \frac{2x^3-x^2+x+1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

44. $\int \frac{x^3-1}{x\sqrt{x^4+1}} dx$.

45. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

46. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Найти интегралы от тригонометрических функций:

47. $\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^4}$.

48. $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

49. $\int \frac{dx}{\cos^5 x-\sin^5 x}$.

50. $\int \frac{dx}{(\sin x+2\sec x)^2}$.

51. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$.

52. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos x\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}}$.

53. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$.

54. $\int \frac{dx}{4+3\,\mathrm{tg}\,x}$.

Найти интегралы:

55. $\int \frac{x}{(e^{x^2}+1)^2} e^{\frac{5x^2}{4}} dx$.

56. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

57. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

58. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt[4]{\cos 2x}}$.

59. $\int \mathrm{tg}\, x\sqrt{\cos 2x}\, dx$.

60. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$.

61. $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

62. $\int \frac{x^2 dx}{(\sin x-x\cos x)^2}$.

Глава IV

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел суммы

1°. Интеграл Римана. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение этого сегмента на n частей. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\lambda = \max \Delta x_i$. Выберем в каждом из сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и составим выражение

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

которое назовем *интегральной суммой.*

Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$, не зависящий от способа разбиения сегмента $[a, b]$ и выбора точек ξ_i, то число I называют *определенным интегралом* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначают символом

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой по Риману* на этом сегменте (в собственном смысле).

Из данного выше определения следует, что если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте, то она неинтегрируема по Риману на нем.

2°. Нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу. *Нижней и верхней суммами Дарбу* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ при фиксированном разбиении Π этого сегмента называются, соответственно, суммы

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}, \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}.$$

3°. Критерий интегрируемости. Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} (\overline{S}_n - \underline{S}_n) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$. В частности, непрерывная функция, кусочно-непрерывная функция и монотонная на сегменте функция интегрируемы на нем.

4°. Нижний и верхний интегралы Дарбу. Пусть $S_* = \{\underline{S}_n\}$ и $S^* = \{\overline{S}_n\}$ — множества всех нижних и верхних сумм Дарбу, ограниченной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$. Числа

$$I_* = \sup S_*, \quad I^* = \inf S^*$$

называются, соответственно, *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Если $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то

$$I_* = I^* = I.$$

5°. Жорданова мера множества и жорданова мера нуль. Пусть X есть некоторое подмножество множества всех точек сегмента $[a, b]$. Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X; \\ 0, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества X.

Определение 1. *Верхний интеграл Дарбу функции* $\varphi(x)$ *на сегменте* $[a, b]$ *называется внешней жордановой мерой множества* X.

Определение 2. *Нижний интеграл Дарбу функции* $\varphi(x)$ *на сегменте* $[a, b]$ *называется внутренней жордановой мерой множества* X.

Таким образом, если $\overline{C}(x)$ — внешняя жорданова мера множества X, а $\underline{C}(X)$ — его внутренняя жорданова мера, то по определению

$$\overline{C}(X) = \inf\left\{\overline{S}_\varphi = \sum_i M_{i\varphi}\Delta x_i = \sum_i{}' \Delta x_i\right\},$$

$$\underline{C}(X) = \sup\left\{\underline{S}_\varphi = \sum_i m_{i\varphi}\Delta x_i = \sum_i{}'' \Delta x_i\right\},$$

где
$$M_{i\varphi} = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\}, \quad m_{i\varphi} = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\}.$$

Символом $\sum_i{}'$ обозначена сумма длин тех сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения Π сегмента $[a, b]$, которые содержат точки множества X, а символом $\sum_i{}''$ обозначена сумма длин тех сегментов $[x_i, x_{i+1}]$, все точки которых принадлежат множеству X.

Из определений 1 и 2 следует, что внутренняя жорданова мера множества не превосходит его внешней жордановой меры.

Для множеств, у которых внешняя и внутренняя жордановы меры совпадают, употребляют термин «жорданова мера».

Определение. 3. *Конечная (или бесконечная) система сегментов (интервалов)* $\{W\}$ *покрывает числовое множество* X', *если каждый элемент* $x' \in X'$ *принадлежит, по крайней мере, одному сегменту (интервалу) множества* $\{W\}$.

О п р е д е л е н и е 4. *Будем называть числовое множество X множеством жордановой меры нуль, если существует конечная система сегментов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ с длинами, соответственно, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, покрывающая множество X и такая, что*

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное число.

При этом предполагается, что для каждого $x \in X$ существует сегмент покрытия $\{\Delta_j\}$, для которого x является внутренней точкой; таким образом, концы сегментов Δ_j не принадлежат множеству X.

П р и м е р. Множество $\left\{x_n = \frac{1}{n};\ n = 1, 2, \ldots\right\}$ имеет меру нуль по Жордану. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное. Найдется, очевидно, такое N, что при $n > N$ $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\left(\text{для этого достаточно взять } N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right)$.

Таким образом, начиная с некоторого номера, все элементы множества принадлежат сегменту $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Каждую точку $x_s = \frac{1}{s}$ $s = 1, 2, \ldots, N)$ множества покроем, соответственно, сегментом длины $\frac{\varepsilon}{2^{s+1}}$; сумма длин этих сегментов равна

$$\varepsilon \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2^{s+1}} = 2\varepsilon\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{N+2}}\right) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^{N+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Все рассматриваемое множество оказалось покрытым конечной системой $N + 1$ сегментов, сумма длин которых $< \varepsilon$. По определению это множество имеет жорданову меру нуль.

1. Найти интегральную сумму S_n для функции $f(x) = 1 + x$ на сегменте $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ в серединах этих промежутков.

Р е ш е н и е. Длина сегмента равна 5, поэтому $\Delta x_i = \frac{5}{n}$. По условию $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Так как $x_i = -1 + \frac{5i}{n}$, $x_{i+1} = -1 + \frac{5(i+1)}{n}$, $f(\xi_i) = 1 + \xi_i$, то

$$S_n = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{5}{n}\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2}\right] = 12{,}5.$$

2. Для данных функций $f(x)$ найти нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\overline{S}_n$ интегральные суммы на соответствующих отрезках, деля их на n равных частей, если:

а) $f(x) = x^3$, $-2 \leqslant x \leqslant 3$; б) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; в) $f(x) = 2^x$, $0 \leqslant x \leqslant 10$.

Решение. а) В силу возрастания функции $f(x) = x^3$ и непрерывности ее на $[-2, 3]$, при любом разбиении $\Pi = \{x_0 = -2 < x_1 < \ldots < x_n = 3\}$ этого отрезка $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значений, соответственно, в левом и правом концах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, когда $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

По условию $\Delta x_i = \frac{5}{n}$, $x_i = -2 + \frac{5i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Таким образом,

$$\underline{S}_n = \frac{5}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-2 + \frac{5i}{n}\right)^3, \quad \overline{S}_n = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2 + \frac{5i}{n}\right)^3.$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

получим окончательно

$$\underline{S}_n = 16\frac{1}{n} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \quad \overline{S}_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

Способ решения примеров б), в) тот же, что и примера а), поэтому ограничимся лишь приведением ответов:

б) $\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$;

в) $\underline{S}_n = \dfrac{10\,230}{n\left(2^{\frac{10}{n}} - 1\right)}$, $\overline{S}_n = \dfrac{10\,230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}} - 1\right)}$.

3. Найти нижнюю интегральную сумму для функции $f(x) = x^4$ на сегменте $[1, 2]$, разбивая этот сегмент на n частей, длины которых образуют геометрическую прогрессию. Чему равен предел этой суммы при $n \to \infty$?

Решение. По условию $x_i = x_0 q^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $x_0 = 1$, $x_n = 2$, откуда $q = \sqrt[n]{2}$, $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. В силу непрерывности и возрастания функции $f(x) = x^4$ на каждом из сегментов разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ она принимает наименьшее значение в точке x_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, следовательно (принимая во внимание, что $\Delta x_i = 2^{\frac{i}{n}}(\sqrt[n]{2} - 1)$),

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{4i}{n}} \cdot 2^{\frac{i}{n}}(\sqrt[n]{2} - 1) = (\sqrt[n]{2} - 1)\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{5i}{n}} =$$

$$= \frac{(\sqrt[n]{2} - 1)(2^5 - 1)}{\sqrt[n]{32} - 1} = 31 \cdot \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{32} - 1}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем (разделив предварительно числитель и знаменатель на $\frac{1}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 31 \frac{\ln 2}{\ln 32} = \frac{31}{5}.$$

4. Исходя из определения интеграла, найти $\int_0^T (v_0 + gt)\,dt$, где v_0 и g — постоянные.

Решение. Подынтегральная функция линейна, поэтому, взяв при любом разбиении П отрезка $[0, T]$ в качестве ξ_i среднюю точку отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ и образовав интегральную сумму, получим, вычислив ее, точное значение интеграла.

Пусть $\xi_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$; тогда $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (v_0 + g\xi_i)\,\Delta t_i = v_0 \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i + \frac{g}{2} \times$ $\times \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^2 - t_i^2) = v_0 T + \frac{g}{2}(t_n^2 - t_0^2) = v_0 T + \frac{gT^2}{2}$, так как $t_0 = 0$, $t_n = T$.

В силу сказанного выше

$$\int_0^T (v_0 + gt)\,dt = v_0 T + \frac{gT^2}{2}.$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом.

5. $\int_{-1}^{2} x^2 dx$.

Решение. Деля отрезок $[-1, 2]$ на n равных частей и выбирая в качестве ξ_i левые концы отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, получаем

$$S_n = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-1 + \frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{3}{n}\left[n - \frac{3(n-1)}{2n}\right].$$

Переходя к пределу, находим $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 3$.

6. $\int_0^1 a^x dx \; (a > 0)$.

Решение. Аналогично предыдущему имеем

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} = \frac{a-1}{n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)}.$$

Переходя к пределу, находим

$$\int_0^1 a^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a-1}{\ln a}$$

$\left(\text{воспользовались пределом } \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \ (a>0)\right)$.

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

Решение. Поступая по аналогии с двумя предыдущими случаями, получаем

$$S_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sin\frac{i\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$\left(\text{воспользовались формулой } \sum\limits_{j=1}^{k} \sin j\alpha = \dfrac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$ (в силу непрерывности функции $y = \sin x$), находим $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$

8. $\displaystyle\int_0^{x} \cos t dt.$

Решение. Разбивая отрезок $[0, x]$ на n равных частей и полагая $\xi_i = t_i = i\frac{x}{n}$, получим

$$S_n(x) = \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos\frac{ix}{n} = \frac{x}{n}\left(1 + \cos\frac{x}{n} + \cos\frac{2x}{n} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{(n-1)x}{n}\right) = \frac{x}{n}\left(1 + \frac{\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2n}\right)}{\sin\frac{x}{2n}}\right) =$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{x}{2n} \cdot \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2n}\right)}{\sin\frac{x}{2n}}$$

$$\left(\text{воспользовались формулой } \sum_{i=1}^{k} \cos i\alpha = \frac{\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Поскольку $\frac{x}{2n} : \sin\frac{x}{2n} \to 1$, $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2n}\right) \to \sin\frac{x}{2}$ при $n \to \infty$, то

$$\int_0^x \cos t dt = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x.$$

9. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0 < a < b)$.

Решение. Пусть П — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Полагая $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$, $0 < x_i < \xi_i < x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, получим

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Таким образом, $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

10. $\int_a^b x^m dx$ $(0 < a < b, m \neq -1)$.

Решение. Выберем точки деления отрезка $[a, b]$ так, чтобы их абсциссы образовывали геометрическую прогрессию:
$x_i = x_0 q^i$, $x_0 = a$, $x_n = b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$, $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ (в качестве точек ξ_i берем точки деления отрезка). Получаем

$$S_n = a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i(m+1)}{n}} =$$

$$= \frac{a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1\right]}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1} = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1})\dfrac{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}{\frac{1}{n}}}{\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{m+1}{n}}} \times$$

$$\times \frac{1}{m+1}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_a^b x^m dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

11. $\int_a^b \frac{dx}{x}$ $(0 < a < b)$.

Решение. Полагая $x_i = aq^i$, $\xi_i = x_i$, $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ (см. пример 10), получим

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta x_i}{\xi_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right),$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{b}{a}.$$

12. Вычислить интеграл Пуассона $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$ при: а) $|\alpha| < 1$; б) $|\alpha| > 1$.

Решение. Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на n равных частей и выберем в качестве точек ξ_s в интегральной сумме точки деления x_s: $\Delta x_s = \frac{\pi}{n}$, $\xi_s = x_s$. Пусть $z = e^{ix}$ и $\bar{z} = e^{-ix}$. Тогда $1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2 = (\alpha - z)(\alpha - \bar{z})$,

$$f(x_s) = \ln(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}})(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}),$$

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \ln[(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}})(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}})] = \frac{\pi}{n} \ln \prod_{s=0}^{n-1} (\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}}) \times$$

$$\times (\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}).$$

Так как $\prod_{s=0}^{n-1}(\alpha - e^{\frac{is\pi}{n}})(\alpha - e^{-\frac{is\pi}{n}}) = \frac{(\alpha^{2n}-1)(\alpha-1)}{\alpha+1}$, то $S_n = \frac{\pi}{n}\times$ $\times \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1}$. Пусть $|\alpha|<1$; тогда $\alpha^{2n}\to 0$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

Пусть $|\alpha|>1$; представим S_n в виде:

$$S_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\cdot\alpha^{2n}\right) = 2\pi\ln|\alpha| + \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right).$$

Поскольку $\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\to 1$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2\pi\ln|\alpha| = \pi\ln\alpha^2$.

Итак,

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |\alpha|<1; \\ \pi\ln\alpha^2, & \text{если } |\alpha|>1. \end{cases}$$

Примечание. При решении примера мы воспользовались формулами Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$.

13. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$, $x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$.

Решение. В силу непрерывности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ их произведение $f(x)\,\varphi(x)$ есть интегрируемая на $[a, b]$ функция. Далее, $|f(x)|\leqslant M$ ($M>0$ — const) при $x\in[a, b]$, а в силу равномерной непрерывности $\varphi(x)$ на $[a, b]$ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ такое, что при $\Delta x_i<\delta$ $\omega_\varphi[x_i, x_{i+1}] < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$ ($\omega_\varphi[x_i, x_{i+1}]$ — колебание функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$).

Фиксируем разбиение Π отрезка $[a, b]$ с $\Delta x_i<\delta$. Очевидно,

$$S_n = \sigma_n + \gamma_n, \text{ где } S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i,$$

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i,\quad \gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)]\,\Delta x_i.$$

В силу сделанных замечаний $\sigma_n \to \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ при $\max\Delta x_i\to 0$, а $\gamma_n \to 0$ при $\max \Delta x_i \to 0$, так как справедлива оценка

$$|\gamma_n| \leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| \Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_\varphi [x_i, x_{i+1}] \Delta x_i < \frac{M\varepsilon (b-a)}{M(b-a)} = \varepsilon$$

при $\Delta x_i < \delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Поэтому $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \int\limits_a^b f(x) \varphi(x)\, dx$.

14. Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Пусть $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$, соответственно, нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x)$ при произвольном разбиении отрезка $[0, 1]$ на n равных частей. В силу монотонности $f(x)$ на $[0, 1]$ имеем

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{1}{n} |f(1) - f(0)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку $\underline{S}_n \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\, dx \leqslant \overline{S}_n$, $\underline{S}_n \leqslant S_n \leqslant \overline{S}_n$, где S_n — любая интегральная сумма для функции $f(x)$ при фиксированном разбиении отрезка интегрирования, то $\int\limits_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

15. Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху на сегменте $[a, b]$. Доказать, что

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leqslant \int\limits_a^b f(x)\, dx \leqslant (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ выпукла сверху на $[a, b]$, то при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \text{ если } \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

(по определению). Выпуклая сверху на сегменте функция непрерывна на нем (см. пример 207, гл. II). Таким образом, $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Используя свойство выпуклости $f(x)$, находим

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+\xi}{2} + \frac{b-\xi}{2}\right) > \frac{1}{2} [f(a+\xi) + f(b-\xi)],$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant b-a.$$

Интегрируя по ξ в пределах $[0, b-a]$, получим

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_0^{b-a} f(a+\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{b-a} f(b-\xi)\, d\xi \right\} = \int\limits_a^b f(x)\, dx \quad (1)$$

(в первом интеграле замена $a+\xi=t$, во втором $b-\xi=z$). Разобьем сегмент $[a, b]$ на n равных частей $\left(\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\right)$ и составим интегральную сумму, полагая $\xi_k=x_k$:

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left[\left(1-\frac{k}{n}\right)a+\frac{k}{n}b\right].$$

В силу выпуклости сверху $f(x)$ имеем

$$f\left[\left(1-\frac{k}{n}\right)a+\frac{k}{n}b\right]>\left(1-\frac{k}{n}\right)f(a)+\frac{k}{n}f(b),$$

поэтому

$$S_n>\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(1-\frac{k}{n}\right)f(a)+\frac{k}{n}f(b)\right]=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{(n+1)}{2}f(a)+\frac{(n-1)}{2}f(b)\right]. \qquad (2)$$

Переходя в неравенстве (2) к пределу при $n\to\infty$, получаем (в силу интегрируемости $f(x)$)

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)). \qquad (3)$$

Сопоставляя неравенства (1) и (3), находим

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

что и требовалось доказать.

16. Пусть $f(x)\in C^{(2)}[1, +\infty)$ и $f(x)\geqslant 0$, $f'(x)\geqslant 0$, $f''(x)\leqslant 0$ при $x\in[1, +\infty)$. Доказать, что $\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int_1^n f(x)\,dx+O(1)$ при $n\to\infty$.

Доказательство. $f(x)$ — возрастающая на $[1, +\infty)$ функция, выпуклая сверху на отрезке $[1, n]$, где n — любое натуральное число, а $f'(x)$ монотонно убывает, поскольку $f''(x)\leqslant 0$ на $[1, +\infty)$ (выпуклость сверху следует из условия $f''(x)\leqslant 0$).

Рассмотрим отрезок $[1, n]$ и разделим его на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ с длинами $\nabla x_k=1$ каждый ($k=1, 2, \ldots, n$). В силу выпуклости функции на каждом из элементарных отрезков имеем (см. задачу 15)

$$\frac{1}{2}(f(x_{k-1})+f(x_k))\leqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx\leqslant f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right). \qquad (1)$$

Суммируя неравенства (1) по k от 1 до n, находим

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1})+f(x_k))\leqslant\int_1^n f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right). \qquad (2)$$

Очевидно $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1})+f(x_k))=\sum_{k=1}^{n+1}f(x_{k-1})-\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_n))$.

Таким образом, в других обозначениях ($f(x_0)=f(1)$, $f(x_k)=f(k)$) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)-\frac{1}{2}(f(1)+f(n))\leqslant\int_1^n f(x)\,dx. \tag{3}$$

С другой стороны, по формуле Лагранжа имеем

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k), \tag{4}$$

где $x_{k-1}<\xi_k<\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'(\theta_k), \tag{5}$$

где $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}<\theta_k<x_k$.

Из (4) и (5) получаем (складывая левые и правые части равенств и деля результат пополам)

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}f(x_{k-1})-\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_n))+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(f'(\xi_k)-f'(\theta_k)). \tag{6}$$

Поскольку $\xi_k<\theta_k$, а $f'(x)$ монотонно убывает, то

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(f'(\xi_k)-f'(\theta_k))\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(f'(x_{k-1})-f'(x_k))=$$
$$=\frac{1}{4}(f'(1)-f'(n))\leqslant\frac{1}{4}f'(1)=O(1). \tag{7}$$

Из (2), (6) и (7) получаем

$$\int_1^n f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\frac{1}{2}(f(1)+f(n))+O(1). \tag{8}$$

Сопоставляя неравенства (3) и (8), находим

$$\int_1^n f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\frac{1}{2}f(n)+O(1),\ \text{или}$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\int_1^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(n)+O(1).$$

17. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ и

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$.

Решение. Обозначим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $\nabla x_k = \frac{b-a}{n}$,

$$m_k' = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f'(x)\},\quad M_k' = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f'(x)\}$$

и запишем Δ_n в виде

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) f'(\xi_k)\,dx,$$

где $x < \xi_k < x_k$, $x_0 = a$.

Принимая во внимание неравенства

$$M_k'(x - x_k) \leqslant (x - x_k) f'(\xi_k) \leqslant m_k'(x - x_k),$$

получаем

$$-\frac{(b-a)\overline{S}_n'}{2} \leqslant n\Delta_n \leqslant -\frac{(b-a)\underline{S}_n'}{2},$$

где $\underline{S}_n'$ и $\overline{S}_n'$ — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f'(x)$ на сегменте $[a, b]$. В силу интегрируемости $f'(x)$ находим

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = -\frac{(b-a)}{2}\int_a^b f'(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a) - f(b)).$$

18. Доказать, что ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$, множество точек разрыва которой имеет меру нуль по Жордану, интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть $\varepsilon' > 0$ наперед задано. Покроем множество точек разрыва функции $f(x)$ конечной системой сегментов $\{\Delta_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$ с длинами δ_j $(j = 1, 2, \ldots, K)$, такими, что $\sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j < \varepsilon'$. Концы сегментов Δ_j вместе с точками $x = a$ и $x = b$ образуют некоторое разбиение Π_1 сегмента $[a, b]$.

На каждом из сегментов этого разбиения, не являющимся сегментом Δ_j, функция непрерывна (а значит, и равномерно непрерывна). Поэтому каждый из этих сегментов (обозначим его $\overline{\Delta}_i$) можно разделить на части (подсегменты), на каждом из которых колебание функции $\omega_f < \varepsilon''$, где $\varepsilon'' > 0$ — произвольное, наперед заданное. Присоединяя к точкам разбиения Π_1 точки деления сегментов $\overline{\Delta}_i$, получим некоторое разбиение Π_2 сегмента $[a, b]$. Пусть длины сегментов, на которых колебание функции меньше ε'', равны τ_i. Тогда для разбиения Π_2 имеем (индекс суммирования обозначим буквой k)

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k = \sum_j \omega_j \delta_j + \sum_i \omega_i \tau_i < \omega_f[a, b] \sum_j \delta_j + \varepsilon'' \sum_i \tau_i <$$
$$< \omega_f[a, b]\, \varepsilon' + \varepsilon'' (b-a),$$

где $\omega_f[a, b]$ — колебание функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Взяв $\varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{2\omega_f[a, b]}$, $\varepsilon'' \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, где $\varepsilon > 0$ — фиксированное, наперед заданное, получим

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Для функции $f(x)$ выполнен критерий интегрируемости.

19. Доказать, что если две ограниченные на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают между собой всюду на нем, за исключением, лишь множества точек жордановой меры нуль, то либо обе эти функции интегрируемы на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

либо обе они неинтегрируемы на $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим

$$N = \max\{\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|,\ \sup |\varphi(x)|\}.$$

Пусть $X = \{x\}$ — множество точек жордановой меры нуль, на котором $f(x) \neq \varphi(x)$. Покроем это множество конечной системой сегментов Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, K)$ с длинами, соответственно, δ_j, такими, что

$$\sum_{j=1}^{K} \delta_j < \frac{\varepsilon}{2N},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное.

При любом разбиении Π сегмента $[a, b]$, в которое входят сегменты Δ_j, имеем

$$|\overline{S}_f - \overline{S}_\varphi| \leqslant \sum_{j=1}^{K} |M_{jf} - M_{j\varphi}|\, \delta_j \leqslant 2N \sum_{j=1}^{K} \delta_j < \varepsilon; \tag{1}$$

$$|\underline{S}_f - \underline{S}_\varphi| \leqslant \sum_{j=1}^{K} |m_{jf} - m_{j\varphi}|\, \delta_j \leqslant 2N \sum_{j=1}^{K} \delta_j < \varepsilon, \tag{2}$$

где $\overline{S}_f$ и $\overline{S}_\varphi$ — верхние суммы Дарбу функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, $\underline{S}_f$ и $\underline{S}_\varphi$ — нижние суммы Дарбу этих функций при разбиении Π сегмента $[a, b]$; M_{jf}, $M_{j\varphi}$ — точные верхние грани функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на сегментах Δ_j; m_{jf}, $m_{j\varphi}$ — соответственно точные нижние грани этих функций на Δ_j (суммирование производится только по сегментам Δ_j, так как на остальных сегментах разбиения Π $f(x) \equiv \varphi(x)$ и $M_{jf} - M_{j\varphi} = 0$, $m_{jf} - m_{j\varphi} = 0$).

Поскольку пределы верхних и нижних сумм Дарбу для ограниченных функций существуют, то из (1) и (2) получим

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_f = \lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_\varphi; \tag{3}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_f = \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_\varphi. \tag{4}$$

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_f = \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_f,$$

следовательно, в силу (3), (4) и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}_\varphi = \lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}_\varphi$, т. е. $\varphi(x)$ интегрируема, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Если же $f(x)$ неинтегрируема на $[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_f \neq \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_f.$$

Поэтому в силу (3), (4)

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}_\varphi \neq \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}_\varphi$$

и функция $\varphi(x)$ также неинтегрируема на $[a, b]$.

Из доказанного утверждения следует:

если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то, не изменяя свойства интегрируемости и самого значения интеграла функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, ее значения на множестве жордановой меры нуль можно заменить произвольными конечными значениями.

Примечание. При определении интеграла Римана функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ предполагалось, что эта функция определена во всех точках сегмента $[a, b]$.

Пусть ограниченная функция $f(x)$ не определена на множестве X точек сегмента $[a, b]$ жордановой меры нуль. Образуем функцию

$$\underset{x\in[a,b]}{F(x)} = \begin{cases} f(x), & x \notin X; \\ \varphi(x), & x \in X, \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная ограниченная на множестве X функция. Если $F(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то скажем, что $f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, и полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx.$$

20. Пусть X_r — множество всех рациональных точек сегмента $[0, 1]$, $\varphi(x)$ — характеристическая функция этого множества.

Доказать, что всякая верхняя сумма Дарбу функции равна 1, а всякая нижняя сумма Дарбу этой функции равна 0.

Доказательство. При произвольном разбиении П сегмента $[0, 1]$ каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ будет содержать как рациональные, так и иррациональные точки, поэтому для функции $\varphi(x)$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\} = 1, \quad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\} = 0,$$

следовательно,

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = 1, \quad \underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 0.$$

21. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — интегрируемые функции на сегменте $[0, 1]$, причем на этом сегменте $F(x) \leqslant G(x)$.

Если функция $f(x)$ равна $G(x)$, когда x принадлежит множеству X_r из предыдущей задачи, и равна $F(x)$, если x не принадлежит X_r, то показать, что

$$I_f^* = \int_0^1 G(x)\,dx, \quad I_{*f} = \int_0^1 F(x)\,dx,$$

где I_f^* — верхний интеграл Дарбу функции $f(x)$ на $[0, 1]$, I_{*f} — нижний интеграл Дарбу функции $f(x)$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Напомним читателю, что по определению

$$I_f^* = \inf\{\overline{S}_f\}, \quad I_{*f} = \sup\{\underline{S}_f\},$$

где $\{\overline{S}_f\}$ — множество верхних, а $\{\underline{S}_f\}$ — множество нижних сумм Дарбу функции $f(x)$ на $[0, 1]$. Очевидно, функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \varphi(x)\,G(x) + (1 - \varphi(x))\,F(x),$$

где $\varphi(x)$ — характеристическая функция множества X_r. При произвольном разбиении П сегмента $[0, 1]$ каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$) содержит как рациональные, так и иррациональные точки, поэтому (учитывая, что $F(x) \leqslant G(x)$):

$$\overline{S}_f = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{G(x)\}\,\Delta x_i = \overline{S}_G,$$

где $\overline{S}_G$ — верхняя сумма Дарбу функции $G(x)$ на сегменте $[0, 1]$ при фиксированном разбиении П.

Аналогично

$$\underline{S}_f = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{F(x)\}\,\Delta x_i = \underline{S}_F,$$

где $\underline{S}_F$ — нижняя сумма Дарбу функции $F(x)$ на сегменте $[0, 1]$.

Из полученных равенств находим

$$\inf\{\overline{S}_f\} = \inf\{\overline{S}_G\} = I_G^* = \int_0^1 G(x)\,dx,$$

$$\sup\{\underline{S}_f\} = \sup\{\underline{S}_F\} = I_{*F} = \int_0^1 F(x)\,dx$$

в силу интегрируемости функций $F(x)$ и $G(x)$.

22. Пусть X_1 — некоторое множество точек сегмента $[0, 1]$ и X_2 — множество точек на том же сегменте, не имеющих общих точек с X_1. Если каждая точка сегмента является предельной точкой множества X_1, а также множества X_2, то показать, что результаты двух предыдущих задач остаются неизменными при замене X_r на X_1.

Доказательство. Если каждая точка сегмента является предельной точкой множеств X_1 и X_2, то в любой ее окрестности найдутся точки этих множеств. Таким образом, при произвольном разбиении П сегмента $[0, 1]$ каждый частичный сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ будет содержать точки, принадлежащие X_1 и X_2, поэтому

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\} = 1, \qquad \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{\varphi(x)\} = 0$$

и получаем $\bar{S}_П = 1$, $\underline{S}_П = 0$.

Аналогично доказывается вторая часть утверждения о том, что

$$I_f^* = \int_0^1 G(x)\,dx, \quad I_{*f} = \int_0^1 F(x)\,dx.$$

23. Показать, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ интегрируема на промежутке $[0, 1]$.

Решение. Точками разрыва функции $f(x)$ являются $x = 0$; $x_k = \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Функция ограничена. Она не определена в точке $x = 0$. Положим по определению

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq 0 \\ \text{любому конечному числу при } x = 0. \end{cases}$$

Функция $F(x)$ ограничена на отрезке $[0, 1]$, а множество ее точек разрыва $\left\{x_0 = 0,\ x_k = \frac{1}{k}\ (k = 1, 2, \ldots)\right\}$ имеет жорданову меру нуль (см. п. 5°, пример), поэтому она интегрируема. Поскольку $f(x)$ не определена лишь в одной точке, то (см. примечание к № 19) она также интегрируема на $[0, 1]$, причем

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 F(x)\,dx.$$

24. Доказать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

где m и n $(n \geqslant 1)$ — взаимно простые целые числа, интегрируема на любом конечном сегменте.

Доказательство. Рассмотрим сегмент $[a, b]$ и пусть $K = \{1, 2, \ldots, k_0\}$, где $k_0 > 1$ произвольное, фиксированное, — множество натуральных чисел, а $\varkappa_k$ — число значений m, принадлежащих сегменту $[ka, kb]$, $(1 \leqslant k \leqslant k_0)$. Очевидно, равенство $\varphi(x) = \frac{1}{k}$ может выполняться не более чем в $\varkappa_k$ точках. Взяв, если понадобится, k_0 настолько большим, чтобы было $\varkappa_{k_0} \neq 0$, можно утверждать, что при любом разбиении сегмента $[a, b]$ равенства $\omega_i = \frac{1}{k}$, где ω_i — колебание функции $\varphi(x)$ на сегменте разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, будут выполняться не более чем на $2\varkappa_{k_0} k_0$ сегментах. Если $n > k_0$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{k_0}$. Поэтому, взяв разбиение П сегмента $[a, b]$ на n_0 частей, где $n_0 > 2\varkappa_{k_0} k_0$, получим, что не более чем на $2\varkappa_{k_0} k_0$ сегментах разбиения $\frac{1}{k_0} \leqslant \omega_i \leqslant 1$, на остальных же сегментах $\omega_i < \frac{1}{k_0}$. Пусть для разбиения П выполнено условие $\Delta x_i < \delta$, где $\delta > 0$ фиксировано. Тогда, суммируя по всем сегментам разбиения, получим оценку

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i + \sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i \leqslant 2\varkappa_{k_0} k_0 \delta + \frac{b-a}{k_0}$$

$\Big($символами $\sum\limits_i{}'$ и $\sum\limits_i{}''$, соответственно, обозначены суммирования по сегментам, на которых $\omega_i \leqslant 1$ и $\omega_i < \frac{1}{k_0}\Big)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное. Подчинив k_0 условию $k_0 > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$ и взяв разбиение П$'$, для которого $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4\varkappa_{k_0} k_0}$, получим $\sum\limits_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. Для функции Римана $\varphi(x)$ выполнен критерий интегрируемости.

Примечание. Легко показать, что $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. В самом деле, в силу интегрируемости $\varphi(x)$ имеем $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \underline{S}_\varphi$, где $\underline{S}_\varphi$ — нижние суммы Дарбу для функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Но при любом разбиении П отрезка $[a, b]$, очевидно, $\underline{S}_\varphi = 0$, поэтому $\int\limits_a^a \varphi(x)\,dx = 0$.

25. Показать, что функция $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

Доказательство. Функция $f(x)$ ограничена на $[0, 1]$ $(|f(x)| < 1)$, а множество ее точек разрыва $\left\{x = 0,\ x_k = \frac{1}{k},\ k = 1, 2, \ldots\right\}$ имеет жорданову меру нуль (см. п. 5°, пример), поэтому она интегрируема на $[0, 1]$.

26. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

неинтегрируема на любом сегменте.

Доказательство. Пусть $[a, b]$ — любой сегмент, а Π — произвольное разбиение этого сегмента на части. Выбирая на каждом сегменте разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ иррациональное ξ_i, получим $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i)\Delta x_i = 0$; $\lim_{\lambda\to 0} S_n = 0$; выбирая ξ_i равным рациональному числу, имеем

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\xi_i)\Delta x_i = b - a, \quad \lim_{\lambda\to 0} S_n = b - a.$$

Результат зависит от способа выбора точек ξ_i, поэтому функция Дирихле $\chi(x)$ неинтегрируема на $[a, b]$.

27. а) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f_n(x) = \sup\{f(x)\}$ при $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, где $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$). Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

б) Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует такая последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$), что $\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)\,dx$ при $a \leqslant c \leqslant b$.

Доказательство. а) Рассмотрим

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(x)\,dx = \overline{S}_n,$$

где $\overline{S}_n$ — верхняя сумма Дарбу для функции $f(x)$ при фиксированном разбиении сегмента $[a, b]$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

б) В силу интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$ она ограничена на этом сегменте. Рассмотрим разбиение Π сегмента $[a, b]$ на n равных частей и пусть $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$. Тогда согласно примеру 350, гл. I функция $\varphi_n(x) = \sup_{x_i \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$ при $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ непрерывна слева на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$. На основании а) имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)\,dx,$$

где c — любая точка сегмента $[a, b]$.

28. Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ее абсолютная величина $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Так как колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ равно

$$\omega_f[x_i, x_{i+1}] = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \{|f(x') - f(x'')|\},$$

то в силу неравенства

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leqslant |f(x') - f(x'')|, \quad x',\ x'' \in [x_i, x_{i+1}]$$

получаем

$$\sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \{||f(x')| - |f(x'')||\} \leqslant \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \{|f(x') - f(x'')|\},$$

т. е. $\omega_{|f(x)|}\ [x_i, x_{i+1}] \leqslant \omega_f\ [x_i, x_{i+1}]$ при любом разбиении Π отрезка $[a, b]$. В силу выполнения критерия интегрируемости для функции $f(x)$ из последнего неравенства следует, что он выполнен и для функции $|f(x)|$. Далее, поскольку $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, то

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \text{ т. е. } \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

29. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ существует. Интегрируема ли эта функция на $[a, b]$?

Ответ. Нет, не обязательно, поскольку, например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

$\int_a^b |f(x)|\,dx = b - a$, а сама функция $f(x)$ на $[a, b]$ неинтегрируема (см. пример 26).

30. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$ при $a \leqslant x \leqslant b$, а функция $\varphi(y)$ определена и непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $\varphi[f(x)]$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. В силу равномерной непрерывности $\varphi(y)$ на $[A, B]$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma > 0$ такое, что при $\Delta y_i < \sigma$ $\omega_i^* < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, где ω_i^* — колебание функции $\varphi(y)$ на сегменте $[y_i, y_{i+1}]$. Поскольку $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то для нее выполнен критерий интегрируемости: для любого наперед заданного положительного числа (в том числе для найденного $\sigma > 0$) найдется такое $\delta > 0$, что при любом разбиении П сегмента $[a, \ b]$, удовлетворяющем условию $\Delta x_i < \delta$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \sigma^2, \qquad (1)$$

где ω_i — колебание функции $y = f(x)$ на сегменте $[x_i, \ x_{i+1}]$. Фиксируем любое такое разбиение П и пусть X' — множество точек сегментов разбиения П, на каждом из которых $\omega_i \geqslant \sigma$ (так как интегрируемая функция $f(x)$ может быть разрывна).

Покажем, что множество X' имеет жорданову меру нуль. Обозначая символом $\sum\limits_i{}'$ суммирование по сегментам множества X', имеем (из неравенства (1))

$$\sigma^2 > \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \geqslant \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i \geqslant \sigma \sum_i{}' \Delta x_i,$$

откуда $\sum\limits_i{}' \Delta x_i < \sigma$, что и доказывает наше утверждение (в неравенстве (1) вместо σ можно взять любое, наперед заданное $\varepsilon > 0$).

Поскольку $\Delta y_i \leqslant \omega_i$, то приходим к выводу, что почти всюду (т. е. на всех сегментах разбиения П, за исключением, быть может, лишь сегментов множества X') $\omega_i < \sigma$, а значит, и $\Delta y_i < \sigma$. Таким образом, почти всюду

$$\overset{*}{\omega}_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

при разбиении П. Обозначая символом $\sum\limits_i{}''$ суммирование по сегментам разбиения П, на каждом из которых $\overset{*}{\omega}_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, получаем оценку

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overset{*}{\omega}_i \Delta x_i = \sum_i{}' \overset{*}{\omega}_i \Delta x_i + \sum_i{}'' \overset{*}{\omega}_i \Delta x_i < \omega\sigma + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)},$$

где ω — колебание функции $\varphi[f(x)]$ на сегменте $[a, b]$. Подчиняя σ условию $\sigma < \frac{\varepsilon}{2\omega}$, получаем окончательно

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overset{*}{\omega}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Для сложной функции $\varphi[f(x)]$ выполнен критерий интегрируемости.

Если условие непрерывности функции $\varphi(y)$ заменить условием ее интегрируемости, то теорема перестанет быть правильной. Пусть, например,

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0; \\ 1, & \text{если } y \neq 0; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$$

Тогда на любом сегменте

$$\varphi[f(x)] = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

а эта функция, как показано в примере 26, неинтегрируема. Таким образом, если условие непрерывности функции $\varphi(y)$ заменить условием ее интегрируемости, то теорема этого примера не верна.

31. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[A, B]$. Доказать, что функция $f(x)$ обладает свойством интегральной непрерывности, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0, \text{ где } [a, b]\subset [A, B].$$

Доказательство. В силу интегрируемости $f(x)$ на $[A, B]$ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ такое, что при $\Delta x_i<\delta$ $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. Выберем $|h|$ настолько малым, чтобы $a+h>A$, $b+h<B$. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ $\Pi=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$. Тогда

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_{i_h}\nabla x_i,$$

где ω_{i_h}, вообще говоря, — колебание функции $f(x)$ на некотором отрезке, не совпадающем с отрезком $[x_{i-1}, x_i]$. Если взять произвольное разбиение Π' с $\Delta x_i<\frac{\delta}{2}$ и подчинить h условию $|h|<\frac{\delta}{2}$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{i_h}\nabla x_i<\varepsilon,$$

так как при каждом i колебание функции рассматривается на отрезке, длина которого $<\delta$. Таким образом, $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ такое, что при $|h|<\frac{\delta}{2}$ выполняется неравенство

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

А это означает, что $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0$.

32. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Доказать, что равенство $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ во всех точках непрерывности $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

Доказательство. *Необходимость.* Применим доказательство от противного. Пусть $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$, $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ и предположим, что $f(x_0) \neq 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в точке $x = x_0$ существует такое $\delta > 0$, что $f^2(x) > 0$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Используя свойство аддитивности интеграла, имеем

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0-\delta} f^2(x)\,dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx + \int\limits_{x_0+\delta}^{b} f^2(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx = C > 0,$$

где C — постоянное число. Получили противоречие, так как

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(x) = 0$ в каждой точке непрерывности. Из условия теоремы следует, что $f^2(x)$ интегрируема на $[a, b]$, поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что $\overline{S}_{f^2} - \underline{S}_{f^2} < \varepsilon$ при любом разбиении Π с $\Delta x_i < \delta$, где $\overline{S}_{f^2}$ и $\underline{S}_{f^2}$ — суммы Дарбу для функции $f^2(x)$ на сегменте $[a, b]$. Фиксируем такое разбиение. Тогда на каждом сегменте разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ найдется хотя бы одна точка непрерывности $f^2(x)$ (если бы $f^2(x)$ была всюду разрывна на каком-то сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, то она была бы неинтегрируема по Риману на этом сегменте, а значит, и на сегменте $[a, b]$). Так как $f^2(x)$ принимает неотрицательные значения, то в силу нашего утверждения $\inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{f^2(x)\} = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Поэтому $\underline{S}_{f^2} = 0$ и $\overline{S}_{f^2} < \varepsilon$ при $\Delta x_i < \delta$. Отсюда следует, что

$$0 = \lim_{\lambda\to 0} \overline{S}_{f^2} = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \underline{S}_{f^2}.$$

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. Формула Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — любая ее первообразная, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (1)$$

В случае, когда $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$, имеет место формула (1). В этой формуле $F(x)$, вообще говоря, не первообразная, а непрерывная на $[a, b]$ функция, такая, что $F'(x) = f(x)$ в каждом интервале непрерывности $f(x)$.

2°. Формула интегрирования по частям. Если $f(x),\ g(x) \in C^{(1)}[a,\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

3°. Замена переменной. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,\ b]$;

2) сегмент $[a,\ b]$ является множеством значений некоторой функции $x = g(t)$, определенной на сегменте $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и имеющей на этом сегменте непрерывную производную;

3) $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$.

При этих условиях справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

4°. Интегрирование комплекснозначных функций. Если $z(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$ — комплекснозначная функция, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — интегрируемые на сегменте $[a,\ b]$ функции, то по определению

$$\int\limits_a^b z(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx + i\int\limits_a^b \psi(x)\,dx.$$

Таким образом, $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \mathrm{Re}\int\limits_a^b z(x)\,dx,\quad \int\limits_a^b \psi(x)\,dx = \mathrm{Im}\int\limits_a^b z(x)\,dx.$

При вычислении определенных интегралов иногда полезно пользоваться формулами Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x$.

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, вычислить следующие определенные интегралы:

33. $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Очевидно $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} =$

$$= \ln\frac{\mathrm{sh}\,2+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 2}}{\mathrm{sh}\,1+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 1}} = \ln\frac{\mathrm{sh}\,2+\mathrm{ch}\,2}{\mathrm{sh}\,1+\mathrm{ch}\,1} = \ln\frac{e^2}{e} = 1.$$

34. $\displaystyle\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$.

Решение. Представим интеграл от функции на отрезке $[0,\ 2]$ в виде суммы интегралов на отрезках $[0,\ 1]$ и $[1,\ 2]$, на каждом из которых подынтегральная функция знакопостоянна:

$$\int_0^2 |1-x|\,dx=\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^2 (x-1)\,dx=\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_1^0+\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2=1.$$

35. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}\qquad(0<\alpha<\pi).$

Решение. Очевидно,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int_{-1}^{1}\frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\int_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha}\frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

36. Доказать, что если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y=f(x)$ в симметричных относительно прямой $x=\frac{a+b}{2}$ точках принимает равные значения $\left(\text{в этом случае говорят, что кривая } y=f(x) \text{ симметрична относительно прямой } x=\frac{a+b}{2}\right)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Из условия следует, что $f(x)=f(a+b-x)$, $x\in[a, b]$.
В силу аддитивности интеграла имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx=I_1+I_2,\ \text{где } I_1=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx,\ I_2=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx.$$

В интеграле I_2 можем положить $f(x)=f(a+b-x)$ и произвести замену $a+b-x=t$; получим

$$I_2=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(a+b-x)\,dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt=I_1.$$

Таким образом $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx.$

37. Вычислить $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

Решение. Так как $1+\varepsilon\cos x=1+\varepsilon\cos(2\pi-x)$, то в силу примера 36

$$I=2\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}.$$

Выражая $\cos x$ через половинный угол $\frac{x}{2}$, имеем

$$1+\varepsilon\cos x=\cos^2\frac{x}{2}\left[(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right]=$$

$$=\sin^2\frac{x}{2}\left[(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\right].$$

Представив интеграл по отрезку $[0,\pi]$ в виде суммы интегралов по отрезкам $\left|0,\frac{\pi}{2}\right|$ и $\left|\frac{\pi}{2},\pi\right|$ и подставляя в интегралы преобразованные выражения $1+\varepsilon\cos x$, находим

$$I=\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}+\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

38. $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0)$.

Решение. Записав I в виде $I=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(A-x)(B-x)}}$, где $A=\frac{a}{2}+\frac{1}{2a}$, $B=\frac{b}{2}+\frac{1}{2b}$, и полагая $\sqrt{(A-x)(B-x)}=t(A-x)$, получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{ab}}\int\limits_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left(\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{ab}-1}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}},$$

так как $\left|\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{ab}-1}\right| = \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$ в силу условий $|a|<1$, $|b|<1$.

39. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$, $(ab \neq 0)$.

Решение. При решении примера пользуемся формулой

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

Очевидно,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)^2} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2ab}\operatorname{sgn}(ab) = \frac{\pi}{2|ab|}.$$

40. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона — Лейбница приводит к неправильным результатам, если

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$; в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$.

Ответ. Во всех случаях функции, являющиеся первообразными для подынтегральных в интервалах непрерывности последних, разрывны на промежутках интегрирования ($\ln x$ имеет разрыв второго рода в точке $x=0$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ имеет разрывы первого рода в точках $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ имеет разрыв первого рода в точке $x=0$). В случае а) функция $f(x)=\frac{1}{x}$ на отрезке $[-1, 1]$ не интегрируема по Риману.

41. Найти $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$.

Решение. Функция $F(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ не является первообразной для подынтегральной на отрезке $[-1, 1]$, поскольку она разрывна в точке $x = 0$. Но $F(x)$ имеет конечные (не равные между собой) предельные значения в точке $x = 0$. Представим интеграл по отрезку $[-1, 1]$ в виде суммы интегралов по отрезкам $[-1, 0]$ и $[0, 1]$; полагая

$$\underset{x\in[-1,0]}{F_1(x)} = \begin{cases} F(x), & x \in [-1, 0); \\ F(-0) = 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$\underset{x\in[0,1]}{F_2(x)} = \begin{cases} F(x), & x \in (0, 1]; \\ F(+0) = 0, & x = 0, \end{cases}$$

получаем $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) dx = F_1(x)\Big|_{-1}^{0} + F_2(x)\Big|_{0}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$

$= \dfrac{2}{3}$.

42. Найти $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

Решение. Так как $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$, а $|\sin(100\pi - x)| = |\sin(50\pi - x)| = \cdots = |\sin(2\pi - x) = |\sin x|$, то (см. пример 36):

$$\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = 100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}.$$

С помощью определенных интегралов найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если:

43. $S_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$.

Решение. Поскольку $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{i}{n}$, то S_n есть интегральная сумма для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ (отрезок разбит на n равных частей, а значения функции $f(x)$ берутся в точках деления). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_{0}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

44. $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

Решение. $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}$; это интегральная сумма для функции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении его на n равных частей. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

45. $S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

Решение. Так как $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

46. $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

Решение. Так как $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \sin\frac{\pi i}{n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}\cos \pi x\Big|_1^0 = \frac{2}{\pi}.$$

47. $S_n = \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} \quad (p>0)$.

Решение. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p$; это интегральная сумма для функции $f(x)=x^p$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении его на n равных частей. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

48. $S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Решение. Поскольку $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

49. $S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решение. Представим $S_n = e^{\frac{1}{n}\ln n! - \ln n} = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n} = \int\limits_0^1 \ln x dx$,

то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e^{\int\limits_0^1 \ln x dx}$.

Вычислим $\int\limits_0^1 \ln x dx$; подынтегральная функция неинтегрируема по Риману на $[0, 1]$, но она интегрируема на всяком отрезке $[\varepsilon, 1]$, $(\varepsilon > 0)$. Возьмем любую последовательность $\varepsilon_n > 0$ ($\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$) и определим $\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon_n\to 0}\int\limits_{\varepsilon_n}^1 \ln x dx$. Таким образом,

$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon_n\to 0}(x\ln x - x)\Big|_{\varepsilon_n}^1 = -1 + \lim\limits_{\varepsilon_n\to 0}(\varepsilon_n - \varepsilon_n\ln\varepsilon_n) = -1$, поскольку $\lim\limits_{\alpha\to+0}\alpha\ln\alpha = 0$. Окончательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e^{-1}$.

50. $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Решение. Представим $S_n = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (ход рассуждений тот же, что и при решении предыдущих задач).

Отбрасывая равномерно бесконечно малые высших порядков, найти пределы следующих сумм:

51. $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{n-1}{n^2}\pi$.

Решение. Поскольку $\sin\frac{k\pi}{n^2} = \frac{k\pi}{n^2} + O^*\left(\frac{k^3}{n^6}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)O^*\left(\frac{k^3}{n^6}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)O^*\left(\frac{k^3}{n^6}\right)=0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\pi\int_0^1 x(1+x)\,dx=$$

$$=\pi\left(\int_0^1 xdx+\int_0^1 x^2dx\right)=\frac{5}{6}\pi.$$

52. $S_n=\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

Решение. Так как $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}+O^*\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}O^*\left(\frac{1}{n^3}\right)\times$

$\times\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=$

$$=\int_0^\pi\frac{dx}{2+\cos x}=2\int_0^\pi\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

53. $S_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0)$.

Решение. Представим $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1)}{n}\right)}=$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}O^*\left(\frac{1}{n}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}O^*\left(\frac{1}{n}\right)=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=$

$$=\int_0^1(x+t)\,dt=x+\frac{1}{2}.$$

54. $S_n=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$.

Решение. Запишем S_n в виде $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{in}}=$

$=S_n' - S_n''$, где $S_n' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}$; $S_n'' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+in}$. Оценим S_n''; очевидно, $S_n'' \leqslant \frac{2n}{n(n+1)} < \frac{2}{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n' =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$.

55. Найти производные:

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx;\quad 2)\ \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx;\quad 3)\ \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx.$$

Решение. В первом случае требуется вычислить производную постоянного числа, в остальных двух — производные по переменным пределам интегрирования, поэтому

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx = 0,\quad 2)\ \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx = -\sin a^2,$$

$$3)\ \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2.$$

56. Найти производные:

$$\text{а)}\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt;\quad \text{б)}\ \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};\quad \text{в)}\ \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos \pi t^2 dt.$$

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования интеграла как сложной функции (в предположении, что соответствующие функции дифференцируемы):

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt = f[\psi(x)]\,\psi'(x)\quad (\text{для а}));$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f[\psi(x)]\,\psi'(x) - f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\quad (\text{для б) и в})).$$

$$\text{а)}\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2x\sqrt{1+x^4};$$

$$\text{б)}\ \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

$$\text{в)}\ \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos \pi t^2 dt = -\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x) =$$

$$= (\sin x - \cos x)\cos(\pi \sin^2 x).$$

57. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\, dt}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$.

Решение. Применяя правило Лопиталя (законность его применения очевидна), имеем

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x\to 0}\cos x^2 = 1.$$

$$\text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\, dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\, dt}{\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\pi^2}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{2t^2}dt} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{\frac{d}{dx}e^{x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0.$$

58. Пусть $f(x)\in C[0, +\infty)$ и $f(x)\to A$ при $x\to+\infty$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx$.

Решение. Пусть $A \neq 0$. Произведя замену переменной $nx = z$, имеем $\int_0^1 f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n f(z)\,dz = \varphi_n$; но φ_n — значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(z)\,dz$ при $x = n$. Очевидно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(z)\,dz = \lim_{x\to+\infty} \frac{d}{dx}\int_0^x f(z)\,dz = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

(по правилу Лопиталя). Следовательно, и $\varphi_n \to A$ при $n \to \infty$, поэтому $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx = A$ (обосновать законность применения правила Лопиталя предлагаем читателю). Если $A = 0$, то доказательство тривиально.

59. Доказать, что $\int_0^x e^{t^2}dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ при $x \to \infty$.

Решение. Покажем, что $\lim_{x\to\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = 1$. По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} + 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} + 1 = 1.$$

60. Найти $\lim_{x\to+0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

Решение. Выражение представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$; применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt} = \lim_{x\to+0} \frac{\cos x\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\frac{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}} = \lim_{x\to+0} \sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}} = 1.$$

61. Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция. Доказать, что функция $\varphi(x) = \dfrac{\int\limits_0^x tf(t)\,dt}{\int\limits_0^x f(t)\,dt}$ возрастает при $x \geqslant 0$.

Доказательство. Покажем, что для дифференцируемой функции $\varphi(x)$ при $x \geqslant 0$ выполнены необходимые и достаточные условия возрастания ($\varphi'(x) \geqslant 0$ при $x > 0$ и $\varphi'(x)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком отрезке, принадлежащем промежутку $[0, +\infty)$). Находим

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt - f(x)\int\limits_0^x tf(t)\,dt}{\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)^2}.$$

В силу того, что $\dfrac{f(x)}{\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)^2} > 0$ (по условию задачи), нам достаточно показать, что функция $\psi(x) = x\int\limits_0^x f(t)\,dt - \int\limits_0^x tf(t)\,dt$ неотрицательна.

Очевидно, $\psi(x) = \int\limits_0^x (x-t)f(t)\,dt \geqslant 0$, поскольку $f(t) > 0$, а $t \leqslant x$. Таким образом, $\varphi'(x) \geqslant 0$ при $x > 0$, следовательно, $\varphi(x)$ возрастает при $x \geqslant 0$.

62. Найти интегралы

а) $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

б) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t\dfrac{1-x}{1-t} & \text{при } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Решение. а) Пользуясь свойством аддитивности интеграла, имеем

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_2^1 = \frac{5}{6}.$$

Решение б) аналогично решению а). Получаем

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^t x dx + \frac{t}{1-t}\int\limits_t^1 (1-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^t + \frac{t}{1-t}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_1^t = \frac{t^2}{2} + \frac{t(1-t)}{2} = \frac{t}{2}.$$

63. Вычислить интеграл и построить график интеграла $I = I(\alpha)$, рассматривая его как функцию параметра α, если

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}.$$

Р е ш е н и е. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{1}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} - \frac{\cos^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} - \frac{\cos x}{2\alpha} + \frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2} - \frac{(1+\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)} =$$

$$= \frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2} - \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)} - \frac{\cos x}{2\alpha}, \quad I = \frac{1}{4\alpha^2}[(1+\alpha^2)\pi -$$

$$-(1-\alpha^2)^2 I_1], \text{ где}$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{2}{1-\alpha^2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{1-\alpha^2}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{1-\alpha^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha^2}, & \text{если } |\alpha| < 1; \\[2mm] -\dfrac{\pi}{1-\alpha^2}, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что при $|\alpha| = 1 \quad I = \frac{\pi}{2}$, находим

$$I(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } |\alpha| \leqslant 1; \\[2mm] \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

График функции $I(\alpha)$ изображен на рис. 129.

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

64. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx.$

Решение.

$$|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, \text{ если } x \in \left[\frac{1}{e},\ 1\right]; \\ \ln x, \text{ если } x \in [1,\ e], \end{cases}$$

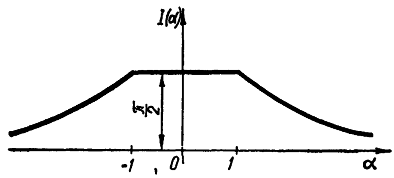

Рис. 129

поэтому

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)\,dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x dx = (-x\ln x + x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} +$$

$$+ (x\ln x - x)\Big|_1^e = 2\,(1 - e^{-1}) \quad (dx = dv,\ \ln x = u).$$

65. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$

Решение. $dv = xdx,\ u = \operatorname{arctg} x,\ v = \frac{x^2}{2},\ du = \frac{dx}{1+x^2};$

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вычислить с помощью замены переменной интегралы:

66. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Решение. Полагая $x = a\sin t$, получим

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{16}$$

$\left(\text{всегда } \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \sin^2 kt\,dt = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos^2 kt\,dt = \frac{m\pi}{4}\right.$, k, m — любые натуральные числа$\Big)$.

67. $I = \int_0^{0{,}75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Полагая $\frac{1}{x+1} = t$, получаем $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2$;

$$I = \int_{\frac{4}{7}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{4}{7}}^{1} \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\left(t - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{4}{7}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{14} + \sqrt{\left(\frac{1}{14}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

68. Вычислить интеграл $I = \int_{-1}^{1} \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\,dx$, полагая $x - \frac{1}{x} = t$.

Решение. Рассмотрим неопределенный интеграл $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$, $x \in [-1, 1]$. В примере 27, гл. III показано, что функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x$ является первообразной для функции $\frac{1+x^2}{1+x^4}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ (интеграл вычислялся с помощью подстановки $x - \frac{1}{x} = t$). Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x)\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \varepsilon(1) - \varepsilon(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

69. Можно ли в интеграле $\int_0^3 x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx$ положить $x = \sin t$?

Ответ. Нельзя, так как $|\sin t| \leqslant 1$.

70. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ при замене переменной $x=\sin t$ в качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

Ответ. Можно, поскольку $\sqrt{1-\sin^2 t} = -\cos t$ при $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

71. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx.$$

Доказательство. Заменим в интеграле переменную, полагая $t = \frac{x-a}{b-a}$; получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_0^1 f[a+(b-a)t]\,dt.$$

Величина интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, поэтому в правой части полученного равенства можем заменить t на x.

72. Доказать равенство

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)\,dx \quad (a>0).$$

Доказательство. Произведя замену $t = x^2$, получаем

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} tf(t)\,dt,$$

что и требовалось доказать.

73. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[A, B] \supset [a, b]$. Найти $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b f(x+y)\,dy$ при $A-a<x<B-b$.

Решение. Полагая $x+y=t$, получим

$$F(x) = \int\limits_a^b f(x+y)\,dy = \int\limits_{x+a}^{x+b} f(t)\,dt.$$

Применяя формулу дифференцирования по верхнему и нижнему переменным пределам (это законно в силу непрерывности $f(x)$ и дифференцируемости функций $\varphi(x) = x + a$, $\psi(x) = x + b$), получим

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b f(x+y)\,dy = \frac{d}{dx}\int\limits_{x+a}^{x+b} f(t)\,dt = f(x+b) - f(x+a).$$

74. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx;$

б) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

Доказательство. а) При $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, поэтому $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt$ $\left(\text{полагая } \frac{\pi}{2} - x = t\right)$.

б) Запишем $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} xf[\sin(\pi - x)]\,dx$ и положим $\pi - x = t$; получим $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\,dt = \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int\limits_0^{\pi} tf(\sin t)\,dt$, откуда $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ (так как значение интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования).

75. Доказать, что для непрерывной на $[-l, l]$ функции $f(x)$ имеем:

1) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^{l} f(x)\,dx$, если функция $f(x)$ четная;

2) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$, если функция $f(x)$ нечетная.

Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

Доказательство. Запишем $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^{l} f(x)\,dx$; произведем в первом интеграле замену $x = -t$; тогда $\int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx =$

$= \int\limits_0^l f(-t)\,dt = \int\limits_0^l f(-x)\,dx$. Таким образом, $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_0^l [f(x) +$ $+ f(-x)]dx$. Если $f(x)$ — четная, то $f(x) + f(-x) = 2f(x)$ и получаем 1); если же $f(x)$ — нечетная, то $f(x) + f(-x) = 0$ и получаем 2).

В случае 1) плоская фигура (криволинейная трапеция) имеет ось симметрии (ось Oy) и вся площадь трапеции равна удвоенной площади одной из симметричных частей; во втором случае криволинейная трапеция состоит из двух фигур, симметричных относительно начала координат, а интеграл (алгебраическая сумма площадей) равен нулю.

76. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

Доказательство. Пусть $f(x)$ задана на интервале $(-l, l)$, принадлежит классу $C(-l, l)$ и является четной. Тогда любая функция вида

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ — произвольная постоянная, является первообразной для $f(x)$ на $(-l, l)$.

Очевидно,

$$F(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)\,dt + \tilde{C} = -\int\limits_0^x f(z)\,dz + \tilde{C}$$

(после замены $t = -z$ и в силу того, что $f(t)$ — четная).

Таким образом, $F(-x) = -F(x)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{C} = 0$, и первое утверждение доказано.

Пусть на том же интервале $f(x)$ явлется нечетной. Неопределенный интеграл функции $f(x)$ запишем в виде

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \bar{C},$$

где $\bar{C}$ — произвольная постоянная.

Возьмем теперь любую первообразную этого семейства

$$F_j(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \bar{C}_j$$

и посмотрим, чему равно $F_j(-x)$:

$$F_j(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)\,dt + \bar{C}_j = \int\limits_0^x f(z)\,dz + \bar{C}_j$$

(замена переменной $t = -z$, $dt = -dz$; $f(-z) = -f(z)$ в силу нечетности $f(t)$). Второе утверждение доказано.

77. Вычислить $I=\int\limits_{0,5}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx.$

Решение. Произведем замену $x+\frac{1}{x}=t$. Так как x — двузначная функция t, то интеграл по отрезку [0, 5; 2] представим в виде суммы двух интегралов (по отрезкам [0, 5; 1] и [1, 2]): $I=I_1+I_2$, где $I_1=\int\limits_{0,5}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$, $I_2=\int\limits_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\times$ $\times\, e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$. В интеграле I_1 $x=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$, а в интеграле I_2 $x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, поэтому

$$I_1=0,5\int\limits_{2,5}^{2}e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+t-\sqrt{t^2-4}\right)dt,$$

$$I_2=0,5\int\limits_{2}^{2,5}e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+t+\sqrt{t^2-4}\right)dt;$$

$$I=\int\limits_{2}^{2,5}e^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\sqrt{t^2-4}\right)dt=\sqrt{t^2-4}\,e^t\Big|_2^{2,5}-$$

$$-\int\limits_{2}^{2,5}e^t\sqrt{t^2-4}\,dt+\int\limits_{2}^{2,5}e^t\sqrt{t^2-4}\,dt=1,5e^{2,5}.$$

78. В интеграле $\int\limits_{0}^{2\pi}f(x)\cos x\,dx$ выполнить замену переменного $\sin x=t$.

Решение. Представим интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ как сумму четырех интегралов по отрезкам, на каждом из которых $\sin x$ монотонен:

$$\int\limits_{0}^{2\pi}f(x)\cos x\,dx=\sum_{k=0}^{3}\int\limits_{\frac{k\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\,dx.$$

Заменяя переменную в каждом интеграле (полагая $\sin x=t$), находим

$$\int\limits_{0}^{2\pi}f(x)\cos x\,dx=\int\limits_{0}^{1}f(\arcsin t)\,dt+\int\limits_{1}^{0}f(\pi-\arcsin t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{0}^{-1}f(\pi-\arcsin t)\,dt+\int\limits_{-1}^{0}f(2\pi+\arcsin t)\,dt=$$

$$= \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\, dt +$$

$$+ \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\, dt$$

(мы воспользовались в процессе замен известной формулой $\operatorname{Arcsin} t = (-1)^k \arcsin t + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, взяв $k = 0, \pm 1, 2$).

79. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1} \left| \left(\cos \ln \frac{1}{x}\right)' \right| dx$, где n — натуральное число.

Решение. Записав интеграл в виде

$$I = -\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1} \left| \frac{d\left(\cos \ln \frac{1}{x}\right)}{d\left(\ln \frac{1}{x}\right)} \right| d\left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

и полагая $\ln \frac{1}{x} = t$, получим

$$I = \int_0^{2\pi n} \left| \frac{d}{dt} \cos t \right| dt = \int_0^{2\pi n} |\sin t|\, dt = 2n \int_0^{\pi} \sin t dt = 4n.$$

80. Найти $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$

Решение. Как показано в задаче 74, б)

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx;$$

таким образом, $I = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{2 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \int\limits_{\pi}^{0} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} =$

$= \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} (\cos x) \Big|_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}.$

81. Найти интеграл $I = \int\limits_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx$, если $f(x) = \frac{(x+1)^2 (x-1)}{x^3 (x-2)}$.

Решение. Функция $f(x)$ имеет разрывы второго рода в точках $x = 0$ и $x = 2$, а функция $\operatorname{arc\,tg} [f(x)]$, являющаяся первообразной для подынтегральной функции в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, 3)$, имеет разрывы первого рода в указанных точках. Поэтому представим интеграл по отрезку $[-1, 3]$ в виде суммы интегралов по отрезкам $[-1, 0]$, $[0, 2]$ и $[2, 3]$. В точках разрыва функции $f(x)$ возьмем соответствующие односторонние предельные значения функции $\operatorname{arctg}[f(x)]$. Так как $f(-0) = -\infty$, $f(+0) = +\infty$, $f(-1) = 0$, $f(2-0) = -\infty$, $f(2+$

$$+0) = +\infty, \quad f(3) = \frac{32}{27},$$

то $I = \operatorname{arctg}[f(-0)] + \operatorname{arctg}[f(2-0)] + \operatorname{arctg}[f(3)] - \operatorname{arctg}[f(-1)] -$

$$-\operatorname{arctg}[f(+0)] - \operatorname{arctg}[f(2+0)] = \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - 2\pi.$$

82. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, определенная при $-\infty < x < +\infty$ и имеющая период T, то

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

где a — любое число.

Доказательство. Запишем интеграл в виде

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx \qquad (1)$$

(в силу свойства аддитивности определенного интеграла). Рассмотрим второе слагаемое в правой части равенства (1). В силу периодичности $f(x)$ можем записать

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x-T)\,dx.$$

Полагая в последнем интеграле $x - T = z$, получим

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(z)\,dz.$$

Таким образом,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

83. Доказать, что при n нечетном функции

$$F(x) = \int_0^x \sin^n t\,dt \quad \text{и} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n t\,dt$$

периодические с периодом 2π, а при n четном каждая из этих функций есть сумма линейной функции и периодической функции.

Доказательство. При $n = 2m + 1$ имеем

$$F(x+2\pi) = F(x) + \int_x^{x+2\pi} \sin^{2m+1} t\,dt = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^{2m+1} x\,dx$$

(принимая во внимание результат примера 82). Покажем, что

$$I_m^{\cdot} = \int_0^{2\pi} \sin^{2m+1} x dx = 0.$$

Доказывать будем методом индукции. Очевидно,

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{2\pi}^{0} = 0.$$

В предположении, что $I_{m-1} = 0$, покажем, что $I_m = 0$. В силу нашего допущения

$$I_m = I_{m-1} - \int_0^{2\pi} \sin^{2m-1} x \cos x d(\sin x) = -\frac{\sin^{2m} x \cos x}{2m}\Big|_0^{2\pi} - \frac{I_m}{2m},$$

откуда $\left(1 + \frac{1}{2m}\right) I_m = 0, \quad I_m^{\cdot} = 0.$

Таким образом, при $n = 2m + 1$ имеем $F(x + 2\pi) = F(x)$, т. е. в этом случае $F(x)$ — периодическая функция, с периодом 2π.

При $n = 2m$ имеем

$$F(x + 2\pi) = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^{2m} x dx = F(x) + C_m^{\cdot},$$

где $C_m > 0$ — постоянная при каждом m $\left(\text{очевидно, } \int_0^{2\pi} \sin^{2m} x dx = \right.$ $\left. = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = C_m > 0\right)$. Получаем тождество $F(x + 2\pi) - F(x) =$ $= C_m$, которое справедливо лишь в случае, когда $F(x)$ есть сумма периодической функции и линейной функции (так как сама $F(x)$ не является линейной функцией).

Аналогично доказываются утверждения для $G(x)$.

84. Доказать, что функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$, где $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T, в общем случае есть сумма линейной функции и периодической функции периода T.

Доказательство. В силу непрерывности $f(x)$ функция $F(x)$ дифференцируема: $F'(x) = f(x)$. В силу периодичности $f(x)$ получаем $F'(t + T) = f(t)$. Интегрируя в пределах $[x_0, x]$, находим $F(x + T) - F(x_0 + T) = F(x)$. Но $F(x_0 + T) = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x) dx =$ $= C, C = \text{const}$ (см. пример 82). Таким образом, $F(x + T) - F(x) =$ $= C$. В случае, если $C = 0$, получим $F(x + T) = F(x)$; таким образом, в частности $F(x)$ может быть периодической функцией с периодом T. Если $C \neq 0$, то равенство $F(x+T)-F(x)=C$ возможно лишь в случае, когда $F(x)$ — линейная функция (или сумма линейной и периодической функции). Допустим, что $F(x)$ линейна, т. е. $F(x)=Ax+B$; дифференцируя, находим $f(x)=A$ (получили тривиальный случай, когда периодическая функция — постоянная).

Таким образом, в общем случае $F(x)=\varphi(x)+Ax+B$, где $\varphi(x)$ — периодическая функция периода T.

Вычислить интегралы:

85. $I=\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx.$

Решение. Нецелесообразно интегрировать полином 25-й степени; наличие выражения xdx позволяет внести под знак дифференциала функцию $2-x^2$: $xdx=-\frac{1}{2}d(2-x^2)$.

Таким образом,

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^0 (2-x^2)^{12}\,d(2-x^2)=\frac{(2-x^2)^{13}}{26}\Bigg|_1^0=315\frac{1}{26}.$$

86. $I=\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}.$

Решение. Очевидно,

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1}^1=$$

$$=\frac{\ln 3}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\ln 3}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

87. $I=\int\limits_1^e (x\ln x)^2\,dx.$

Решение. Интегрируем по частям, полагая $x^2dx=dv$, $\ln^2 x=u$ $\left(v=\frac{x^3}{3};\ du=\frac{2\ln x dx}{x}\right)$; получаем $I=\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e-\frac{2}{3}\int\limits_1^e x^2\ln x dx$. Вычислим $I_1=\int\limits_1^e x^2\ln x dx$, применяя формулу интегрирования по частям: $dv=x^2dx$, $u=\ln x$; $v=\frac{x^3}{3}$, $du=\frac{dx}{x}$;

$$I_1=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Bigg|_1^e=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}.$$

Окончательно $I = \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}$.

88. $I = \int\limits_1^9 x \sqrt[3]{1 - x}\, dx.$

Решение. Произведем замену $1 - x = t^3$:

$$I = 3 \int\limits_{-2}^{0} (1 - t^3)\, t^3 dt = 3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = -66\frac{6}{7}.$$

89. $I = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$

Решение. Полагая $x = \frac{1}{\sin t}$, получим $dx = -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{|\sin t|}{\cos t}$, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant -\frac{\pi}{6}$. После замены находим

$$I = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sgn}(\sin t)\sin^2 t \cos t}{\sin^2 t \cos t}\, dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{3}.$$

90. $I = \int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1 + 3x^8}\, dx.$

Решение. Произведем замену $1 + 3x^8 = z^2$; $\left(x^7 dx = \frac{z dz}{12},\ x^{15} dx = \frac{z(z^2 - 1)}{36} dz\right)$; таким образом,

$$I = \frac{1}{36}\int\limits_1^2 z^2 (z^2 - 1)\, dz = \frac{1}{36}\left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{29}{270}.$$

91. $I = \int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1 + x}}\, dx.$

Решение. Интегрируя по частям $\left(dv = dx,\ u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1 + x}}\right)$, получим

$$I = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{1 + x}}\Bigg|_0^3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x}(1 + x)} = 3 \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} -$$

$$-\int\limits_0^3 \frac{(\sqrt{x})^2\, d(\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2} = \pi - \sqrt{x}\,\Big|_0^3 + \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\Big|_0^3 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

92. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

Решение. Кривая $y = [(2+\cos x)(3+\cos x)]^{-1}$ симметрична относительно прямой $x = \pi$ ($y(x) = y(2\pi - x)$, $x \in [0, 2\pi]$), поэтому $I = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$; в силу тождества $1 \equiv (3+\cos x) - (2 + \cos x)$ имеем

$$I = 2\left(\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} - \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos x}\right) = 2\left[2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{1+3\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}} - \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{2+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{1+2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)\right] =$$

$$= \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

93. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решение. Подынтегральная функция периодическая периода $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$I = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^4 x} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\operatorname{ctg}^2 x)\, d(\operatorname{ctg} x)}{1+\operatorname{ctg}^4 x}\right) = 8\int\limits_0^1 \frac{(1+t^2)\, dt}{1+t^4} =$$

$$= 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \varepsilon(t)\right)\Bigg|_0^1 = 8\varepsilon(1) = 2\sqrt{2}\pi$$

(см. пример 68).

94. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

Решение. Поскольку $\sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$, то $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{4}(\sin 2x - \sin 6x + \sin 4x)$;

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{\cos 6x}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 4x}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\right)=\frac{1}{6}.$$

95. а) $I_1=\int\limits_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx$; б) $I_2=\int\limits_0^{\pi}(x\cos x)^2\,dx$.

Решение. Очевидно,

$$I_1+I_2=\int\limits_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^3}{3}; \quad I_2-I_1=\int\limits_0^{\pi}x^2\cos 2xdx=$$

$$=\frac{x^2\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}x\sin 2xdx=\frac{x\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos 2xdx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $I_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\right)$, $I_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\right)$.

96. $I=\int\limits_0^{\pi}e^x\cos^2 xdx.$

Решение. Представим $I=I_1+I_2$, где

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}e^xdx=\frac{e^{\pi}-1}{2}, \quad I_2=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}e^x\cos 2xdx=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}e^{x(1+2i)}dx=\operatorname{Re}\frac{e^{x(1+2i)}}{2(1+2i)}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\left\{\operatorname{Re}\frac{e^x(1-2i)(\cos 2x+i\sin 2x)}{10}\right\}\Big|_0^{\pi}=\frac{e^x(\cos 2x+2\sin 2x)}{10}\Big|_0^{\pi}=\frac{e^{\pi}-1}{10}.$$

Окончательно $I=(e^{\pi}-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$.

97. $I=\int\limits_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4 xdx.$

Решение. Приведем подынтегральную функцию к более простому виду, пользуясь известными формулами

$$\operatorname{sh}^2 x=\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}; \quad \operatorname{ch}^2 2x=\frac{1+\operatorname{ch}4x}{2};$$

$$\operatorname{sh}^4 x = \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} - 2\operatorname{ch} 2x + 1\right) = \frac{1}{8}(\operatorname{ch} 4x - 4\operatorname{ch} 2x + 3).$$

Получаем $I = \frac{1}{8}\left(3x + \frac{\operatorname{sh} 4x}{4} - 2\operatorname{sh} 2x\right)\Big|_0^{\ln 2} =$

$$= \frac{1}{8}\left(3\ln 2 + 2 - \frac{1}{128} - 4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}.$$

С помощью формул понижения вычислить интегралы, зависящие от параметра n, принимающего целые положительные значения.

98. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$

Решение. Интегрируя по частям ($\sin x dx = dv$, $\sin^{n-x} x = u$), имеем

$$I_n = \cos x \sin^{n-1} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\, dx,$$

т. е. $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$, откуда $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

С помощью найденной рекуррентной формулы легко получить окончательный результат для любого натурального n.

Пусть $n = 2k$, тогда

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 2} \cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

так как $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

Пусть $n = 2k + 1$; тогда

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1} \cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

так как $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

99. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

Решение. В силу того, что $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

получаем $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ $\left(\text{замена } \frac{\pi}{2} - x = t\right)$.

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

100. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$

Решение. Представив

$$\operatorname{tg}^{2n} x dx = \operatorname{tg}^{2n-2} x d(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}^{2n-2} x dx,$$

находим, интегрируя в пределах $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$I_n = \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

Получили формулу понижения (от J_n пришли к J_{n-1}). Применяя ее к I_{n-1}, $I_{n-2}, \cdots$, находим

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + I_{n-2} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} -$$

$$- I_{n-3} = \cdots = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^{2n-(k-1)}}{2n-(2k-1)} + \cdots + \frac{(-1)^{2n-(n-2)}}{2n-(2n-3)} + \frac{(-1)^{2n-(n-1)}}{2n-(2n-1)} + (-1)^n I_0 =$$

$$= (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-3}}{2n-3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right],$$

так как $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$.

101. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$

Решение. Полагая $x = \sin t$, получаем

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(см. пример 99).

102. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Полагая $x = \sin t$, находим после замены:

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Этот интеграл рассмотрен в примере 98.

103. $I_n = \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n dx$.

Решение. Функция $f(x) = x^m (\ln x)^n$ непрерывна и ограничена на промежутке $(0, 1]$ (так как $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$). Рассмотрим функцию

$$\underset{x \in [0,1]}{F(x)} = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

очевидно, $I_n = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 F(x)\,dx$. Интегрируя по частям, получим

$$I_n = \frac{xF(x)}{m+1}\Bigg|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-1}\,dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Рассуждая аналогично, находим окончательно $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ $\left(\text{так как } I_0 = \frac{1}{m+1}\right)$.

104. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$.

Решение. С помощью известных тригонометрических формул

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right); \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

получаем

$$I_n = (-1)^{2n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} t dt$$

$\left(\text{замена } \frac{\pi}{4} - x = t\right)$. Действуя таким же образом, как в примере 100, приходим к формуле понижения: $I_n = -\frac{1}{2n} + I_{n-1}$, применяя которую еще $n-1$ раз, находим

$$I_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} + \frac{(-1)^{2n-2}}{2n-2} + \frac{(-1)^{2n-3}}{2n-4} + \cdots + \frac{(-1)^{2n-k}}{2n-(2k-2)} +$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-(2n-2)} + (-1)^{n+1} I_0, \text{ где } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln \cos t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln \sqrt{2}.$$

Окончательно

$$I_n = (-1)^n \left[-\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right].$$

105. Пользуясь формулой Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, показать, что

$$I = \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2\pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Решение. $I = \int_0^{2\pi} e^{ix(n-m)} dx = 2\pi$ при $n = m$; пусть $m \neq n$; тогда

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(n-m) x dx + i \int_0^{2\pi} \sin(n-m) x dx =$$

$$= \frac{1}{n-m} [\sin(n-m) x \Big|_0^{2\pi} + i \cos(n-m) x \Big|_{2\pi}^{0}] = 0.$$

Вычислить интегралы (m и n — целые положительные числа):

106. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$

Решение. Обозначим

$$I(2m, 2n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx;$$

интегрируя по частям ($\cos x dx = dv$, $\sin^{2m} x \cos^{2n-1} x = u$), находим

$$I(2m, 2n) = \frac{2n-1}{2m+1} \cdot I(2m+2, 2n-2).$$

Действуя по этой же формуле еще $n-1$ раз, получим (принимая во внимание решение примера 98):

$$I(2m, 2n) = \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots 3 \cdot 1}{(2m+1)(2m+3) \ldots (2m+2n-1)} I(2m+2n, 0) =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,(2m+2n-1)!!}{[(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)]\,(2m+2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!\,\pi}{2\,(2m+2n)!!} = \frac{\pi\,(2n)!\,(2m)!}{2^{m+n+1}\,(m+n)!\,2^{m+n}m!\,n!} =$$

$$= \frac{\pi\,(2n)!\,(2m)!}{2^{2m+2n+1}\,m!\,n!\,(m+n)!}.$$

107. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция не определена при $x=0$ и $x=\pi$; она ограничена и имеет конечные предельные значения при $x\to+0$; $x\to\pi-0$, а поэтому интегрируема по Риману. Положим по определению

$$\underset{x\in[0,\pi]}{F(x)} = \begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi);\\ n \text{ при } x=0, & (-1)^{n+1}n \text{ при } x=\pi, \end{cases}$$

где $f(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$. Очевидно, $\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} F(x)\,dx.$

По формуле Эйлера $\sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Таким образом, $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}} = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{i[(n+1)-2k]x} =$

$$= \begin{cases} 2[\cos(n-1)x+\cos(n-3)x+\cdots+\cos x], & \text{если } n \text{ четное};\\ 2[\cos(n-1)x+\cos(n-3)x+\cdots+\cos x]+1, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

В силу того, что $\int\limits_0^{\pi}\cos[(n+1)-2k]\,x\,dx = 0$ $\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, имеем, интегрируя полученное выражение:

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное};\\ \pi, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

108. $I = \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

Решение. Обозначим $f(x)=\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$ и образуем функцию

$$\underset{x\in[0,\pi]}{F(x)} = \begin{cases} f(x), & x\neq\frac{\pi}{2};\\ (-1)^n(2n+1), & x=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогда $I=\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} F(x)\,dx.$

По формулам Эйлера $\cos(2n+1)x = \frac{1}{2}(e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x})$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, поэтому $\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = e^{i2nx} - e^{i(2n-2)x} + \dots + (-1)^n + \dots + e^{-i2nx} = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos 2[n-(k-1)]x + (-1)^n$.

Интегрируя полученное выражение в пределах $[0, \pi]$, находим $I = (-1)^n \pi \left(\text{так как} \int_0^\pi \cos 2[n-(k-1)]x dx = 0,\ k = 1, 2, \dots, n\right)$.

109. $I = \int_0^\pi \cos nx \cos^n x dx$.

Решение. С помощью формул Эйлера получаем

$$\cos^n x \cos nx = \frac{1}{2^{n+1}}(e^{ix} + e^{-ix})^n (e^{inx} + e^{-inx}) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{i2(n-k)x} + e^{-i2kx}) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i2(n-k)x} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{-i2kx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k e^{i2(n-k)x} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k e^{-i2kx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cos 2(n-k)x.$$

Интегрируя полученное выражение, находим $I = \frac{\pi}{2^n}$, так как $C_n^k \int_0^\pi \cos 2(n-k) x dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$.

110. $I = \int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx$.

Решение. Очевидно, $I = \int_0^\pi \cos^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left[n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos\left[nt + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] dt$ (произведена замена $x - \frac{\pi}{2} = t$). С помощью формул Эйлера находим

$$\cos^n t \cos\left[nt + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2^{n+1}}(e^{it} + e^{-it})^n (e^{i\left[nt + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]} +$$

$$+e^{-i\left[nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}\Big)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{i(n-2k)t}\Big(e^{i\left[nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}+$$

$$+e^{-i\left[nt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}\Big)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Big\{e^{i\left[2(n-k)t+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}+$$

$$+e^{-i\left[2kt+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}\Big\}=$$

$$=\frac{\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{2^n}+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\cos\left[2(n-k)t+(n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Интегрируя по t левую и правую части найденного равенства в пределах $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, получим $I_n=\frac{\pi}{2^n}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$, принимая во внимание, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(n-k)t+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]dt=0\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Найти интегралы (n — натуральное число).

111. $I=\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx.$

Решение. Очевидно,

$$I=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos nx\cos x\,dx-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, полагая $dv=\sin^{n-1}x\cos x\,dx=$ $=\frac{d(\sin^n x)}{n}$; $u=\cos nx$, находим

$$I=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx=0.$$

112. $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx.$

Решение аналогично примеру 111. $I=0$.

113. $I=\int\limits_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx.$

Решение. Подставляя в подынтегральную функцию $\cos x=$ $=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, получаем

$$e^{-ax}\cos^{2n}x=\frac{e^{-ax}}{2^{2n}}\left(e^{i2nx}+C_{2n}^1e^{i(2n-2)x}+C_{2n}^2e^{i(2n-4)x}+\ldots+\right.$$

$$+ C_{2n}^{n} + \cdots + C_{2n}^{2n-(2n-1)} e^{-i(2n-2)x} + e^{-i2nx}) = \frac{e^{-ax}}{2^{2n}} [2 (C_{2n}^{0} \cos 2nx +$$
$$+ C_{2n}^{1} \cos (2n-2) x + \cdots + C_{2n}^{k} \cos (2n-2k) x + \cdots +$$
$$+ C_{2n}^{n-1} \cos 2x) + C_{2n}^{n}].$$

Поскольку $\int\limits_0^{2\pi} \cos (2n-2k) x e^{-ax} dx = \operatorname{Re} \int\limits_0^{2\pi} e^{x[-a+i(2n-2k)]} dx =$

$= \left\{ \operatorname{Re} \dfrac{e^{x[-a+i(2n-2k)]}}{-a+i(2n-2k)} \right\} \Bigg|_0^{2\pi} = \dfrac{e^{-ax}}{a^2+(2n-2k)^2} [(2n-2k) \sin (2n-2k) x -$

$- a \cos (2n-2k) x] \big|_0^{2\pi} = \dfrac{a(1-e^{-2a\pi})}{a^2+(2n-2k)^2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ и

$\int\limits_0^{2\pi} e^{-ax} dx = \dfrac{1-e^{-2a\pi}}{a}$, то окончательно находим

$$I = \frac{1-e^{-2a\pi}}{2^{2n} a} \left(C_{2n}^{n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{k} \frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2} \right).$$

114. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos 2nx dx.$

Решение. Интегрируем по частям ($\cos 2nx dx = dv$, $\ln \cos x = u$); в связи с тем, что

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\ln \cos x}{(\sin 2nx)^{-1}} = (-1)^{n+1} \lim_{t \to +0} \frac{\ln \sin t}{(\sin 2nt)^{-1}} =$$
$$= (-1)^{n+1} \lim_{t \to +0} \frac{\operatorname{ctg} t}{-2n (\sin 2nt)^{-2} \cos 2nt} = (-1)^{n+1} \lim_{t \to +0} \frac{4n^2 t^2}{t(1-2n^2 t^2)} = 0,$$

мы полагаем $\ln \cos x \dfrac{\sin 2nx}{2n} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ (рассматриваем так называемый несобственный интеграл второго рода, равный по определению $I = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln \cos x \cos 2nx dx$). Следовательно,

$$I = \frac{1}{2n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx \operatorname{tg} x dx = \frac{I_1 - I_2}{4n}, \text{ где}$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos (2n-1) x}{\cos x} dx; \quad I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos (2n+1) x}{\cos x} dx;$$

так как $\dfrac{\cos (2n-1) x}{\cos x} = 2 \sum\limits_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k) x + (-1)^{n-1}$,

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos 2[n-(k-1)]x + (-1)^n, \quad \text{то } I_1 =$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{\pi}{2};\ I_2 = (-1)^n\frac{\pi}{2};\ I_1 - I_2 = (-1)^{n-1}\pi;\ I = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{4n}.$$

115. Вычислить интеграл Эйлера:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,$$

где m и n — целые положительные числа.

Решение. Интегрируя по частям ($x^{m-1}dx = dv$; $(1-x)^{n-1} = u$), получим

$$B(m, n) = \frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx =$$
$$= \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1).$$

Применяя последовательно полученную формулу понижения, находим

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)\ \dots\ [n-(n-1)]}{m(m+1)\ \dots\ (m+n-2)}B(m+n-1, 1) =$$
$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ \dots\ (m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx =$$
$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ \dots\ (m+n-2)(m+n-1)} = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

116. Многочлен Лежандра определяется следующей формулой:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad (n = 0, 1, \dots,).$$

Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Доказательство. Дифференцируя j раз с помощью формулы Лейбница j-кратного дифференцирования функцию $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$, легко убедиться в том, что

$$\frac{d^j}{dx^j}[(x^2-1)^n]\Big|_{-1}^{1} = 0 \text{ при } j = 0, 1, \dots, n-1. \qquad (1)$$

Рассмотрим при $m < n$ интеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\,x^m dx.$$

Интегрируя по частям m раз, получим (в силу (1)):

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] x^m dx = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [(x^2-1)^n] dx =$$

$$= (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} [(x^2-1)^n] \Big|_{-1}^{1} = 0. \qquad (2)$$

Многочлен $P_n(x)$ лишь постоянным множителем отличается от многочлена $\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$, а многочлен $P_m(x)$ есть линейная комбинация функций x^m, $x^{m-1}, \ldots, 1$, следовательно, в силу (2) $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0$ при $m < n$. Если же $m > n$, то $\int_{-1}^{1} P_m(x) x^n dx = 0$, следовательно, $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$, и мы окончательно убедились в том, что $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$, если $m \neq n$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] dx.$$

Интегрируя по частям n раз, получим, учитывая (1):

$$I = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[(x^2-1)^n](x^2-1)^n dx.$$

Многочлен $(x^2-1)^n$ при старшем члене x^{2n} имеет коэффициент 1, поэтому

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[(x^2-1)^n] = (2n)!,$$

следовательно,

$$I = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{2(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{0}^{1} (x^2-1)^n dx.$$

Полагая в интеграле $x = \sin t$, находим

$$I = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot (2n)! (2n)!!}{2^{2n}(n!)^2 (2n+1)!!} =$$

$$= \frac{2 \cdot (2n)! [(2n)!!]^2}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}.$$

Мы получили, что

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Примечание. Две интегрируемые на отрезке $[a, b]$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 0.$$

Многочлены Лежандра $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ образуют ортогональную на отрезке $[-1, 1]$ систему функций; эти многочлены нашли широкое применение при решении задач математической физики.

117. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на $[a, b]$ и $F(x)$ — такая, что $F'(x) = f(x)$ всюду в $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек c_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ и точек a и b, где функция $F(x)$ терпит разрыв первого рода («обобщенная первообразная»).

Доказать, что

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

Доказательство. Положим по определению

$$\underset{x \in [c_i, c_{i+1}]}{F_1(x)} = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \in (c_i, c_{i+1}); \\ F(c_i+0) \text{ при } x = c_i, & F(c_{i+1}-0) \text{ при } x = c_{i+1} \end{cases}$$

$(i = 0, 1, \dots, p)$, $c_0 = a$, $c_{p+1} = b$.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение Π отрезка $[a, b]$ такое, чтобы точки c_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ входили в число точек деления. Тогда

$$\sum_{j=0}^{n-1} [F_1(x_{j+1}) - F_1(x_j)] = \sum_{j=0}^{n-1} F_1'(\xi_j)\, \Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\, \Delta x_j,\quad x_j < \xi_j < x_{j+1} \qquad (1)$$

(по теореме Лагранжа о конечных приращениях).

С другой стороны,

$$\sum_{j=0}^{n-1} [F_1(x_{j+1}) - F_1(x_j)] = \sum_{i=0}^{p} [F_1(c_{i+1}) - F_1(c_i)] = F_1(c_1) - F_1(c_0) +$$
$$+ F_1(c_{p+1}) - F_1(c_p) + \sum_{i=1}^{p-1} [F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)] =$$
$$= F(b-0) - F(a+0) + F(c_1-0) - F(c_p+0) + \sum_{i=1}^{p-1} [F(c_{i+1}-0) -$$
$$- F(c_i+0)] = F(b-0) - F(a+0) + F(c_1-0) - F(c_1+0) +$$
$$+ F(c_2-0) - F(c_2+0) + F(c_3-0) - F(c_3+0) + \cdots +$$
$$+ F(c_p-0) - F(c_p+0) = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) -$$
$$- F(c_i-0)]. \qquad (2)$$

Из (1) получаем

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} [F_1(x_{j+1}) - F_1(x_j)] = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Сопоставляя полученный результат с (2), приходим к выводу, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

118. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $F(x) = c + \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ — ее неопределенный интеграл. Доказать, что функции $F(x)$ непрерывна и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство $F'(x) = f(x)$.

Что можно сказать о производной функции $F(x)$ в точках разрыва функции $f(x)$?

Доказательство того, что $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и что $F'(x) = f(x)$ в любой точке непрерывности функции $f(x)$, читатель найдет в учебнике: В. В. Немыцкий и др. Курс математического анализа, т. I.

Производная же функции $F(x)$ в точках разрыва функции $f(x)$ может как существовать, так и не существовать.

Рассмотрим, например, функцию $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $f(x) = 0$ при $x \neq \frac{1}{n}$. При любом фиксированном $|x| \leqslant 1$, очевидно, $\int_0^x f(\xi)\,d\xi = 0$ (т. к. функция $f(x)$ отлична от нуля на множестве жордановой меры нуль), поэтому $F(x) = C$ и $F'(x) = 0$ в любой точке $x \in [-1, 1]$.

Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $F(x) = |x| + C$, а $F'(x)$ не существует в точке разрыва функции $y = \operatorname{sgn} x$ $(x = 0)$.

Примечание. Условимся называть неопределенным интегралом ограниченной разрывной функции $f(x)$ на некотором промежутке X совокупность всех непрерывных на этом промежутке функций $F(x)$ таких, что $F'(x) = f(x)$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$.

Найти неопределенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

119. $\int \operatorname{sgn} x\,dx$.

Решение. Мы знаем, что на любом интервале непрерывности функции $f(x)$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(x)$; в сбшем случае, если $f(x)$ — ограниченная разрывная функция, то $F(x)$ непрерывна при любом x из рассматриваемого множества.

Рассмотрим

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t\,dt = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x \\ -x & \text{при } x \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку $F(-0) = F(+0)$, то окончательно $F(x) = |x|$. Но $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$, поэтому $\int \operatorname{sgn} x\,dx = |x| + C$ (C — произвольная постоянная).

120. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.

Решение. Рассмотрим $F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)\,dt$.

Подынтегральная функция — периодическая, а $F(x)$ — непрерывна. Пусть $x > 0$ и $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$; тогда, очевидно, $F(x) = \int_{n\pi}^x dt = x - n\pi$, если n четное.

Если же $x \in ((n-1)\pi, n\pi)$ и n — четное, то

$$F(x) = \pi + \int_{(n-1)\pi}^x (-1)\,dt = -x + n\pi.$$

Пусть $x < 0$ и $x \in (-(n+1)\pi, -n\pi)$, n — четное; тогда $F(x) = \int_{-n\pi}^x (-1)\,dt = -x - n\pi$; если же $x \in (-n\pi, -(n-1)\pi)$, то $F(x) = \pi + \int_{-(n-1)\pi}^x dt = x + n\pi$. При любом x, очевидно, $F(x) = \pm x + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); $0 \leqslant F(x) \leqslant \pi$. Покажем, что $F(x) = \arccos(\cos x)$. В самом деле, пусть $y = \arccos(\cos x)$; тогда $\cos y = \cos x$, откуда $y = \pm x + 2k\pi$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Окончательно находим.

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx = \arccos(\cos x) + C.$$

121. $\int [x]\,dx$ $(x \geqslant 0)$.

Решение. Пусть $x \in (k, k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$F(x) = \int_0^x [t]\,dt = \sum_{j=1}^{k} \int_{j-1}^{j} [t]\,dt + \int_k^x [t]\,dt = \sum_{j=1}^{k-1} j + kx - k^2 = \frac{k(k-1)}{2} - k^2 + kx = kx - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Поскольку $k = [x]$, то $F(x) = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2}$. Непрерывная функция $F(x)$ является первообразной для $f(x) = [x]$ на каждом из интервалов непрерывности последней. Таким образом,

$$\int [x]\,dx = x[x] + \frac{[x]([x]+1)}{2} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

122. $\int x[x]\,dx \quad (x \geqslant 0)$.

Решение. В предположении, что $x \in (k,\ k+1)$, находим:

$$F(x) = \int_0^x t[t]\,dt = \sum_{j=1}^{k}\int_{j-1}^{j}(j-1)\,t\,dt + k\int_k^x t\,dt = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(2j^2 - 3j + 1) +$$

$$+ \frac{kx^2}{2} - \frac{k^3}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{3} - \frac{3k(k+1)}{2} + k\right] +$$

$$+ \frac{kx^2}{2} - \frac{k^3}{2} = \frac{kx^2}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{12} =$$

$$= [x]\frac{x^2}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12},$$

так как $k = [x]$.

Следовательно,

$$\int x[x]\,dx = [x]\frac{x^2}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

123. $\int (-1)^{[x]}dx$.

Решение. Пусть $x \in (k,\ k+1)$, $x > 0$; тогда имеем

$$F(x) = \int_0^x (-1)^{[t]}dt = \begin{cases} x - k, & \text{если } k \text{ — четное;} \\ -x + k + 1, & \text{если } k \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Пусть $x \in (-k-1,\ -k)$, $x < 0$; тогда, очевидно,

$$F(x) = \int_0^x (-1)^{[t]}dt = \begin{cases} -x - k, & \text{если } k \text{ — четное;} \\ x + k + 1, & \text{если } k \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

В общем случае $F(x) = \pm x + 2n$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$; таким образом,

$$\int (-1)^{[x]}dx = \pm x + 2n + C \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Запишем результат в другом виде; для этого рассмотрим функцию $y = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x)$. Очевидно, $\cos \pi y = \cos \pi x$, откуда $y = \pm x + 2n$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Таким образом, $F(x) \equiv y(x)$, поэтому

$$\int (-1)^{[x]}dx = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x) + C.$$

124. $\int_0^x f(t)\,dt$, где $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < l; \\ 0, & \text{если } |t| > l. \end{cases}$

Решение. Интегрируя, получаем

$$\int_0^x f(t)\,dt = \left.\begin{cases} x, & \text{если } |x| \leqslant l \\ l, & \text{если } x > l \\ -l, & \text{если } x < -l \end{cases}\right\} = \frac{1}{2}(|x+l| - |x-l|).$$

Вычислить определенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

125. $\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)\,dx.$

Решение. Поскольку

$$\operatorname{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < x < 1; \\ -1 \text{ при } 1 < x \leqslant 3; \\ 0 \text{ при } x = 0,\ x = 1, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)\,dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_1^3 dx = 1 - 2 = -1.$$

126. $\int\limits_0^2 [e^x]\,dx.$

Решение. Монотонная на отрезке [0, 2] непрерывная функция $y = e^x$ принимает все промежуточные значения между 1 и e^2 ($7 < e^2 < 8$). Точками разрыва функции $[e^x]$ есть значения $x_k = \ln k$ ($k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$), причем $[e^x] = k$, если $x \in [\ln k, \ln(k+1))$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Таким образом,

$$\int\limits_0^2 [e^x]\,dx = \sum_{k=1}^{6} \int\limits_{\ln k}^{\ln(k+1)} k\,dx + 7\int\limits_{\ln 7}^{2} dx = \sum_{k=1}^{6} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 7(2 - \ln 7) =$$

$$= \ln \frac{7^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \ln 7^7 + 14 = 14 - \ln(7!).$$

127. $I = \int\limits_0^6 [x] \sin\frac{\pi x}{6}\,dx.$

Решение. Точки разрыва подынтегральной функции $x_k = k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Так как $[x] = k$ при $x \in [k, k+1)$, то

$$I = \sum_{k=1}^{5} k \int\limits_k^{k+1} \sin\frac{\pi x}{6}\,dx = \sum_{k=1}^{5} \frac{6k}{\pi} \cos\frac{\pi x}{6}\Bigg|_{x=k+1}^{x=k} =$$

$$= \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{5} k\left(\cos\frac{k\pi}{6} - \cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right) = \frac{6}{\pi}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right) + \right.$$

$$+ 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) + 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{6}\right) +$$

$$\left. + 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\pi\right)\right] = \frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{3} + \right.$$

$$\left. + 3\cos\frac{\pi}{3} - 4\cos\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{\pi}{6} - 5\cos\frac{\pi}{6} + 5\right) = \frac{30}{\pi}.$$

128. $\int\limits_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x)\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция ограничена и разрывна в точке $x = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

129. $\int\limits_1^{n+1} \ln [x]\, dx$, где n — натуральное число.

Решение. Точками разрыва подынтегральной функции являются $x_k = k$ $(k = 2, 3, \ldots, n+1)$. Поскольку $\ln [x] = \ln k$, если $x \in [k, k+1]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\int_1^{n+1} \ln [x]\, dx = \sum_{k=1}^{n} \ln k \int_k^{k+1} dx = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln (n!).$$

130. $\int\limits_0^1 \operatorname{sgn} [\sin (\ln x)]\, dx.$

Решение. Точки разрыва подынтегральной функции — нули функции $y = \sin (\ln x)$, т. е. $x_k = e^{-k\pi}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$. Таким образом,

$$\int_0^1 \operatorname{sgn} [\sin (\ln x)]\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \operatorname{sgn} [\sin (\ln x)]\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k-1} (e^{-k\pi} - e^{-(k+1)\pi}) = -1 + 2e^{-\pi} (1 - e^{-\pi} + e^{-2\pi} - e^{-3\pi} +$$

$$+ e^{-4\pi} - \cdots) = -1 + \frac{2e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} + 1} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\operatorname{th} \frac{\pi}{2}$$

в силу того, что

$$\operatorname{sgn} [\sin (\ln x)] = \left\{ \begin{array}{l} -1, \ x \in (x_{k+1}, x_k), \text{ если } k \text{ — четное;} \\ 1, \ x \in (x_{k+1}, x_k), \text{ если } k \text{ — нечетное} \end{array} \right\} =$$
$$= (-1)^{k-1}, \ x \in (x_{k+1}, x_k).$$

131. Найти $\int\limits_E |\cos x| \sqrt{\sin x}\, dx$, где E — множество тех значений сегмента $[0, 4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

Решение. Множество E состоит из отрезков $[0, \pi]$ и $[2\pi, 3\pi]$; принимая во внимание, что на каждом из этих отрезков функция

$y=\cos x$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, представим интеграл на множестве E в виде суммы интегралов по отрезкам $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right]$, внутри каждого из которых $\cos x$ знакопостоянен:

$$\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) +$$

$$+ \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) - \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} - \sin^{\frac{3}{2}} x \Big|_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi}\right) = \frac{8}{3}.$$

§ 3. Теоремы о среднем

1°. Среднее значение функции. Число

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

называется *средним значением функции* $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $M[f] = f(\xi)$.

2°. Первая теорема о среднем. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и собственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и функция $\varphi(x)$ не меняет знака при $a < x < b$, то*

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$, $m = \inf_{a<x<b} \{f(x)\}$, $M = \sup_{a<x<b} \{f(x)\}$.

Если же функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\mu = f(\xi)$, где $a \leqslant \xi \leqslant b$.

3°. Вторая теорема о среднем. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и собственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и функция $\varphi(x)$ монотонна при $a < x < b$, то*

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x)\, dx + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x)\, dx,$$

где $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Если же сверх того функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x)\, dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

Если же функция $\varphi(x)$ монотонно возрастающая и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

132. Определить знаки следующих определенных интегралов:

а) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx$; в) $\int_{-2}^{2} x^3\cdot 2^x dx$; г) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x dx$.

Решение. а) Представим интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx.$$

Полагая $x-\pi = t$, получим

$$\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx = \int_0^{\pi}(t+\pi)\sin(t+\pi)\,dt = -\int_0^{\pi} t\sin t dt - \pi\int_0^{\pi}\sin t dt.$$

Приходим к выводу, что

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx = -\pi\int_0^{\pi}\sin x dx < 0, \text{ так как } \int_0^{\pi}\sin x dx = \pi\sin\xi > 0,$$
$$0<\xi<\pi$$

(по первой теореме о среднем).

б) Рассмотрим функцию

$$\underset{x\in[0,2\pi]}{F(x)} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0; \\ 1, & x=0; \end{cases}$$

тогда

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{2\pi} F(x)\,dx.$$

Очевидно, $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi} F(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{F(x)\,dx}{(\pi+x)} =$

$= \pi F(\xi)\ln 2$, где $0<\xi<\pi$ $\Bigl($в интеграле $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ произведена замена $x-\pi = t$, а к последнему интегралу применили первую теорему о среднем$\Bigr)$. Так как $F(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi} > 0$ при $0<\xi<\pi$, то $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx > 0$.

в) Запишем интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[-2, 0]$ и $[0, 2]$ и в интеграле по отрезку $[-2, 0]$ произведем замену $x = -t$; получаем

$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx = 2\int_{0}^{2} x^3 \operatorname{sh} x dx = 8 \operatorname{sh} \xi, \quad 0 < \xi < 2$$

(по первой теореме о среднем). Таким образом, $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx > 0$.

г) Применив первую теорему о среднем, имеем $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx =$ $= \xi^2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x dx = \frac{\xi^2}{2}(\ln 2 - 1) < 0$, так как $\ln 2 < 1$, $\quad \frac{1}{2} < \xi < 1$.

133. Какой интеграл больше:

а) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ или $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

б) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx$ или $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$;

в) $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ или $I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$.

Решение. а) Поскольку $\sin^2 x > \sin^{10} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и равенство $\sin^2 x = \sin^{10} x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возможно лишь при $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi(x) = \sin^2 x - \sin^{10} x > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) dx > 0$, т. е. $I_2 > I_1$.

б) Так как $e^{-x^2} > e^{-x}$ при $x \in (0, 1)$, то $I_2 > I_1$.

в) Полагая в I_2 $x - \pi = t$, получаем $I_2 = \int_0^{\pi} e^{-(\pi+t)^2} \cos^2 t dt$; $I_1 - I_2 = \int_0^{\pi} [e^{-x^2} - e^{-(\pi+x)^2}] \cos^2 x dx$.

Применяя к последнему интегралу первую теорему о среднем, находим $I_2 - I_1 = (e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2}) \frac{\pi}{2}$, где $0 < \xi < \pi$. Так как $e^{-\xi^2} - e^{-(\pi+\xi)^2} > 0$, то $I_1 > I_2$.

134. Определить средние значения данных функций в указанных промежутках:

а) $f(x)=x^2$ на $[0,\ 1]$; б) $f(x)=\sqrt{x}$ на $[0,\ 100]$;
в) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ на $[0,\ 2\pi]$;
г) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ на $[0,\ 2\pi]$.

Решение. Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ по определению есть число $M[f]=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Поэтому:

$$\text{а)}\ M[f]=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3};\quad \text{б)}\ M[f]=0{,}01\int\limits_0^{100}\sqrt{x}\,dx=\frac{20}{3};$$

$$\text{в)}\ M[f]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(10+2\sin x+3\cos x)\,dx=10;$$

$$\text{г)}\ M[f]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\varphi)\,dx=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\cos\varphi-\cos(2x+$$
$$+\varphi)]\,dx=\frac{\cos\varphi}{2}.$$

135. Найти среднее значение длины фокального радиуса-вектора эллипса $r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$.

Решение. $M[r]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{p\,d\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}=\frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}=$

$$=\frac{2p}{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2}+\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{2p}{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Из аналитической геометрии известно, что $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $p=\frac{b^2}{a}$ (a — большая полуось эллипса; b — его малая полуось). Подставляя ε и p в полученный результат, находим $M[r]=b$.

136. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0.

Решение. Скорость свободно падающего тела в момент времени t выражается формулой $v(t)=v_0+gt$, где v_0 — начальная скорость; g — ускорение свободного падения. $M[v]=\frac{1}{T}\int\limits_0^T(v_0+$ $+gt)\,dt=v_0+\frac{gT}{2}=\frac{v(T)+v_0}{2}$, так как $\frac{gT}{2}=\frac{v(T)-v_0}{2}$.

137. Сила переменного тока меняется по закону $i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$, где i_0 — амплитуда; t — время; T — период и φ — начальная фаза. Найти среднее значение квадрата силы тока.

Решение.

$$i^2 = \frac{i_0^2}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\varphi\right)\right];$$

$$M[i^2] = \frac{i_0^2}{2T}\int_0^T \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\varphi\right)\right] dt = \frac{i_0^2}{2}.$$

138. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Рассмотреть $f(t) = \operatorname{arctg} t$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ B$ такое, что при $x \geqslant B$ $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $x > B$; тогда

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^B f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_B^x f(t)\,dt = \frac{C}{x} + \left(1 - \frac{B}{x}\right) f(\xi),$$

где $C = \int_0^B f(t)\,dt = \text{const}$, $B \leqslant \xi \leqslant x$ (по теореме о среднем). Оценим $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - A\right| = \left|\frac{C}{x} + (f(\xi) - A) - \frac{f(\xi)B}{x}\right| \leqslant \frac{|C - f(\xi)B|}{x} + |f(\xi) - A|$.

Поскольку $f(x)$ — непрерывная функция, B — фиксировано, а x можно взять как угодно большим, то $\frac{|C - f(\xi)B|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших x, а $|f(\xi) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, так как $B \leqslant \xi \leqslant x$. Таким образом, при достаточно больших x

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - A\right| < \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = A.$$

Если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x \operatorname{arctg} t\,dt = \frac{\pi}{2}$.

139. Пусть $\int\limits_0^x f(t)dt = xf(\theta x)$.

Найти θ, если: а) $f(t) = t^n$ $(n > -1)$; б) $f(t) = \ln t$; в) $f(t) = e^t$. Чему равны $\lim\limits_{x\to 0} \theta$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta$?

Решение. а) $\int\limits_0^x t^n dt = x(\theta x)^n$ (по условию); отсюда $\theta^n =$

$$= \frac{1}{n+1};\quad \theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \text{const};\ \lim_{x\to 0}\theta = \lim_{x\to+\infty}\theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

б) По условию $\int\limits_0^x \ln t\,dt = x\ln(\theta x)$, или $x(\ln x - 1) = x(\ln x + \ln\theta)$, откуда $\theta = e^{-1} = \text{const}$; $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \lim\limits_{x\to+\infty}\theta = e^{-1}$.

Примечание. $\int\limits_0^x \ln t\,dt$ следует понимать в несобственном смысле, т. е. $\int\limits_0^x \ln t\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^x \ln t\,dt$.

в) По условию $e^x - 1 = xe^{\theta x}$, откуда $\theta = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$.

Пусть $x \to 0$; тогда $\ln\frac{e^x-1}{x} = \frac{x}{2} + O^*(x^2)$ и $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \frac{1}{2}$. Пусть $x \to +\infty$; тогда

$$\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}[\ln(e^x-1) - \ln x] = \frac{1}{x}[x + \ln(1-e^{-x}) - \ln x] =$$

$$= \frac{1}{x}[x - e^{-x} + o(e^{-x}) - \ln x];\quad \lim_{x\to+\infty}\theta = 1.$$

Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы:

140. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

Решение. Так как $\cos(2\pi - x) = \cos x$, то

$$I = 2\int_0^\pi \frac{dx}{1+0{,}5\cos x} = \frac{2\pi}{1+0{,}5\cos\xi},\quad 0<\xi<\pi$$

(по первой теореме о среднем). Справедлива оценка

$\frac{4}{3}\pi < I < 4\pi$, откуда $-\frac{4}{3}\pi < I - \frac{8}{3}\pi < \frac{4}{3}\pi$. Обозначим

$\frac{I - \frac{8\pi}{3}}{\frac{4\pi}{3}} = \theta$; тогда $I = \frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi\theta}{3}$, где $|\theta| < 1$.

141. $I = \int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx$.

Решение. Применяя первую теорему о среднем, найдем $I = \frac{1-e^{-100}}{\xi+100}$, где $0<\xi<100$. Так как $\xi = 100\theta$, где $0<\theta<1$, то $I = \frac{0{,}01\,(1-e^{-100})}{1+\theta}$. Поскольку $0{,}005\,(1-e^{-100}) < I < 0{,}01\,(1-e^{-100})$, то $-0{,}005\,(1-e^{-100}) < I - 0{,}01\,(1-e^{-100}) < 0$, откуда $0 < \frac{I-0{,}01\,(1-e^{-100})}{-0{,}005\,(1-e^{-100})} < 1$. Полагая $\theta_1 = \frac{I-0{,}01\,(1-e^{-100})}{-0{,}005\,(1-e^{-100})}$, находим

$$I = (0{,}01 - 0{,}005\theta_1)(1-e^{-100}) \approx 0{,}01\,(1-0{,}5\theta_1),\quad 0<\theta_1<1.$$

142. $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

Решение. По первой теореме о среднем получаем $I = \frac{1}{10\sqrt{1+\xi}}$, где $0<\xi<1$, откуда $\frac{1}{10\sqrt{2}} < I < \frac{1}{10}$.

143. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{1+x} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

Решение. а) Применим теорему о среднем:

$\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{1+x} = \frac{1}{(n+1)(1+\xi)}$, где $0<\xi<1$; таким образом,

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

б) Запишем

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = I_n' + I_n'',$$

где $\varepsilon > 0$ — любое, наперед заданное.

При любом n, очевидно, справедлива оценка

$$|I''_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Так как $I'_n < I'_{n-1}$ и $I'_n > 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} I'_n = C$. По теореме о среднем $I'_n = \sin \xi_n I'_{n-1}$; $0 < \xi_n < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $C(1 - \sin\xi) = 0$; $C = 0$ (так как $\sin\xi \neq 1$). Итак, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N > 0$ такое, что при $n > N$

$$|I'_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Из оценок (1) и (2) получаем $|I_n| < \varepsilon$ при $n > N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

144. Найти:

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}$;

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to +0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}$, где $a > 0$, $b > 0$, $f(x) \in C[0,1]$.

Решение. а) Применяя первую теорему о среднем, получаем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1} = \frac{1}{\varepsilon\xi^3 + 1}$, $0 < \xi < 1$, откуда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\xi^3 + 1} = 1$.

б) Законно применение первой теоремы о среднем: $\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}$, $a\varepsilon < \xi < b\varepsilon$; при $\varepsilon \to +0$ $\xi \to 0$, а $f(x) \in C[0,1]$, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to +0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = f(0)\ln\frac{b}{a}$.

145. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $\varphi'(x) \geqslant 0$ при $a < x < b$. Доказать вторую теорему о среднем, применяя интегрирование по частям и используя первую теорему о среднем.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$; интегрируем по частям, полагая $dv = f(x)\,dx$,

$$u=\varphi(x):\quad I=\left[\varphi(x)\int_{a}^{x} f(t)\,dt\right]\Bigg|_a^b-\int_a^b\left\{\varphi'(x)\int_a^x f(t)\,dt\right\}dx=$$

$$=\varphi(b)\int_a^b f(x)\,dx-[\varphi(b)-\varphi(a)]\int_a^{\xi} f(x)\,dx,$$

где $a<\xi<b$ (применив первую теорему о среднем к интегралу $\int_a^b\left\{\varphi'(x)\int_a^x f(t)\,dt\right\}dx$; применение теоремы законно, так как $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ — непрерывная функция, а $\varphi'(x)\geqslant 0$ по условию).

Проведя несложные преобразования, получаем

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx+\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы:

146. $I=\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$

Решение. В силу свойства аддитивности интеграла

$$I=\sum_{k=100}^{199}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx=\sum_{k=100}^{199}(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{t+k\pi}=$$

$$=\sum_{n=50}^{99}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{t+2n\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{t+(2n+1)\pi}\right)=$$

$$=\pi\sum_{n=50}^{99}\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{(t+2n\pi)\,[t+(2n+1)\,\pi]}=\sum_{n=50}^{99}\frac{1}{2n\,(2n+1)\,\pi}\int_0^{\xi_n}\sin t\,dt=$$

$$=\sum_{n=50}^{99}\frac{1-\cos\xi_n}{2n\,(2n+1)\,\pi}$$

(в интеграле $\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$ произведена замена $x-k\pi=t$, а затем применена вторая теорема о среднем). Так как

$$0<1-\cos\xi_n<2,\quad 0<\sum_{n=50}^{99}\frac{1-\cos\xi_n}{2n\,(2n+1)\,\pi}<\frac{2\cdot 50}{10^4\pi}=\frac{1}{100\pi},$$

то $0<I<\frac{1}{100\pi}$.

Обозначим $\theta = \frac{I\pi}{0{,}01}$; тогда $I = \frac{\theta}{100\pi}$, $0 < \theta < 1$.

147. $\int\limits_a^b e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (\alpha \geqslant 0,\ 0 < a < b).$

Решение. По второй теореме о среднем $I = \frac{e^{-\alpha a}}{a}(\cos a - \cos\xi)$, $a < \xi < b$.

Очевидно, $-\frac{2}{a} < I < \frac{2}{a}$. Обозначив $\frac{aI}{2} = \theta$, получим $I = \frac{2\theta}{a}$, где $|\theta| < 1$.

148. $\int\limits_a^b \sin x^2 dx \qquad (0 < a < b).$

Решение. Полагая $x^2 = t$, имеем $I = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$; применив вторую теорему о среднем, найдем $I = \frac{1}{2a}\int\limits_{a^2}^{\xi} \sin t dt = \frac{\cos a^2 - \cos\xi}{2a}$, $a^2 < \xi < b^2$.

Поскольку $-\frac{1}{a} < I < \frac{1}{a}$, то, обозначив $I : \frac{1}{a} = \theta$, получаем $I = \frac{\theta}{a}$, где $|\theta| < 1$.

149. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, b]$ вместе со своими квадратами. Доказать неравенство Коши — Буняковского

$$\left\{\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int\limits_a^b \varphi^2(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx.$$

Доказательство. Обозначим $\alpha = \int\limits_a^b \varphi^2(x)\,dx$, $\beta = \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx$, $\gamma = \int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx$ и рассмотрим два возможных случая: 1) $\alpha = \gamma = 0$; 2) по крайней мере одно из чисел α и γ отлично от нуля.

1) Пусть $\alpha = \gamma = 0$; интегрируя очевидное неравенство, $|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{1}{2}[\varphi^2(x) + \psi^2(x)]$, получаем, что

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |\varphi(x)\psi(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left[\int\limits_a^b \varphi^2(x) + \int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx\right] = \frac{\alpha+\gamma}{2},$$

следовательно, $\beta = 0$ и доказываемое неравенство выполняется.

2) Пусть, например, $\gamma > 0$. Тогда при всех действительных значениях параметра λ выражение $[\varphi(x) + \lambda\psi(x)]^2$ неотрицательно.

Интегрируя неравенство $[\varphi(x) + \lambda\psi(x)]^2 \geqslant 0$, находим $\lambda^2\gamma + 2\lambda\beta + \alpha \geqslant 0$ (при всех действительных λ). Таким образом, дискриминант квадратного трехчлена относительно λ $y = \lambda^2\gamma + 2\lambda\beta + \alpha$ есть неположительное число, т. е. $\beta^2 - \alpha\gamma \leqslant 0$, откуда $\beta^2 \leqslant \alpha\gamma$ или

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

150. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = 0$. Доказать неравенство $M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx$, где $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f(x)|\}$.

Доказательство. Запишем неравенство Коши — Буняковского в виде

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \psi^2(x)\,dx}$$

и применим его к функциям $\varphi(t) = f'(t)$, $\psi(t) \equiv 1$ на отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$:

$$\sqrt{\int_a^x f'^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^x 1^2 dt} \geqslant \left|\int_a^x f'(t)\cdot 1dt\right|,$$

откуда (принимая во внимание, что $f(a) = 0$)

$$\sqrt{(x-a)} \cdot \sqrt{\int_a^x f'^2(t)\,dt} \geqslant |f(x)|.$$

В левой части полученного неравенства можем положить $x = b$ (от этого неравенство только усилится), т. е.

$$\sqrt{(b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx} \geqslant |f(x)|.$$

Последнее неравенство справедливо и для того значения x, при котором непрерывная функция $|f(x)|$ достигает своей точной верхней грани. Обозначая $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f(x)|\}$, получим

$\sqrt{(b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx} \geqslant M$, или, возведя обе части неравенства в квадрат:

$$(b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx \geqslant M^2,$$

что и требовалось доказать.

151. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx=0 \qquad (p>0).$

Доказательство. Функция $\frac{1}{x}$ монотонно убывает на любом отрезке $[n,\ n+p]$, а $\sin x$ непрерывен на этом отрезке. На основании второй теоремы о среднем имеем

$$\int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\cos n-\cos\xi}{n}, \qquad n<\xi<n+p.$$

Поскольку $\left|\int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|=\frac{|\cos n-\cos\xi|}{n}\leqslant\frac{2}{n}$ при любом n, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx=0.$

§ 4. Несобственные интегралы

Несобственный интеграл первого рода.

1°. Если функция $y=f(x)$ определена при $a\leqslant x<+\infty$ и интегрируема на каждом конечном промежутке $a\leqslant x\leqslant b<+\infty$, то по определению

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{X\to+\infty}\int\limits_a^X f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если при $X\to+\infty$ функция $F(X)=\int\limits_a^X f(x)\,dx$ имеет конечный предел, мы называем *несобственный интеграл* (первого рода) $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *входящимся;* если же при $X\to+\infty$ функция $F(X)$ не имеет конечного предела, мы называем *несобственный интеграл расходящимся* и не приписываем ему никакого числового значения.

2°. Критерий Коши. Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists\ X>a$ такое, что при $X'>X$, $X''>X$,

$$|F(X')-F(X'')|=\left|\int\limits_{X'}^{X''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

3°. Если $f(x)$ неотрицательная функция на $[a,\ +\infty)$, то $F(X)=\int\limits_a^X f(x)\,dx$ — неубывающая; если $F(X)$ не ограничена на $(a,\ +\infty)$, то при $X\to+\infty$ $F(X)\to+\infty$ и мы говорим, что интеграл (1) расходится к $+\infty$; если же $F(X)$ ограничена на $(a, +\infty)$, то $\sup \{F(X)\} = \lim\limits_{X \to +\infty} F(X)$ и интеграл (1) сходится.

4°. Признак сравнения: если на $(a, +\infty)$ имеем две неотрицательные интегрируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant Cf_2(x)$ $(C > 0)$, то из сходимости интеграла от $f_2(x)$ следует сходимость интеграла от $f_1(x)$, а из расходимости интеграла от $f_1(x)$ следует расходимость интеграла от $f_2(x)$.

Пусть в интеграле (1) $f(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$; при $\lambda > 1$ интеграл (1) сходится, а при $\lambda \leqslant 1$ — расходится.

Получаем практический признак сравнения: если $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^{\lambda}}\right)$ при $x \to +\infty$, то при $\lambda > 1$ интеграл (1) сходится, а при $\lambda \leqslant 1$ — расходится.

На практике этим признаком пользуются весьма часто.

5°. Интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{2}$$

Интеграл (1) может сходиться и в случае, когда интеграл (2) расходится; тогда говорят, что интеграл (1) *сходится условно.*

Из абсолютной сходимости несобственного интеграла первого рода всегда следует его сходимость.

6°. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx. \tag{3}$$

Если при $x \to +\infty$ непрерывно дифференцируемая функция $g(x)$ убывая стремится к нулю, а функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $F(x)$, $|F(x)| \leqslant C$, то интеграл (3) сходится.

Заметим, что при исследовании несобственных интегралов на сходимость нам часто будут встречаться интегралы вида

$$I_1 = \int_a^{+\infty} g(x) \sin kx dx; \qquad I_2 = \int_a^{+\infty} g(x) \cos kx dx,$$

где $k \neq 0$ — любое фиксированное целое число.

Если $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая, монотонно стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$ функция, то интегралы I_1 и I_2 сходятся.

В самом деле, функции

$$F(X) = \int_a^X \sin\ kx dx = \frac{\cos ak - \cos kX}{k}, \quad \Phi(X) = \int_a^X \cos kx dx =$$

$$= \frac{\sin kX - \sin ak}{k}$$

ограничены при любом фиксированном целом $k \neq 0$ и при любом X, поэтому на основании признака Дирихле интегралы I_1 и I_2 сходятся.

7°. Интегрирование по частям и через подстановку в несобственном интеграле.

а) Если интегрирование по частям на промежутке $[a, X]$ привело к результату

$$\int_a^X f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x)\,\Big|_a^X - \int_a^X f'(x)\,G(x)\,dx$$

($G(x)$ — первообразная для $g(x)$), то можно написать и равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x)\,\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)\,G(x)\,dx$$

в предположении, что хотя бы два из написанных трех предельных значений существуют (внеинтегральный член определяется при этом так: $f(x)\,G(x)\,\big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{X\to+\infty} f(x)\,G(x)\,\big|_a^X = \lim\limits_{X\to+\infty} [f(X)\,G(X) - - f(a)\,G(a)]$).

б) Если в результате подстановки $x = x(u)$ мы пришли к равенству $\int_a^X f(x)\,dx = \int_b^U f[x(u)]\,x'(u)\,du$ и при этом из $X \to +\infty$ следует $U \to +\infty$, то справедливо равенство $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_b^{+\infty} f[x(u)] \times \times x'(u)\,du$, если существует хотя бы один из написанных интегралов.

Рассматриваются также интегралы $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{Y\to-\infty} \int_Y^a f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}} \int_Y^X f(x)\,dx$.

Несобственные интегралы второго рода.

8°. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема в каждом промежутке $[a+\varepsilon, b]$, но не интегрируема (например, не ограничена) на всем отрезке $[a, b]$, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Если этот предел существует, то интеграл (4) (несобственный интеграл второго рода) называется *сходящимся;* в противном случае его называют *расходящимся.*

9°. Критерий Коши. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $a < x \leqslant b$, то для сходимости интеграла (4) необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, чтобы из неравенств $0 < x_1 - a < \delta$, $0 < x_2 - a < \delta$ следовало неравенство

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

10°. Практический признак. Если при $x \to a+0$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-a)^\lambda}\right)$ ($f(x)$ есть бесконечно большая функция при $x \to a+0$ порядка λ), то при $\lambda < 1$ интеграл (4) сходится, а при $\lambda \geqslant 1$ — расходится.

Отметим, что с помощью замены переменной $t = \frac{1}{x-a}$ несобственный интеграл второго рода приводится к несобственному интегралу первого рода.

Примечание. Если $c \in (a, b)$ и функция $f(x)$ не ограничена ни в какой двухсторонней окрестности этой точки, то полагают по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \mu \to +0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\mu}^b f(x)\,dx \right\}$$

при независимом друг от друга стремлении ε и μ к нулю (в предположении, что интегралы в фигурных скобках существуют).

Вычислить интегралы:

152. $I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение.

$$\int_2^X \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_2^X \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2}\Big|_2^X =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln \frac{X-1}{X+2} - \ln \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \ln 4\,\frac{X-1}{X+2}.$$

Следовательно, $I = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{3} \ln 4\,\frac{X-1}{X+2} = \frac{2}{3} \ln 2.$

153. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

Решение. Из примера 140, гл. III следует, что

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

поэтому $I = \lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}} \int\limits_Y^X \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}} \left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \right.$

$\left. + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_Y^X = \lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}} \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2X+1}{\sqrt{3}} - \right.$

$\left. - \operatorname{arctg} \frac{2Y+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

154. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

Решение. Так как (см. пример 110, гл. III) $\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$, то $I =$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^X =$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2X-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

155. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

Решение. Функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x)$ является первообразной для $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$ на промежутке $[0, +\infty)$ (см. пример 68), поэтому $I = \lim\limits_{X\to+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x)\right]\Bigg|_0^X =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{X^2-1}{X\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} X\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

156. $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

Решение. Заменим переменную, полагая $1-x=t^2$ $(dx = -2t\,dt)$; после замены получим $I = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}.$

157. $I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

Решение. Поскольку

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^5}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2+\frac{1}{x^5}+1}} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\frac{2x^5}{2+x^5+2\sqrt{x^{10}+x^5+1}} + C,$$

то по определению

$$I = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{5}\left(\ln\frac{2X^5}{2+X^5+2\sqrt{X^{10}+X^5+1}} - \ln\frac{2}{3+2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

158. $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение. Интегрируем по частям, полагая $dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$, $u = \ln x$; получаем

$$\int \frac{x\ln xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C = F(x) + C.$$

По определению

$$I = \lim_{\substack{X\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{X} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right) = 0$$

(так как $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X) = 0$; $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^2\ln\varepsilon = 0$).

159. $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

Решение. Произведем замену переменной, полагая $\operatorname{arctg} x = z$ $\left(\frac{dx}{1+x^2} = dz,\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos z,\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; получаем

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} z\cos zdz = (z\sin z + \cos z)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

160. $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx.$

161. $I_2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx \qquad (a > 0).$

Решение. Умножим I_2 на мнимую единицу и сложим с I_1:

$$I_1 + iI_2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{(-a+ib)x}\, dx = \frac{e^{(-a+ib)x}}{-a+ib}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a-ib)(\cos bx + i \sin bx)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left[(b \sin bx - a\cos bx) + i(a \sin bx + b \cos bx)\right]\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Таким образом, $I_1 = \frac{a}{a^2+b^2}$, $I_2 = \frac{b}{a^2+b^2}$.

С помощью формул понижения вычислить следующие несобственные интегралы (n — натуральное число):

162. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx.$

Решение. Интегрируя по частям ($e^{-x}dx = dv, x^n = u$), находим

$$I_n = x^n e^{-x}\Big|_{+\infty}^{0} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx = nI_{n-1}.$$

Поскольку $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-x}\Big|_{+\infty}^{0} = 1$, то $I_n = n(n-1) \cdots 2 \times$ $\times 1 = n!$.

163. $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \qquad (ac - b^2 > 0).$

Решение. Очевидно,

$$(ax^2 + 2bx + c)^n = \left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}\right]^n.$$

Полагая $x + \frac{b}{a} = t$ и обозначая $\frac{ac-b^2}{a} = B$, получим, интегрируя по частям ($n > 1$):

$$I_{n-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(at^2+B)^{n-1}} = \frac{t}{(at^2+B)^{n-1}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2(n-1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{at^2dt}{(at^2+B)^n} =$$

$$= 2(n-1)(I_{n-1} - BI_n),$$

откуда $I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)B} I_{n-1} = \frac{(2n-3)(2n-5)}{2(n-1)\cdot 2(n-2)B^2} \cdot I_{n-2} = \cdots =$

$$= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{I_1}{B^{n-1}} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{B^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{at^2+B}.$$

Так как $\frac{B}{a} > 0$, то окончательно находим

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{aB^{n-1}(2n-2)!!} \sqrt{\frac{a}{B}} \operatorname{arctg} t \sqrt{\frac{a}{B}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi(2n-3)!!}{aB^{n-1}(2n-2)!!} \sqrt{\frac{a^2}{ac-b^2}} = \frac{\pi(2n-3)!!\, a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(2n-2)!!\,(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

164. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Решение. По определению $I_n = \lim\limits_{X\to+\infty} \int\limits_1^X \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ легко видеть, что интеграл сходится. Разлагая правильную дробь $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ на простейшие, получим $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} =$ $= \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x+k}$, где $A_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k C_n^k}{n!}$.

Таким образом, $\int\limits_1^X \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{n!}\Big[\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(X+k) +$

$$+ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)\Big] = \frac{1}{n!}\Big[\ln \prod_{k=0}^{n} (X+k)^{(-1)^k C_n^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)\Big].$$

Так как сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, то $\lim\limits_{X\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} (X+k)^{(-1)^k C_n^k} = 1$, следовательно,

$$\lim_{X\to+\infty} \ln \prod_{k=0}^{n} (X+k)^{(-1)^k C_n^k} = 0,$$

поэтому $I = \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$.

165. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n\, dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

Решение. Полагая $x = \sin t$, получим

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Этот интеграл уже рассмотрен нами (см. пример 98).

166. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}$.

Решение. Интегрируя по частям $\left(\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = dv;\quad v = \operatorname{th} x;\right.$ $u = \frac{1}{\operatorname{ch}^{n-1} x}$; $\left.du = -\frac{(n-1)\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{ch}^n x}\right)$, находим $(n > 1)$:

$$I_n = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^{n-1} x}\Big|_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 x dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x} = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

(так как $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$). Получили формулу понижения $I_n = \frac{n-1}{n} \times$ $\times I_{n-2}$. Легко видеть, что $I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$ при n нечетном (так как $I_1 = 1$); $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_0 = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$ при n четном, так как $I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}} = 2 \operatorname{arctg} e^x\Big|_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \right.$ $\left.- \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

167. а) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$; б) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$.

Решение. I_1 и I_2 — несобственные интегралы второго рода $\left(\ln \sin x\right.$ имеет особенность в точке $x = 0$, а $\ln \cos x$ имеет особенность в точке $\left.x = \frac{\pi}{2}\right)$. Полагая в I_2 $\pi - x = t$, видим, что $I_1 = I_2$. Таким образом,

$$2I_1 = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx.$$

Полагая в последнем интеграле $2x = t$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t dt\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = I_1$$

(в интеграле $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t dt$ замена $\pi - t = z$ приводит к интегралу I_1).

Мы получили $2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2} \ln 2$, откуда $I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2 = I_2$.

168. Найти $\int\limits_E \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$, где E — множество тех значений x интервала $(0, +\infty)$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

Решение. Так как $\sin x > 0$ при $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, то

$$\int\limits_E \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{2k\pi}^{\pi+2k\pi} \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-\frac{z}{2}} |\sin z - \cos z|}{\sqrt{\sin z}} dz \quad \text{(после замены } x - 2k\pi = z).$$

Под знаком суммы стоит несобственный интеграл второго рода (сходящийся); поскольку $\sin z - \cos z \leqslant 0$ при $0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\sin z - \cos z \geqslant 0$ при $\frac{\pi}{4} \leqslant z \leqslant \pi$, то $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-\frac{z}{2}} |\sin z - \cos z| dz}{\sqrt{\sin z}} =$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{z}{2}} d\sqrt{\sin z} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{\sin z}\, dz + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{\sin z}\, dz -$$

$$- 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-\frac{z}{2}} d\sqrt{\sin z} = 2e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{\sin z}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{\sin z}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt[4]{8}\, e^{-\frac{\pi}{8}}$$

(после интегрирования по частям). Таким образом,

$$\int\limits_E \frac{e^{-\frac{x}{2}} |\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = 2\sqrt[4]{8}\, e^{-\frac{\pi}{8}} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} = \frac{2\sqrt[4]{8}\, e^{-\frac{\pi}{8}}}{1 - e^{-\pi}}.$$

169. Доказать равенство $\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab})\, dx$, где $a > 0$ и $b > 0$, предполагая, что интеграл в левой части равенства имеет смысл.

Доказательство. Пусть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$ имеет смысл. Обозначим его через I и произведем замену $ax+\frac{b}{x}=t$; так как x — двузначная функция t, представим $I=I_1+I_2$, где

$$I_1=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx,\quad I_2=\int\limits_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx.$$

После замены переменной получим

$$I_1=\frac{1}{2a}\int\limits_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,$$

$$I_2=\frac{1}{2a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,$$

$$I=\frac{1}{a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\,dt=\frac{1}{a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\,d\sqrt{t^2-4ab}.$$

Обозначим $\sqrt{t^2-4ab}=z$; тогда $t=\sqrt{z^2+4ab}$ и $I=\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx$, что и требовалось доказать.

170. Средним значением функции $f(x)$ на интервале $(0, +\infty$ называется число $M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi$. Найти средние значения следующих функций:

а) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$; б) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; в) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

Решение. а) Интегрируя, получим $\int\limits_0^x(\sin^2\xi+\cos^2\xi\sqrt{2})\,d\xi=$ $=x+\frac{\sin 2\sqrt{2}\,x}{4\sqrt{2}}-\frac{\sin 2x}{4}$, откуда $M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin 2\sqrt{2}\,x}{4\sqrt{2}\,x}-\frac{\sin 2x}{4x}\right)=1.$

б) $M[\operatorname{arctg} x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]=\frac{\pi}{2}.$

в) Применяя вторую теорему о среднем, находим $\int\limits_0^x\sqrt{t}\sin t\,dt=$

$= \sqrt{x}\int\limits_{\xi}^{x}\sin t\,dt = \sqrt{x}\ (\cos\xi - \cos x),\ (0 < \xi < x)$, откуда $\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x \sqrt{t}\times\right.$ $\left.\times\sin t\,dt\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ при достаточно больших x ($\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное). Поэтому $M\,[\sqrt{x}\sin x] = 0$

171. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$,

где $\alpha > 0$ и $f(t)$ — непрерывная функция на сегменте $[0, 1]$.

Решение. а) По первой теореме о среднем имеем

$$\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt = \cos\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right),\quad x < \xi < 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — наперед задано; при $0 < x < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $\cos\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right) > \frac{\cos\xi}{\varepsilon}$, следовательно, $\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt \to +\infty$ при $x \to +0$.

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

б) Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

в) Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\,dt$ сходится при любом фиксированном $a > 0$, а $\ln\frac{1}{x} \to +\infty$ при $x \to +0$, поэтому $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int\limits_a^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = 0$, следовательно

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{a} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-x^{-1}e^{-x}}{-x^{-1}}=\lim_{x\to+0}e^{-x}=1$$

(применив правило Лопиталя).

г) Применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\int\limits_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha x^{-(\alpha+1)}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\alpha}=\frac{f(0)}{\alpha}$$

(в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=0$).

Исследовать сходимость интегралов:

172. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

Решение. $\frac{x^2}{x^4-x^2+1}=O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to+\infty$, поэтому (по признаку сравнения) интеграл сходится.

173. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Решение. При $x\to+\infty$ $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\right)$, следовательно, интеграл сходится.

174. $I=\int\limits_0^2\frac{dx}{\ln x}$.

Решение. По определению

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mu\to 0}}\left\{\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\ln x}+\int\limits_{1+\mu}^2\frac{dx}{\ln x}\right\}$$

($\varepsilon>0$, $\mu>0$). При $0<x<2$ справедливо разложение $\frac{1}{\ln x}=$ $=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+O^*[(x-1)]$, поэтому

$$\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\ln x}=\ln|x-1|\Big|_0^{1-\varepsilon}+\frac{1}{2}(1-\varepsilon)+O^*(\varepsilon^2)+O(1)=\ln\varepsilon-$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}+C_1+O^*(\varepsilon^2)\ (C_1\text{— постоянная});$$

$$\int\limits_{1+\mu}^{2} \frac{dx}{\ln x} = \ln(x-1)\Big|_{1+\mu}^{2} + 1 - \frac{1+\mu}{2} + O^*(\mu^2) + O(1) = -\ln\mu -$$

$$-\frac{\mu}{2} + C_2 + O^*(\mu^2) \quad (C_2 \text{ — постоянная}).$$

Из написанного видно, что при независимом друг от друга стремлении к нулю ε и μ выражение $\ln\frac{\varepsilon}{\mu} - \frac{1}{2}(\varepsilon+\mu) + C_1 + C_2 + O^*(\varepsilon^2) + O^*(\mu^2)$ предела не имеет. Поэтому интеграл I расходится.

175. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$

Решение. Представим $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_0^a x^{p-1}e^{-x}dx, \quad I_2 = \int\limits_a^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx;$$

$0 < a < +\infty$ — любое фиксированное. Исследуем I_1. При $x \to +0$, $x^{p-1}e^{-x} = O^*\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right)$, следовательно, I_1 будет сходиться при выполнении условия $1-p<1$, т. е. при $p>0$ (как несобственный интеграл второго рода). При $x \to +\infty$ экспоненциальная функция e^{-x} убывает быстрее, чем любая функция вида $\frac{1}{x^\lambda}$ $(\lambda > 1)$, поэтому I_2 сходится при любых вещественных p. Интеграл I будет сходящимся, если одновременно сходятся I_1 и I_2, т. е. он сходится при $p>0$.

176. $I = \int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx.$

Решение. Полагая $\ln\frac{1}{x} = t$, получим

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}t^q dt.$$

Теперь мы можем представить наш интеграл в виде суммы интегралов первого и второго рода. При $t \to +0$ $e^{-(p+1)t}t^q = O^*\left(\frac{1}{t^{-q}}\right)$, а при $t \to +\infty$, $e^{-(p+1)t}t^q = 0(t^{-\lambda})$, где λ — любое число, больше 1, если $p+1>0$ $\left(\text{при этом условии, как легко убедиться с помощью правила Лопиталя, } \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{-(p+1)t}}{t^{-(\lambda+q)}} = 0 \text{ при любых } \lambda \text{ и } q\right)$. Таким образом, для сходимости I достаточно потребовать одновременного выполнения условий: $-q<1$, $p+1>0$, т. е. $q>-1$ и $p+1>0$.

Интеграл сходится, если $q>-1$; $p>-1$.

177. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx \quad (n \geqslant 0)$.

Решение. При $x \to +0$ $\frac{x^m}{1+x^n}=O^*\left(\frac{1}{x^{-m}}\right)$, а при $x \to +\infty$ $\frac{x^m}{1+x^n}=O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, следовательно, интеграл будет сходиться, если $-m<1$, $n-m>1$, т. е. $m>-1$, $n-m>1$.

178. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx \qquad (a \neq 0)$.

Решение. При $x \to +0$ $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}=O^*\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$, а при $x \to +\infty$ $f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^n}\right)$, следовательно, интеграл сходится, если $n-1<1$, $n>1$, т. е. $1<n<2$.

179. $I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$.

Решение. Полагая $\ln(1+x)=t$, получим

$$I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{te^t dt}{(e^t-1)^n}=\int\limits_0^{a} \frac{te^t dt}{(e^t-1)^n}+\int\limits_a^{+\infty} \frac{te^t dt}{(e^t-1)^n}=I_1+I_2,$$

где $a>0$ — любое фиксированное, например $a=1$. При $t \to +0$ $f(t)=\frac{te^t}{(e^t-1)^n}=O^*\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right)$, поэтому интеграл I_1 сходится, если $n-1<1$, т. е. при $n<2$; при $t \to +\infty$

$$f(t)=\frac{t}{e^{(n-1)t}(1-e^{-t})^n}=O\left(\frac{1}{t^\lambda}\right), \qquad \lambda>1,$$

если $n-1>0$, т. е. при $n>1$.

Интеграл I сходится, если $1<n<2$.

180. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx \qquad (n \geqslant 0)$.

Решение. При $x \to +0$ $f(x)=\frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}=O^*\left(\frac{1}{x^{-(m+1)}}\right)$, а при $x \to +\infty$ $f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$, поэтому интеграл будет сходиться при одновременном выполнении условий $-(m+1)<1$ и $n-$ $-m>1$, т. е. при $m>-2$ и $n-m>1$.

181. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx \qquad (n \geqslant 0)$.

Решение. Если $a \neq 0$ и $n>0$, то интеграл сходится (по признаку Дирихле).

182. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

Решение. Запишем интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int\limits_0^{a} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \qquad (a>0).$$

Интеграл $\int\limits_0^{a} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ существует; очевидно,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (к $+\infty$), а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится (по признаку Дирихле), то исследуемый интеграл расходится.

183. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

Решение. При $x \to +0$ $f(x) = \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$, а при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ $f(x) = O^*\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}\right]$. Следовательно, интеграл сходится, если $p<1$, $q<1$.

184. $\int\limits_0^{1} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. При $x \to +0$ $f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = O^*\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)$, а при $x \to 1-0$ $f(x) = O^*\left[\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]$, поэтому интеграл сходится, если $-n < 1$, т. е. $n > -1$.

185. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

Решение. При $x \to +0$ $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$, а при $x \to +\infty$ $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = O^*\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$, поэтому интеграл сходится.

186. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

Решение. Обозначим подынтегральную функцию через $f(x)$. Рассмотрим случаи, когда $p < q$ и $p > q$ (при $p = q$ интеграл, очевидно, расходится). Пусть $p < q$; тогда при $x \to +0$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$, при $x \to +\infty$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^q}\right)$, поэтому интеграл будет сходиться, если $p < 1$; $q > 1$.

Пусть $q < p$. Тогда (в силу рассуждений, приведенных выше) интеграл сходится, если $q < 1$, $p > 1$. Оба случая легко объединить: интеграл сходится, если $\min(p, q) < 1$, $\max(p, q) > 1$.

187. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}$; подынтегральная функция ограничена в окрестности точки $x = 1$. Пусть $0 < \lambda < 1$. Найдем

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1-x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1-x^2} \cdot \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\lambda}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\lambda x^{-\lambda-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{x^\lambda}{-\lambda} = 0.$$

Подынтегральная функция в окрестности точки нуль имеет порядок роста ниже, чем бесконечно большая в этой окрестности функция $\frac{1}{x^\lambda}$ $(0 < \lambda < 1)$. По признаку сравнения исследуемый интеграл сходится.

188. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Сравним подынтегральную функцию в малой окрестности точки $x = 0$ с бесконечной большой в этой окрестности функцией $\frac{1}{x^\lambda}$, где $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Имеем

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} : \frac{1}{x^\lambda} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} =$$

$$\lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) x^{-\lambda-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) x} = 0,$$

так как $\lambda + \frac{1}{2} > 1$. Порядок роста при $x \to +0$ подынтегральной функции ниже, чем порядок роста бесконечно большой функции $\frac{1}{x^\lambda}$ $\left(\frac{1}{2} < \lambda < 1\right)$. Поскольку интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится при $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, то по признаку сравнения исследуемый интеграл также сходится.

189. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$

Решение. Произведем замену переменной, полагая $\ln x = t$ ($x = e^t$, $dx = e^t dt$). Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q}\,dt.$$

При $t \to +0$ $f(t) = \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} = O^*\left(\frac{1}{t^q}\right)$, а при $p > 1$ функция $e^{(1-p)t}$ при $t \to +\infty$ убывает быстрее, чем любая функция вида $\frac{1}{t^\lambda}$ (при любом $\lambda > 1$), поэтому интеграл сходится при $p > 1$, $q < 1$.

190. $I = \int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln\ln x)^r}.$

Решение. Положим $\ln\ln x = t$ ($\ln x = e^t$; $x = e^{e^t}$; $dx = e^{e^t} e^t dt$); тогда

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)e^t} e^{(1-q)t}}{t^r}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

При $t \to +0$ $f(t) = O^*\left(\frac{1}{t^r}\right)$; если $p = 1$, то при $q > 1$ $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\lambda}\right)$, $(\lambda > 1)$; если q — любое вещественное число, а $p \neq 1$, то при $p > 1$

$$f(t) = \frac{e^{(1-p)e^t + (1-q)t}}{t^r} = o\left(\frac{1}{t^\lambda}\right), \qquad \lambda > 1.$$

Таким образом, интеграл сходится, если: а) $r < 1$; $p = 1$; $q > 1$; б) $r < 1$, q — любое вещественное, $p > 1$.

191. $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \dots |x-a_n|^{p_n}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Решение. В окрестности точки $x = a_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{|x-a_j|^{p_j}}\right)$, а при $x \to \infty$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\dots+p_n}}\right)$, следовательно, I сходится, если $p_j < 1$, $\sum_{j=1}^{n} p_j > 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ (по признаку сравнения).

192. $$\int_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta dx.$$

Решение. Обозначим $f(x) = x^\alpha |x-1|^\beta$. При $x \to +0$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^{-\alpha}}\right)$, при $x \to 1$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{|x-1|^{-\beta}}\right)$, а при $x \to +\infty$ $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^{-(\alpha+\beta)}}\right)$, поэтому интеграл сходится, если $-\alpha < 1$; $-\beta < 1$; $-(\alpha+\beta) > 1$, т. е. $\alpha > -1$; $\beta > -1$; $\alpha + \beta < -1$.

193. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — взаимно простые многочлены степеней соответственно m и n.

Решение. Если в интервале $(0, +\infty)$ полином $P_n(x)$ имеет корни $x = x_i$, то интеграл расходится, так как в малой окрестности точки $x = x_i$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{(x-x_i)^{\lambda_i}}\right), \qquad \lambda_i \geqslant 1.$$

Если же полином $P_n(x)$ не имеет корней в интервале $(0, +\infty)$, то для сходимости интеграла достаточно потребовать выполнения условия $n - m > 1$, поскольку при $x \to +\infty$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right).$$

Итак, интеграл сходится, если полином $P_n(x)$ не имеет корней в интервале $(0, +\infty)$ и $n - m > 1$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

194. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$

Решение. Представим $I=I_1+I_2$, где

$$I_1=\int\limits_0^a\frac{\sin x}{x}\,dx,\quad I_2=\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

а $a>0$ — любое фиксированное число. Поскольку функция $y=\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на $(0, a]$ и ограничена, то интеграл I_1 существует. По признаку Дирихле I_2 сходится, следовательно, I — сходящийся интеграл. Мы показали в примере 182, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится. Так как $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$ при всех x, то по признаку сравнения I абсолютно расходится.

195. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx.$

Решение. При $x\to+\infty$ $\frac{\sqrt{x}}{x+100}\searrow 0$, следовательно, по признаку Дирихле интеграл сходится. Исследуем на сходимость интеграл $I_1=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}|\cos x|\,dx$. В силу того, что $|\cos x|\geqslant\cos^2 x=$ $=\frac{1+\cos 2x}{2}$ при всех x, то

$$I_1\geqslant I_2+I_3, \tag{1}$$

где

$$I_2=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}\,dx;\quad I_3=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\,dx.$$

При $x\to+\infty$ $\frac{\sqrt{x}}{x+100}=O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, поэтому I_2 расходится (к $+\infty$); I_3 сходится (по признаку Дирихле). В силу неравенства (1) I_1 расходится, следовательно, I абсолютно расходится.

196. $I=\int\limits_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,dx\qquad(q\neq 0).$

Р е ш е н и е. Произведем замену, полагая $x^q = t$:

$$I = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}.$$

Представим $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{a}\frac{\sin t\,dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}};\quad I_2 = \frac{1}{|q|}\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$$

и $a > 0$ — любое фиксированное число. Поскольку при $t \to +0$

$$\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} = O^*\left(\frac{1}{t^{-\frac{p+1}{q}}}\right),$$

то I_1 сходится при выполнении условия $\frac{p+1}{q} > -1$ (а при $\frac{p+1}{q} \leqslant -1$ — расходится). Исследуем I_2 на сходимость. Если $1 - \frac{p+1}{q} > 0$, то (по признаку Дирихле) I_2 сходится $\left(\text{а при } \frac{p+1}{q} \geqslant 1 \text{ расходится}\right)$. Таким образом, I сходится, если $-1 < \frac{p+1}{q} < 1$, т. е. $\left|\frac{p+1}{q}\right| < 1$. Исследуем теперь I на абсолютную сходимость $\left(\text{исследуем на сходимость интеграл } \bar{I} = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\sin t|\,dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\right)$. Представим $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$, где

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{|q|}\int\limits_0^{a}\frac{|\sin t|\,dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}},\quad \bar{I}_2 = \frac{1}{|q|}\int\limits_a^{+\infty}\frac{|\sin t|\,dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}.$$

Как показано выше, $\bar{I}_1$ сходится, если $\frac{p+1}{q} > -1$; при $t \in (a, +\infty)$ $\frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} \leqslant \frac{1}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$, поэтому $\bar{I}_2$ сходится, если $1 - \frac{p+1}{q} > 1$, т. е. если $\frac{p+1}{q} < 0$.

Итак, I сходится абсолютно, если $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$. Теперь можем указать область значений параметров p и q, при которых I сходится условно: $0 \leqslant \frac{p+1}{q} < 1$.

197. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\,dx.$

Решение. Положим $\sec x = t$; $\left(dx = \dfrac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}\right)$; тогда

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_1^a \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2-1}} = I_1 + I_2,$$

где $a > 1$ — любое фиксированное. При $t \to 1+0$ $\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}} = O^*\left[\dfrac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$, следовательно, I_1 сходится (абсолютно). При $t \in (a, +\infty)$ $\left|\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$, поэтому I_2 сходится абсолютно. Исследуемый интеграл сходится абсолютно.

198. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\, dx$.

Решение. Замена переменной $e^x = t$ приводит к интегралу

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t \cdot \cos t}{t} dt.$$

При $t \to +\infty$ $\dfrac{\ln^2 t}{t} \searrow 0$, следовательно, по признаку Дирихле интеграл сходится. Так как $|\cos t| \dfrac{\ln^2 t}{t} \geqslant \cos^2 t \dfrac{\ln^2 t}{t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\ln^2 t}{t} + \dfrac{1}{2} \cos 2t \cdot \dfrac{\ln^2 t}{t}$ при $t > 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t |\cos t|}{t} dt \geqslant \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \cos 2t \frac{\ln^2 t}{t} dt. \qquad (1)$$

Очевидно, $\dfrac{\ln^2 t}{t} > \dfrac{1}{t}$ при $t > e$, поэтому интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln^2 t}{t} dt$ расходится (к $+\infty$). Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \cos 2t \dfrac{\ln^2 t}{t} dt$ сходится. В силу неравенства (1) исследуемый интеграл абсолютно расходится.

199. $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$.

Решение. Представим $I = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int\limits_0^a \dfrac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$; $I_2 = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$; $a > 0$ — любое фиксированное; при $x \to +0$

$\frac{x^p \sin x}{1+x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^{-(p+1)}}\right)$, следовательно, при $p+1>-1$ интеграл I_1 сходится (абсолютно), а при $p+1\leqslant -1$ расходится. При $p<q$ $\frac{x^p}{1+x^q} \searrow 0$, когда $x \to +\infty$ и интеграл I_2 будет сходиться (неабсолютно). Таким образом, I сходится (неабсолютно), если $p>-2$, $q>p$.

При $x \in (a, +\infty)$ $\frac{|\sin x|\, x^p}{1+x^q} \leqslant \frac{x^p}{1+x^q} = O^*\left(\frac{1}{x^{q-p}}\right)$, когда $x \to +\infty$, следовательно, I_2 сходится абсолютно, если $q-p>1$, т. е. $q>p+1$ (а при $q\leqslant p+1$ абсолютно расходится). Мы нашли, что I сходится абсолютно при выполнении условий: $p>-2$; $q>p+1$. Теперь можно выделить множество значений параметров p и q, при которых I сходится условно: $p>-2$, $p<q\leqslant p+1$

200. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\, dx.$

Решение. Произведем замену $x+\frac{1}{x}=t$; так как x — двузначная функция t, то после замены I представится в виде суммы интегралов:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\, dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_2^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}-1\right)\sin t}{\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n}\, dt + \int\limits_2^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+1\right)\sin t}{\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^n}\, dt\right] =$$

$$= 2^{n-1}\left(\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^2-4}\,(t-\sqrt{t^2-4})^{n-1}} + \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{n-1}}\right) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \int\limits_2^a \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{1-n}},$$

$$I_2 = \frac{1}{2^{n-1}} \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{1-n}},$$

$$I_3 = 2^{n-1} \int\limits_2^a \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{n-1}}, \quad I_4 = 2^{n-1} \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{n-1}},$$

$a>2$ — любое фиксированное.

При $t \to 2+0$ $\frac{\sin t}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{\pm(n-1)}} = O^*\left[\frac{1}{(t-2)^{\frac{1}{2}}}\right]$, следовательно, I_1 и I_3 сходятся; при $t \to +\infty$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{1-n}} = O^*\left(\frac{1}{t^{2-n}}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{t^2-4}\,(t+\sqrt{t^2-4})^{n-1}} = O^*\left(\frac{1}{t^n}\right),$$

следовательно, I_2 сходится при $2-n>0$; I_4 сходится при $n>0$ (по признаку Дирихле). Таким образом, I сходится, если $0<n<2$. Очевидно, I абсолютно расходится (так как I_2 сходится абсолютно при $n<1$, а I_4 сходится абсолютно при $n>1$).

201. $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{P_m(x)\sin x}{P_n(x)}\,dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x)>0$, если $x \geqslant 0$.

Решение. Многочлен $P_n(x)$ не имеет корней в интервале $(a, +\infty)$, поэтому I может сходиться при выполнении некоторых условий. Поскольку при $x \to +\infty$ отношение $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$ и стремится к нулю монотонно при $n-m>0$, то I сходится (неабсолютно) при этом условии (по признаку Дирихле). Так как

$$\frac{|P_m(x)\sin x|}{P_n(x)} \leqslant \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)} = O^*\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$$

при $x \to +\infty$, то для абсолютной сходимости I, очевидно, достаточно потребовать выполнения условия: $n-m>1$, т. е. условия $n>m+1$. Теперь можем выделить область значений параметров, при которых интеграл сходится лишь условно: $m<n\leqslant m+1$.

202. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то обязательно ли $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$?

Решение. Не обязательно; например, интеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ сходится, а функция $y=\sin x^2$ не имеет предельного значения при $x\to+\infty$.

Рассмотрим также интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^{[x^2]}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}};$$

полученный ряд сходится (по признаку Лейбница), однако функция $y=(-1)^{[x^2]}$ не стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ может сходиться и в случае, когда $f(x)$ не ограничена при $x\to+\infty$. Например, в интеграле

$I = \int\limits_0^{+\infty} x \sin x^4 dx$ подынтегральная функция $y = x \sin x^4$ не ограничена на $(0, +\infty)$; полагая $x^2 = t$, получим $I = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \sin t^2 dt$. Этот интеграл, как известно, сходится.

203. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$, $|f'(x)| < C$ при $x_0 \leqslant x < +\infty$, и $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится. Доказать, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'(x) f(x)\, dx$. В силу сходимости интеграла $I_1 = \int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ имеем

$$\left| \frac{f^2(x)}{2} \Big|_{x_0}^{+\infty} \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'(x) f(x)\, dx \right| \leqslant C \int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

откуда следует, что функция $f^2(x)$ имеет конечное предельное значение при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x) = M \geqslant 0$. Если предположить, что $M \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = \sqrt{M} > 0$, откуда следует, что $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, A \geqslant x_0$ такое, что $|f(x)| > \sqrt{M} - \varepsilon$ при $x \geqslant A$. Но тогда, очевидно, $\int\limits_A^x |f(x)|\, dx > (\sqrt{M} - \varepsilon)(X - A)$ и $\lim\limits_{X \to +\infty} \int\limits_A^X |f(x)|\, dx = +\infty$, а это противоречит условию теоремы, что $I_1 < \infty$.

Теорема доказана.

204. Можно ли сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ где } x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \text{ и } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Решение. Нельзя: конечного предела интегральные суммы иметь не будут (результат будет зависеть от выбора точек ξ_i).

205. Пусть

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1}$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx? \tag{2}$$

Привести соответствующий пример. Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно.

Решение. Если интеграл (1) сходится неабсолютно, то интеграл (2) может расходиться; например, пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x) = \sin x$; $\varphi(x)$ — ограниченная функция, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ — расходится.

Может, конечно, случиться, что интеграл (2) будет сходящимся $\left(\text{например, } \varphi(x) = 2\cos x,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}\right)$.

Следовательно, интеграл (2) не обязательно сходится.

Пусть интеграл (1) сходится абсолютно, и $|\varphi(x)| \leqslant C$, $x \in (a, +\infty)$; для интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ выполнен критерий Коши: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A$ такое, что при любых $x' > A$, $x'' > A$ $\int_{x'}^{x''} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{C}$.

Оценим

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx =$$

$$= \int_{x'}^{x''} |f(x)| \cdot |\varphi(x)|\,dx \leqslant C \int_{x'}^{x''} |f(x)|\,dx < \varepsilon;$$

критерий Коши для интеграла (2) выполнен, поэтому он сходится.

206. Доказать, что если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и $f(x)$ — монотонная функция, то $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Доказательство. Из условия задачи следует, что $|f(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$ (в противном случае интеграл расходился бы, так как в силу монотонности $f(x)$, начиная хотя бы с некоторого x, $f(x)$ стала бы знакопостоянной и монотонно возрастающая функция $F(x) = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right|$ не была бы ограничена сверху). Таким образом,

$|f(x)|$ — монотонно убывающая функция. Так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, A$ такое, что при $x' > A$, $x'' > A$ $\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Фиксируем $x_0 > A$ и возьмем любое $x > x_0$. Получим

$$|f(x)|(x - x_0) < \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Неравенство (1) означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|\,x_0 = 0$). Последнее означает, что $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

207. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке $0 < x \leqslant 1$ и не ограничена в окрестности точки $x = 0$. Доказать, что если существует $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Доказательство. По условию существует $\lim\limits_{\mu\to+0} \int\limits_{\mu}^{1} f(x)\,dx$; положим, что $\mu = \frac{1}{n}$ (n — натуральное). Если $f(x)$ монотонно убывает на $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, то, поделив отрезок на n равных частей, получим

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n};$$

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

где $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$, соответственно, верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$. В силу известных свойств интеграла справедливы неравенства:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \leqslant \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n}. \tag{2}$$

Если же $f(x)$ монотонно возрастает на $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, то, очевидно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n} \leqslant \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n}. \tag{3}$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=0.$

В самом деле, если бы было не так, то это означало бы, что $f(x)=$ $=O^*\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right)$, $\alpha\geqslant 1$ при $x\to 0$ и интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ не мог бы сходиться. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенствах (2) или (3), получаем $\left(\text{принимая во внимание, что } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)}{n}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n}=0\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

208. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна в интервале $0<x<a$ и существует $I=\int\limits_0^a x^p f(x)\,dx$, то $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x)=0$.

Доказательство. Считаем, что функция $x^p f(x)$ имеет на отрезке $[0, a]$ одну особую точку $x=0$ (точка $x=x_0$ называется особой точкой функции $\varphi(x)$, если эта функция не ограничена ни в какой ее окрестности — односторонней или двухсторонней).

В силу монотонности функций $f(x)$ и $y=x^{p+1}$ возможны два случая:

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$ (и при этом, очевидно, $|f(x)|$ монотонно возрастает на $(0, a)$);

б) $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}=0$; $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\infty$ (и при этом, очевидно, $|f(x)|$ монотонно убывает на $(0, a)$).

Случай $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}\cdot f(x)=C$, $C\neq 0$ (где C — число, отличное от нуля или символ ∞) исключается, так как при этом имели бы $x^p f(x)=O^*\left(\dfrac{1}{x^{\lambda}}\right)$, $\lambda\geqslant 1$ при $x\to+0$, что противоречит условию сходимости интеграла I. В силу существования $I\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое, что при $0<x<\delta$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int_{0,5x}^{x} t^p f(t)\,dt\right|=\left|\int_{0,5x}^{x} t^{p+1}\frac{f(t)}{t}\,dt\right|=\mu\ln 2<\varepsilon,$$

где

$$\inf\{t^{p+1}|f(t)|\}\leqslant\mu\leqslant\sup\{t^{p+1}|f(t)|\},\quad t\in[0,5x;\ x]$$

(на основании критерия Коши и теоремы о среднем).

Поскольку

$$\mu\ln 2\geqslant\begin{cases} x^{p+1}|f(0,5x)|\ln 2, & \text{в случае а);}\\ (0,5x)^{p+1}|f(x)|\ln 2, & \text{в случае б),}\end{cases}$$

то

$$(0{,}5x)^{p+1}\,|f(0{,}5x)| < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}\ln 2}, \text{ в случае а);}$$

$$x^{p+1}\,|f(x)| < \frac{\varepsilon\cdot 2^{p+1}}{\ln 2}, \text{ в случае б).}$$

Из последних неравенств следует, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0$.

Определение. *Если функция $f(x)$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы*

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \text{ и } \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (a < c < b),$$

то под главным значением в смысле Коши (v. p.) *понимается число*

$$\text{v. p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Аналогично

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

209. Показать, что

а) $\text{v. p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = 0$; б) $\text{v. p.}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2} = 0$; в) $\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = 0$.

Решение. а) По определению

$$\text{v. p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$$

$$\text{б) v. p.}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{A}\frac{dx}{1-x^2}\right] + \int\limits_{A}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{0}^{1-\varepsilon} + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{A}\right] +$$

$$+ \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{A}^{B} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\left[\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} + \ln\left|\frac{1+A}{1-A}\right| - \ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right] + \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+B}{1-B}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+A}{1-A}\right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\ln\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} + \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+B}{1-B}\right| = 0$$

(A — произвольное положительное число, большее $1+\varepsilon$).

в) $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \sin x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} [\cos(-A) - \cos A] = 0.$

210. Доказать, что при $x > 0$ существует $\operatorname{li} x = \text{v. p.} \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}$.

Доказательство. При $0 \leqslant x \leqslant \alpha < 1$ интеграл существует; при $1 < x \leqslant 2$

$$\operatorname{li} x = \text{v. p.} \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\ln\xi} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{d\xi}{\ln\xi} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{x} \frac{d\xi}{\ln\xi}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|\xi - 1|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \frac{\xi}{2}\Big|_0^{1-\varepsilon} + O^*[(\xi-1)^2]\Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln(\xi-1)\Big|_{1+\varepsilon}^{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi}{2}\Big|_{1+\varepsilon}^{x} + O^*[(\xi-1)^2]\Big|_{1+\varepsilon}^{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2} + \right.$$

$$\left. + \ln(x-1) - \ln\varepsilon + \frac{x}{2} - \frac{1+\varepsilon}{2} + O^*(\varepsilon^2) + O^*[(x-1)^2]\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln(x-1) + \frac{x}{2} + O^*[(x-1)^2] - \varepsilon + O^*(\varepsilon^2)\right] =$$

$$= \ln(x-1) + \frac{x}{2} + O^*[(x-1)^2]$$

(см. пример 174).

Если $x > 2$, то

$$\operatorname{li} x = \text{v. p.} \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\ln\xi} = \text{v. p.} \int\limits_0^2 \frac{d\xi}{\ln\xi} + \int\limits_2^x \frac{d\xi}{\ln\xi} = 1 + \int\limits_2^x \frac{d\xi}{\ln\xi} + O(1).$$

Найти следующие интегралы:

211. $\text{v. p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Знаменатель обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = 2$; пусть $A > 2$ — любое фиксированное. По определению

$$\text{v. p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2-\mu} + \right.$$

$$\left. + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{2+\mu}^{A}\right] + \lim_{B\to+\infty} \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_A^B =$$

$$= -\ln 2 + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}}\left[\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \ln\frac{1+\mu}{1-\mu}\right] + \lim_{B\to+\infty} \ln\left|\frac{B-2}{B-1}\right| = \ln\frac{1}{2}.$$

212. v. p. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

Решение. По определению

$$\text{v. p.} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln |\ln x| \Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} + \ln (\ln x) \Big|_{1+\varepsilon}^{2} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \left| \frac{\ln (1-\varepsilon)}{\ln (1+\varepsilon)} \right| = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \left| \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} \right| = 0.$$

213. v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$.

Решение. По определению

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\operatorname{arctg} x \Big|_{-A}^{A} + \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \Big|_{-A}^{A} \right] =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} (-A) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+A^2}{1+A^2} \right] = \lim_{A \to +\infty} 2 \operatorname{arctg} A = \pi.$$

214. v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Из определения v. p. следует, что

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx = \lim_{A \to +\infty} \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \right] \Big|_{-A}^{A} = 0.$$

§ 5. Вычисление площадей

1°. Площадь в прямоугольных координатах. Площадь S плоской фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 130), ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(y_2(x) \geqslant y_1(x))$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна

$$S = \int\limits_{a}^{b} [y_2(x) - y_1(x)] \, dx.$$

2°. Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $[0 \leqslant t \leqslant T]$ — параметрические уравнения кусочно-гладкой простой замкнутой кривой C, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя площадь S (рис. 131), то

$$S = -\int\limits_{0}^{T} y(t) \, x'(t) \, dt = \int\limits_{0}^{T} x(t) \, y'(t) \, dt$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^T [x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)]\,dt.$$

3°. Площадь в полярных координатах. Площадь S плоской фигуры OAB (рис. 132), ограниченной непрерывной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

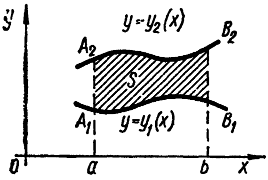

Рис. 130

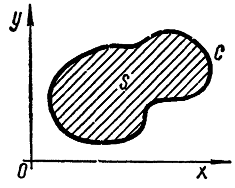

Рис. 131

215. Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна $S = \frac{2}{3}bh$, где b — основание и h — высота сегмента (рис. 133).

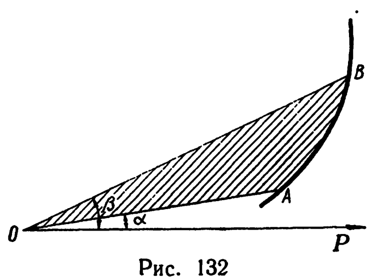

Рис. 132

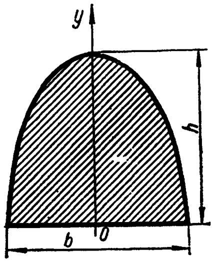

Рис. 133

Решение. Запишем уравнение параболы в виде $y = ax^2 + c$ и найдем a и c из условий: $y(0) = h$, $y = 0$ при $x = \pm\frac{b}{2}$; $\left(c = h,\ a = -\frac{4h}{b^2}\right)$. По формуле для вычисления площади

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{b}{2}} \left(-\frac{4h}{b}x^2 + h\right)dx = 2\left(hx - \frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{2}} = bh - \frac{bh}{3} = \frac{2}{3}bh.$$

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах (все параметры считаются положительными):

216. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

Решение. По формуле п. 1° имеем $S=\int\limits_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx=$
$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^2}{3}$.

217. $y=x^2,\ x+y=2$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $x+y=2$. Решая уравнение $x^2+x-2=0$, находим $x_1=$ $=-2$; $x_2=1$. По известной нам формуле находим $S=\int\limits_{-2}^{1}(2-$ $-x-x^2)\,dx=\frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_1^{-2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1}=8-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=4{,}5.$

218. $x+y=0,\ y=2x-x^2$.

Решение. Парабола и прямая пересекаются в точках с абсциссами $x_1=0$, $x_2=3$, следовательно, $S=\int\limits_0^3(2x-x^2+x)\,dx=$ $=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{6}=4{,}5.$

219. $y=|\lg x|;\quad y=0;\quad x=0{,}1;\quad x=10.$

Решение. Так как $\lg x\leqslant 0;\ \ x\in[0{,}1;\ 1];\ \ \lg x\geqslant 0,\ x\in[1,\ 10]$, то $S=\int\limits_{0,1}^{10}|\lg x|\,dx=\int\limits_{1}^{0,1}\lg x dx+\int\limits_{1}^{10}\lg x dx=\lg e\,[(x\ln x-x)\Bigg|_1^{0,1}+(x\ln x-$ $-x)\Bigg|_1^{10}]=(x\lg x-x\lg e)\Bigg|_1^{0,1}+(x\lg x-x\lg e)\Bigg|_1^{10}=9{,}9-8{,}1\lg e.$

220. $y=2^x;\quad y=2;\quad x=0.$

Решение. Прямая $y=2$ пересекается с кривой $y=2^x$ в точке $A\ (1,\ 2)$. Искомая площадь равна $S=\int\limits_0^1(2-2^x)\,dx=\left(2x-\right.$ $\left.-\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^1=2-\frac{1}{\ln 2}.$

221. $y=(x+1)^2;\quad x=\sin\pi y;\quad y=0\ (0\leqslant y\leqslant 1).$

Решение. В качестве переменной интегрирования удобнее выбрать y; требуется вычислить площадь, ограниченную кривыми $x=$ $=\sin\pi y,\ x=-1+\sqrt{y}$ и прямой $y=0$.

Таким образом, $S=\int\limits_0^1[\sin\pi y-(-1+\sqrt{y})]\,dy=\frac{\cos\pi y}{\pi}\Bigg|_1^0+\left(y-\right.$ $\left.-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi}+1-\frac{2}{3}=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}.$

222. $y=x;\quad y=x+\sin^2 x\qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$

Решение. $S=\int\limits_0^{\pi}(x+\sin^2 x-x)\,dx=\frac{\pi}{2}.$

223. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2};\quad y=0.$

Решение. $y \to 0$ при $x \to \infty$; фигура не квадрируема в обычном понимании. В силу четности функции $y(x)$ имеем $S_A = \int_{-A}^{A} y(x)\,dx = 2\int_0^A y(x)\,dx$.

Рассмотрим $S_A = 2a^3 \int_0^A \frac{dx}{a^2+x^2} = 2a^2 \operatorname{arctg}\frac{A}{a}$ и положим по определению $S = \lim_{A\to+\infty} S_A = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$.

224. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Обозначим площадь эллипса через S; тогда

$$\frac{S}{4} = b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}ab,$$

откуда $S = \pi ab$ (в интеграле произвели замену $\frac{x}{a} = \sin t$).

225. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

Решение. Выражение $x^2(a^2-x^2)$ неотрицательно при $|x| \leqslant a$, а кривая $y^2 = x^2(a^2-x^2)$ замкнута ($y = \pm |x| \sqrt{a^2-x^2}$). В силу симметрии точек кривой относительно координатных осей имеем $S = 4\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,dt = \frac{4}{3}a^2\cos^3 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{4}{3}a^2$ (замена в интеграле $x = a\sin t$).

226. $y^2 = 2px$; $27py^2 = 8(x-p)^3$.

Решение. Функция $y^2 = 2px$ определена при $x \geqslant 0$, а функция $27py^2 = 8(x-p)^3$ — при $x \geqslant p$. Найдем абсциссу точек пересечения кривых; из второго уравнения находим $y^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2(x-p)}{3}\right]^3$ и, подставив в первое уравнение, получим $\left[\frac{2(x-p)}{3}\right]^3 = 2p^2x$. Обозначим $z = \frac{2(x-p)}{3}$. Приходим к кубическому уравнению $z^3 = 3p^2z + 2p^3$ или $z(z-p)(z+p) = 2p^2(z+p)$. Корень $z = -p$ не подходит, поскольку $x = -\frac{p}{2}$ (отрицательно). Решая уравнение $z^2 - pz - 2p^2 = 0$, находим его корни $z_1 = 2p$ и $z_2 = -p$ (z_2 не подходит). Переходя от z к x, находим абсциссу точек пересечения кривых: $x = 4p$. Функция $y = \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}$ определена при $x \geqslant p$; при $p < x < 4p$ $\sqrt{2px} > \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}$. Принимая во внимание симметрию фигуры относительно оси Ox, найдем $S = 2\left[\int_0^p \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx + \right.$

$$\left. + \int_p^{4p}\left[\sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}\right]dx\right] = 2\left\{\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^p + \left[\sqrt{2p}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27p}}\,\frac{2}{5}(x-p)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_p^{4p}\right\} = 2\left(\frac{8}{3}2^{\frac{3}{2}}p^2 - \frac{3}{5}2^{\frac{5}{2}}p^2\right) =$$

$$= 2p^2 2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{5}\right) = \frac{88p^2\sqrt{2}}{15}.$$

227. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \qquad (A > 0,\ AC - B^2 > 0)$.

Решение. Решая относительно x уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0$, находим

$$x = \frac{-By \pm \sqrt{A-(AC-B^2)y^2}}{A}.$$

Функция $x = x(y)$ принимает вещественные значения при $A - (AC - B^2)y^2 \geqslant 0$, откуда $|y| \leqslant \sqrt{\frac{A}{AC-B^2}} = b$. Площадь вычислим по формуле $S = \int_{-b}^{b}[x_1(y) - x_2(y)]\,dy$, где $x_1 = \frac{-By+\sqrt{A-(AC-B^2)y^2}}{A}$; $x_2 = \frac{-By-\sqrt{A-(AC-B^2)y^2}}{A}$. Очевидно,

$$S = \frac{2}{A}\int_{-b}^{b}\sqrt{A-(AC-B^2)y^2}\,dy = \frac{2\sqrt{AC-B^2}}{A}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy =$$

$$= \frac{4}{A}\sqrt{AC-B^2}\,b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi b^2}{A}\sqrt{AC-B^2} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

Примечание. Методами аналитической геометрии уравнение кривой может быть приведено к каноническому виду — уравнению эллипса с полуосями $\frac{1}{\sqrt{A}}$ и $\sqrt{\frac{A}{AC-B^2}}$; площадь такого эллипса, как показано в примере 284, равна

$$S = \pi\frac{1}{\sqrt{A}}\cdot\sqrt{\frac{A}{AC-B^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

228. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (циссоида); $x = 2a$.

Решение. Кривая симметрична относительно оси Ox; функция $y(x)$ имеет особенность в точке $x = 2a$ (она не ограничена в любой левосторонней окрестности этой точки), поэтому площадь фигуры выражается с помощью несобственного интеграла второго рода: $S = 2\int_0^{2a}\frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{(2a-x)^{\frac{1}{2}}}$. Замена $x = 2a\sin^2 t$ приводит нас к обычному интегралу Римана: $S = 16a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = 16a^2 \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$.

229. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $y = 0$ (трактриса).

Решение. Очевидно, $0 < y \leqslant a$; при возрастании x (от 0 до $+\infty$) y убывает. Дифференцируя, получаем $dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy$. Принимая во внимание, что положительному приращению x соответствует отрицательное приращение y, находим $S = \int\limits_0^{+\infty} y dx =$

$$= -\int\limits_a^0 \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} y dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

230. $y^2 = \frac{x^n}{(1 + x^{n+2})^2}$ $\quad (x > 0;\ n > -2)$.

Решение. Кривая симметрична относительно оси Ox, при $x \to +\infty$ $|y| \searrow 0$. Площадь фигуры выразится несобственным интегралом: $S = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{1 + x^{n+2}} = \frac{4}{n+2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{1 + \left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2} = \frac{4}{n+2} \operatorname{arctg} x^{\frac{n+2}{2}} \Big|_0^{+\infty} =$

$$= \frac{4}{n+2} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{n+2}.$$

231. $y = e^{-x} |\sin x|$, $y = 0 \ (x \geqslant 0)$.

Решение. $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx$; полагая в каждом интеграле $x - k\pi = t$, найдем $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \int\limits_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \times$

$$\times \frac{e^{-t} (\sin t + \cos t)}{2} \Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \frac{1}{1 - e^{-\pi}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2}.$$

232. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

Решение. Обозначим площадь круга S_1, а площадь фигуры, состоящей из параболического и кругового сегментов,— S_2 (рис. 134). Очевидно, $S_1 = 8\pi$. Найдем абсциссу точек пересечения параболы с окружностью; для этого решим уравнение $x^2 + 2x + 1 = 9$, которое имеет один корень $x = 2$. Теперь легко вычислить S_2:

$$S_2 = 2\left[2\pi - \int_0^2 (\sqrt{8 - x^2} - \sqrt{2x})\,dx\right] = 2\left[2\pi - \int_0^2 \sqrt{8 - x^2}\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\right] = 2\left[2\pi + \frac{8}{3} - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\,dt\right] =$$

$$= 2\left(\pi + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(3\pi + 2);$$

$$(S_1 - S_2) : S_2 = \left(8\pi - 2\pi - \frac{4}{3}\right) : S_2 = (9\pi - 2) : (3\pi + 2).$$

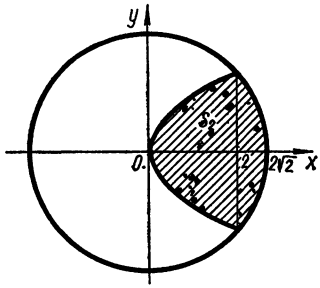

Рис. 134

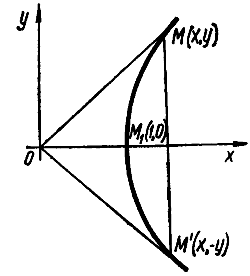

Рис. 135

233. Выразить координаты точки $M(x, y)$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как функции площади гиперболического сектора $S = OM'M$, ограниченного дугой гиперболы $M'M$ и двумя лучами OM и OM', где $M'(x, -y)$ — точка, симметричная M относительно оси Ox (рис. 135).

Решение. Обозначим точку (1, 0) через M_1, площадь треугольника $M'OM$ через S_Δ, а площадь параболического сегмента $M'M_1M$ — через S_1. Очевидно, $S_\Delta = xy$:

$$S_1 = 2\int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\,dt = [t\sqrt{t^2 - 1} - \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})]\Big|_1^x =$$

$$= x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$S = S_\Delta - S_1 = xy - x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

(так как $y = \sqrt{x^2 - 1}$). Таким образом, $S = \operatorname{Arch} x$, откуда $x = \operatorname{ch} S$, $y = \sqrt{\operatorname{ch}^2 S - 1} = \operatorname{sh} S$.

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

234. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (циклоида) и $y = 0$.

Решение. С возрастанием параметра t возрастает и x, поэтому

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\,a(1 - \cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt =$$

$$= 4a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\, dt = 8a^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^4 z dz = 16a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 z dz =$$

$$= \frac{16a^2 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2.$$

235. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Решение. Кривая сама себя пересекает в начале координат ($x = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$, $y = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$). Для вычисления площади петли воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 [x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t)]\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3} t^3 \right) \Bigg|_0^2 = 4 \left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{5} \right) = \frac{8}{15}.$$

236. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) — развертка круга и $x = a$; $y \leqslant 0$.

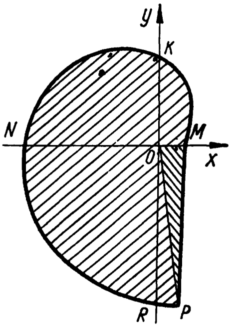

Рис. 136

Решение. Рассмотрим плоскую фигуру $MKNRP$, ограниченную разверткой круга и прямой $x = a$, $y \leqslant 0$ (рис. 136). Искомую площадь можно представить в виде суммы площадей фигуры $MKNRPOM$ и треугольника MOP. Очевидно, $S_{\Delta MOP} = \pi a^2$ (т. к. $OM = a$, $|MP| = 2\pi a$).

Перейдем к полярным координатам: $\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2(1 + t^2)$;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin t - t \cos t}{\cos t + t \sin t};$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin t - t \cos t}{\cos t + t \sin t} \right), & \text{если } (x, y) \in \smile KM, \smile RP; \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin t - t \cos t}{\cos t + t \sin t} \right) + \pi \operatorname{sgn} y, & \text{если } (x, y) \in \smile KN, \smile NR; \\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Во всех случаях $d\varphi = \dfrac{t^2 dt}{1 + t^2}$; таким образом,

$$S_{MKNRPOM} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1 + t^2)\, t^2}{1 + t^2}\, dt = \frac{4}{3} a^2 \pi^3;$$

$$S_{MKNRP} = S_{MKNRPOM} + S_{\Delta MOP} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3 + \pi a^2 = \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi).$$

237. $x = a(2\cos t - \cos 2t); \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

Решение. Фигура ограничена замкнутой кривой ($x(0) = x(2\pi)$; $y(0) = y(2\pi)$), следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)]\,dt = a^2\int_0^{2\pi} (3 - 3\cos t)\,dt = 6\pi a^2.$$

238. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, \ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t \quad (c^2 = a^2 - b^2)$ (эволюта эллипса).

Решение. Применяя одну из формул п.2°, получим

$$S = \int_0^{2\pi} x\,dy = \frac{3c^4}{ab}\int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^2 t\,dt = \frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t - \cos^6 t)\,dt =$$

$$= \frac{12c^4}{ab}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

239. $x = a\cos t, \ y = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Решение. При изменении t от 0 до π x убывает от a до $-a$, $y = L_1(t)$ принимает неотрицательные значения $\left(\text{возрастая от 0 до } \frac{a}{3}\right.$ при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем убывая от $\frac{a}{3}$ до 0 при изменении t от $\left.\frac{\pi}{2} \text{ до } \pi\right)$. При изменении t от π до 2π x возрастает от $-a$ до a; значения $y = L_2(t)$ в интервале $(\pi, 2\pi)$ больше значений $y = L_1(t)$ в интервале $(0, \pi)$ (поскольку $\sin t < 0$, $t \in (\pi, 2\pi)$). Уравнения $x = a\cos t$; $y = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$ описывают замкнутую кривую с точками возврата $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. Таким образом, $S = \int_0^{2\pi} y\,dx$ (при изменении t от 0 до π по этой формуле получим площадь, ограниченную кривой $L_1(t)$ и отрезком оси Ox $[-a, a]$ со знаком «—», а при изменении t от π до 2π получим площадь, ограниченную кривой $L_2(t)$ и отрезком оси Ox $[-a, a]$; алгебраическая сумма полученных результатов и дает искомую площадь).

Получаем $S = \int_0^{2\pi} \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}(-a\sin t)\,dt = -a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3 t}{2+\sin t}\,dt =$

$$= -a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t - 2\sin t + 4 - \frac{8}{2+\sin t}\right)dt = 8a^2\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t} - 9\pi a^2 =$$

$$= 8a^2\left[\int_0^{\pi}\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] - 9\pi a^2 =$$

$$= \frac{16a^2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi} + \operatorname{arctg}\frac{2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\pi}^{2\pi}\right] - 9\pi a^2 =$$

$$= \frac{16a^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) - 9\pi a^2 = \frac{16\pi a^2}{\sqrt{3}} - 9\pi a^2 =$$

$$= \pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9\right).$$

Найти площади S плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

240. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската).

Решение. Кривая замкнута, симметрична относительно прямых $\rho\cos\varphi = 0$ и $\rho\sin\varphi = 0$, поэтому $\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\times$ $\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}$; $S = a^2$.

241. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида).

Решение. Кривая симметрична относительно прямой $\rho\sin\varphi = 0$, поэтому $S = \int\limits_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$ $= a^2\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}$.

242. $\rho = a\sin 3\varphi$ (трилистник).

Решение. Вычислим третью часть площади трехлепестковой розы: $\frac{S}{3} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a^2\sin^2 3\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi a^2}{12}$; таким образом, $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

243. $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ (парабола); $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Решение. С помощью формулы п.3° находим $S = \frac{p^2}{2}\times$ $\times\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{p^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \right.$ $\left.+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{p^2}{4}\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{3}[(\sqrt{2}+1)^3-1]\right\} = \frac{p^2}{12}(8\sqrt{2}+6) =$ $= \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3)$.

244. $\rho = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ (эллипс).

Решение. Применяя формулу п.3°, получим

$$S=\frac{p^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=p^2\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=2p^2\int_0^{\pi}\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{\left[(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]^2}=$$

$$=\frac{2p^2}{(1+\varepsilon)^2}\int_0^{\pi}\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{\left[1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{2p^2}{(1+\varepsilon)^2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)\,dt}{\left[1+\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,t\right)^2\right]^2}=\frac{2p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{(1+\varepsilon)z^2+(1-\varepsilon)}{(1+z^2)^2}\,dz=$$

$$=\frac{2p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}z\Big|_0^{+\infty}+\frac{2p^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{z^2-1}{(1+z^2)^2}\,dz=$$

$$=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{p^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{4p^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{dz}{(1+z^2)^2}=$$

$$=\frac{p^2(1+\varepsilon)\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{4p^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z\right)\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{\pi p^2(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\pi p^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

245. $\rho=3+2\cos\varphi$.

Решение. Используя симметрию фигуры относительно прямой $\rho\sin\varphi=0$, находим $S=\int_0^{\pi}(3+2\cos\varphi)^2\,d\varphi=\int_0^{\pi}(9+12\cos\varphi+4\cos^2\varphi)\,d\varphi=9\pi+2\pi=11\pi$.

246. $\rho=\dfrac{1}{\varphi}$; $\rho=\dfrac{1}{\sin\varphi}$ $\left(0<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Поскольку $\sin\varphi<\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$, то $\dfrac{1}{\sin\varphi}>\dfrac{1}{\varphi}$ $\left(\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, поэтому $S=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sin^2\varphi}-\dfrac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\times$

$$\times\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\operatorname{ctg}\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\times$$

$$\times\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varepsilon\cos\varepsilon-\sin\varepsilon}{\varepsilon\sin\varepsilon}\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{2}-\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{6}+O^*(\varepsilon^5)}{\varepsilon^2+O^*(\varepsilon^4)}=\frac{1}{\pi}.$$

247. $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $\left(M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S\right)$.

Решение. Из условия задачи следует, что (рис. 137) $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{8}$; $S_2 = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sin\varphi + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1 + \sin 2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{-\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$; $S = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(\pi - 1)$.

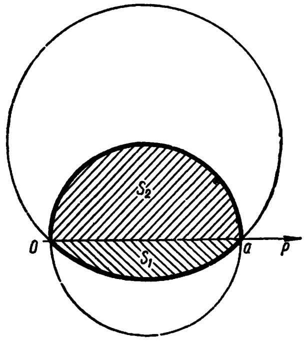

Рис. 137

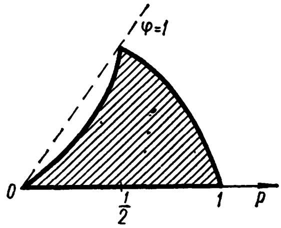

Рис. 138

248. Найти площадь сектора, ограниченного кривой $\varphi = \rho\,\mathrm{arctg}\,\rho$ и двумя лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Решение. При $\varphi = 0$ $\rho = 0$, а при $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ $\rho = \sqrt{3}$. В интеграле $S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$ произведем замену переменной:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2\varphi'(\rho)\,d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho^2\left(\mathrm{arctg}\,\rho + \frac{\rho}{1+\rho^2}\right)d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\,\mathrm{arctg}\,\rho + \frac{\rho^2}{3} - \frac{1}{3}\ln(1+\rho^2)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{3}\ln 2\right).$$

249. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho^2 + \varphi^2 = 1$.

Решение. Из условия $\rho^2 = 1 - \varphi^2$ заключаем, что $|\varphi| \leqslant 1$. Искомая площадь S равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1 - \varphi^2)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

250. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лепестком кривой $\varphi = \sin \pi\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Решение. При возрастании ρ от 0 до $\frac{1}{2}$ φ возрастает от 0 до 1; при возрастании ρ от $\frac{1}{2}$ до 1 φ убывает от 1 до 0 (рис. 138), поэтому величина интеграла $\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho^2\varphi'(\rho)\,d\rho$ дает искомую площадь, взятую со знаком «—». В силу вышесказанного $S = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \rho^2 \cos\pi\rho d\rho = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2\sin\pi\rho}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \rho\sin\pi\rho d\rho\right] =$
$= \int\limits_0^1 \rho\sin\pi\rho d\rho = \rho\frac{\cos\pi\rho}{\pi}\Big|_1^0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \cos\pi\rho d\rho = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi\rho\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.$

251. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $\varphi = 4\rho - \rho^3$; $\varphi = 0$.

Решение. Проведя рассуждения, аналогичные задаче 250, приходим к выводу, что $S = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \rho^2(4 - 3\rho^2)\,d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (3\rho^4 -$
$- 4\rho^2)\,d\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\rho^5 - \frac{4}{3}\rho^3\right)\Big|_0^2 = \frac{2^6}{15} = 4\frac{4}{15}.$

252. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $\varphi = \rho - \sin\rho$; $\varphi = \pi$.

Решение. Поскольку $0 \leqslant \rho \leqslant \pi$, то $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \rho^2(1 - \cos\rho)\,d\rho =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \rho^2\cos\rho d\rho\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3} + 2\pi\right) = \pi\left(1 + \frac{\pi^2}{6}\right).$

253. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной замкнутой кривой $\rho = \frac{2at}{1+t^2}$; $\varphi = \frac{\pi t}{1+t}$.

Решение. Так как всегда $\rho \geqslant 0$, то $t \geqslant 0$; $\rho = 0$ при $t = 0$ и $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$, поэтому

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{4a^2\pi t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2} = 2\pi a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2}.$$

Интегрируя (по методу Остроградского), находим

$$S = 2\pi a^2\left[-\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t\right]\Bigg|_0^{+\infty} =$$
$$= 2\pi a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \pi a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Перейдя к полярным координатам, найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми:

254. $x^3+y^3=3axy$ (лист Декарта).

Решение. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим уравнение Декартова листа в виде $\rho=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; таким образом,

$$S=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{tg}^3\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}=\frac{3a^2}{2}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{3}{2}a^2.$$

255. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

Решение. В полярной системе координат уравнение кривой, ограничивающей плоскую фигуру, имеет вид: $\rho^2=\frac{a^2}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}$; принимая во внимание симметрию фигуры, найдем

$$S=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\,d(\operatorname{tg}\varphi)}{1+\operatorname{tg}^4\varphi}=$$

$$=2a^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{(1+z^2)\,dz}{1+z^4}=\sqrt{2}\,a^2\operatorname{arctg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\pi\sqrt{2}\,a^2.$$

256. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (лемниската).

Решение. Полагая $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$, получим уравнение лемнискаты в виде $\rho^2=2a^2\sin\varphi\cos\varphi$ или $\rho^2=a^2\sin 2\varphi$. Учитывая симметрию точек лемнискаты относительно прямой $\rho\sin\varphi=$ $=\rho\cos\varphi$ и относительно начала координат, получаем $S=2a^2\times$ $\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi d\varphi=a^2\cos 2\varphi\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{0}=a^2.$

Приведя уравнения к параметрическому виду, найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми:

257. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

Решение. Полагаем $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. Принимая во внимание симметрию точек астроиды относительно осей координат и используя формулу $S=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}(xy'-yx')\,dt$, найдем $S=$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 3a^2 \cos^2 t \sin^4 t)\, dt = 6a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

258. $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

Решение. Положим $y = tx$; тогда $x = \frac{at}{1+t^4}$, $y = \frac{at^2}{1+t^4}$ $(y \geqslant 0)$. Плоская фигура ограничена двумя симметричными относительно оси Oy петлями; x и y обращаются в нуль одновременно при $t = 0$ и стремятся к нулю при $t \to \infty$. Искомая площадь равна удвоенной площади фигуры, ограниченной одной из упомянутых петель: $S = \int\limits_0^{+\infty} (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\, dt = a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^4)^2}$. Вычислим

$$I = \int \frac{t^2 dt}{(1+t^4)^2} = \int \frac{(t^2+t^6)-t^6}{(1+t^4)^2}\, dt = \int \frac{t^2 dt}{1+t^4} - \int \frac{t^6 dt}{(1+t^4)^2},$$ при

$t > 0$. Полагая $\frac{t^3 dt}{(1+t^4)^2} = dv \left(v = -\frac{1}{4(1+t^4)}\right)$; $u = t^3\, (du = 3t^2 dt)$, получим

$$I = \int \frac{t^2 dt}{1+t^4} + \frac{t^3}{4(1+t^4)} - \frac{3}{4}\int \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \frac{t^3}{4(1+t^4)} + \frac{1}{4}\int \frac{t^2 dt}{1+t^4} =$$

$$= \frac{t^3}{4(1+t^4)} + \frac{1}{8}\left(\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\, dt + \int \frac{t^2-1}{t^4+1}\, dt\right) =$$

$$= \frac{t^3}{4(1+t^4)} + \frac{1}{8}\left(\int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} + \int \frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}\right) =$$

$$= \frac{t^3}{4(1+t^4)} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2 - t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} \right| + C.$$

$$S = a^2 \left(\frac{t^3}{4(1+t^4)} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2 - t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} \right| \right) \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}.$$

Примечание. Подстановка $t^4 = z$ приводит к B — функции Эйлера:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^4)^2} = \frac{1}{4} \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{-\frac{1}{4}} dz}{(1+z)^2} = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{16} = \frac{\pi}{16 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

§ 6. Вычисление длин дуг

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ равна

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, где $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, то длина дуги кривой L равна

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

3°. Длина дуги в полярных координатах. Если $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, где $\rho(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Найти длины дуг следующих кривых:

259. $y = x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

Решение. По формуле п.1° имеем

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

260. $y^2 = 2px$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$.

Решение. $y(x)$ — двузначная функция (кривая симметрична относительно оси Ox), поэтому

$$L = 2\int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{(\sqrt{2x})^2 + p}}{\sqrt{2x}}\, dx = 2\int_0^{x_0} \sqrt{(\sqrt{2x})^2 + p}\, d(\sqrt{2x}) =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2x_0}} \sqrt{t^2 + p}\, dt = [t\sqrt{t^2 + p} + p\ln(t + \sqrt{t^2 + p})]\Big|_0^{\sqrt{2x_0}} =$$

$$= \sqrt{2x_0}\sqrt{2x_0 + p} + p\ln\frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{2x_0 + p}}{\sqrt{p}} =$$

$$= 2\sqrt{x_0\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)} + p\ln\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}.$$

261. $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(b, h)$.

Решение. Применяя формулу п.1°, получим

$$L=\int\limits_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\int\limits_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b=a\operatorname{sh}\frac{b}{a}=$$

$$=a\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}=a\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}=\sqrt{h^2-a^2}.$$

262. $y=e^x\ (0\leqslant x\leqslant x_0)$.

Решение. Воспользуемся формулой п.1°:

$$L=\int\limits_0^{x_0}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\int\limits_0^{x_0}\sqrt{1+e^{-2x}}\,d(e^x)=\int\limits_1^{e^{x_0}}\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\,dz;$$

интегрируем по частям, полагая $dz=dv$; $u=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}$; $v=z$,

$du=-\frac{dz}{z^2\sqrt{1+z^2}}$; имеем $L=\sqrt{1+z^2}\Big|_1^{e^{x_0}}+\int\limits_1^{e^{x_0}}\frac{dz}{z^2\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}}=$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\int\limits_{e^{x_0}}^1\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}}=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{1}{z}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}\right)\Big|_{e^{x_0}}^1=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{e^{-x_0}+\sqrt{e^{-2x_0}+1}}=$$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+x_0-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}.$$

263. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\ (1\leqslant y\leqslant e)$.

Решение. В качестве переменной интегрирования возьмем y; формула для вычисления длины дуги L приобретает вид:

$$L=\int\limits_{y_0}^{y_1}\sqrt{1+x'(y)}\,dy. \qquad (1)$$

В нашем случае

$$L=\int\limits_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2}\,dy=\int\limits_1^e\sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_1^e\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=\frac{1}{2}\left(\ln y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{1}{4}(1+e^2).$$

Примеры 264—267 решаются с помощью формулы п.1° и формулы (1) примера 263.

264. $y = a\ln\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ $\qquad (0 \leqslant x \leqslant b < a)$.

Решение. $L = \int\limits_0^b \sqrt{1 + \frac{4a^2x^2}{(a^2 - x^2)^2}}\,dx = \int\limits_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\,dx = 2a^2 \times$

$\times \int\limits_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2} - \int\limits_0^b dx = a\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|\Bigg|_0^b - b = a\ln\frac{a + b}{a - b} - b.$

265. $y = \ln\cos x$ $\qquad \left(0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $L = \int\limits_0^a \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}\,dx = \int\limits_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^a =$

$= \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$

266. $x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ $\qquad (0 < b \leqslant y \leqslant a)$.

Решение. $L = \int\limits_b^a \sqrt{1 + x'(y)^2}\,dy = a\int\limits_b^a \frac{dy}{y} = a\ln y\Big|_b^a = a\ln\frac{a}{b}.$

267. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ $\qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}a\right)$.

Решение. Кривая состоит из двух симметричных (относительно оси Ox) ветвей, поэтому

$$L = 2\int\limits_0^{\frac{5}{3}a} \sqrt{1 + \frac{x(3a - x)^2}{(2a - x)^3}}\,dx.$$

Заменим переменную, полагая $t^2(2a - x) = 8a - 3x$ $(2 \leqslant t \leqslant 3)$. После несложных преобразований получаем $L = 4a\int\limits_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 - 3} =$ $= 4a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}}\Bigg|_2^3\right) = 4a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}\right) = 4a\left(1 + \right.$ $\left.+ \sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right)$.

268. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

Решение. Запишем параметрические уравнения астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Принимая во внимание симметрию кривой относительно осей координат, получаем $L =$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 12a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = 12a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

269. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad c^2 = a^2 - b^2$ (эволюта эллипса).

Решение. Применим формулу п.2°: $x'(t) = -\frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = \frac{3c^2}{b}\sin^2 t\cos t$, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9c^4\sin^2 t\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}\right) = \frac{9c^4\sin^2 t\cos^2 t}{2a^2b^2}(a^2 + b^2 - c^2\cos 2t)$;

$$L = \frac{3c^2}{\sqrt{2}\,ab}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2\cos 2t}\,|\sin t\cos t|\, dt =$$

$$= \frac{3c^2}{2\sqrt{2}\,ab}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2\cos 2t}\,|\sin 2t|\, dt =$$

$$= \frac{3c^2}{\sqrt{2}\,ab}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2\cos 2t}\, d(\cos 2t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{ab}(a^2 + b^2 - c^2\cos 2t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{ab}\left[(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}} -\right.$$

$$\left.-(a^2 + b^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{ab}\left[(2a^2)^{\frac{3}{2}} - (2b^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{ab}(a^3 - b^3).$$

270. $x = \cos^4 t;\quad y = \sin^4 t.$

Решение. Так как при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ подвижная точка $(x(t),\ y(t))$ пробегает всю кривую, то $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$; $x'(t) = -4\cos^3 t\sin t$, $y'(t) = 4\sin^3 t\cos t$; $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 16\cos^6 t\sin^2 t + 16\sin^6 t\cos^2 t = 16\sin^2 t\cos^2 t(\sin^4 t + \cos^4 t) = 4\sin^2 2t\left(1 - \frac{\sin^2 2t}{2}\right) = 2\sin^2 2t(1 + \cos^2 2t)$;

$$L = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{1 + \cos^2 2t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 + \cos^2 2t}\, d(\cos 2t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos 2t\sqrt{1+\cos^2 2t} + \ln|\cos 2t + \sqrt{1+\cos^2 2t}|\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$$

При решении примеров 271—274 воспользуемся формулой п.2°.

271. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$; $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$;

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int_0^{\pi}\sin z dz = 4a\cos z\Big|_{\pi}^{0} = 8a.$$

272. $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (развертка окружности).

Решение. $x'(t) = at\cos t$; $y'(t) = at\sin t$; $x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2t^2$;

$$L = a\int_0^{2\pi} tdt = \frac{at^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a.$$

273. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Решение. $x'(t) = a(\operatorname{ch} t - 1)$, $y'(t) = a\operatorname{sh} t$; $x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t - 2\operatorname{ch} t + 1) = 2a^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} t) = 2a^2\operatorname{ch} t(\operatorname{ch} t - 1) = 4a^2\operatorname{ch} t\operatorname{sh}^2\frac{t}{2} = 4a^2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}\left(2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - 1\right)$ (использовали последовательно формулы $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$; $\operatorname{ch} t - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}$; $\operatorname{ch} t + 1 = 2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}$).

Теперь легко вычислить длину дуги:

$$L = 2a\int_0^T \operatorname{sh}\frac{t}{2}\sqrt{2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - 1}\,dt = \frac{4a}{\sqrt{2}}\int_0^T\sqrt{\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)^2 - 1}\,d \times$$

$$\times\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2}a\left[\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\sqrt{\operatorname{ch} t} - \ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} t}\right)\right]\Big|_0^T =$$

$$= a\left[2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\operatorname{ch} T} - 1\right) - \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{\sqrt{2}+1}\right].$$

274. $x = \operatorname{ch}^3 t$; $y = \operatorname{sh}^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Решение. $x'(t) = 3\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh} t$; $y'(t) = 3\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch} t$; $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t) = \frac{9}{4}\operatorname{sh}^2 2t\operatorname{ch} 2t$;

$$L = \frac{3}{2}\int_0^T\operatorname{sh} 2t\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt = \frac{3}{4}\int_0^T\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,d(\operatorname{ch} 2t) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} 2t\Big|_0^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} 2T - 1\right).$$

275. $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда) при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Решение. Кривая задана в полярной системе координат; для вычисления длины дуги воспользуемся формулой

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\,[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} +$$

$$+ \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})]\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\,[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})].$$

276. $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ при $0 < \rho < a$.

Решение. В силу условия $0 < \rho < a$ находим $-\infty < \varphi < 0$; $\rho'(\varphi) = ame^{m\varphi}$, $\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2 = a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi} = a^2e^{2m\varphi}(1+m^2)$;

$$L = a\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{0} e^{m\varphi}d\varphi = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\, e^{m\varphi}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

277. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Кривая замкнута, симметрична относительно прямой $\rho\sin\varphi = 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $\rho'(\varphi) = -a\sin\varphi$; $\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2 = a^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$;

$$L = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

278. $\rho = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Применим формулу п.3°: $\rho'(\varphi) = \dfrac{\rho\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$,

$$\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2 = \frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4} = \frac{2p^2}{(1+\cos\varphi)^3} = \frac{p^2}{4\cos^6\frac{\varphi}{2}};$$

$$L = \frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Вычислим $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3 t}$; интегрируем по частям $\left(\dfrac{dt}{\cos^2 t} = dv;\ v = \right.$ $\left.= \operatorname{tg} t;\ u = \dfrac{1}{\cos t};\ du = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt\right)$

$$I = \frac{\operatorname{tg} t}{\cos t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} t \sin t}{\cos^2 t}\, dt = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2} - I + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t};$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)\right);$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \frac{1 + \sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{4}}}}{1 - \sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{4}}}} = \frac{\sqrt{1 + \cos\frac{\pi}{4}} + \sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{1 + \cos\frac{\pi}{4}} - \sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \sqrt{2} + 1.$$

$$I = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})); \quad L = p(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

279. $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Решение. Кривая замкнута; при возрастании φ от 0 до 3π она выходит из начала координат и, самопересекаясь, возвращается в него. Таким образом,

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}\, d\varphi = a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}\, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1 + \cos 2\frac{\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

280. $\rho = a \operatorname{th}\frac{\varphi}{2} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

Решение. Очевидно, $\rho'(\varphi) = \frac{a}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}$, $\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2 =$

$$= a^2\operatorname{th}^2\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4\operatorname{ch}^4\frac{\varphi}{2}} = \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\left(\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{a^2}{4\operatorname{ch}^4\frac{\varphi}{2}} \times$$

$$\times (\operatorname{sh}^2\varphi + 1) = \frac{a^2\operatorname{ch}^2\varphi}{4\operatorname{ch}^4\frac{\varphi}{2}};$$

$$L=\frac{a}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=\frac{a}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}-1}{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=2\pi a-a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}=2\pi a-a\operatorname{th}\pi=a\,(2\pi-\operatorname{th}\pi).$$

281. $\varphi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\quad(1\leqslant\rho\leqslant 3).$

Решение. В интеграле $L=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)^2}\,d\varphi$ заменим переменную, перейдя от φ к ρ:

$$L=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{1}{\varphi'(\rho)}\right)^2}\,\varphi'(\rho)\,d\rho=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{[\rho\varphi'(\rho)]^2+1}\,d\rho.$$

В нашем случае:

$$[\rho\varphi'(\rho)]^2+1=\frac{\rho^2}{4}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2+1=\frac{\rho^2}{4}+\frac{1}{4\rho^2}+\frac{1}{2}=$$

$$=\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2\rho}\right)^2,$$

следовательно,

$$L=\int\limits_1^3\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2\rho}\right)d\rho=\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{1}{2}\ln\rho\right)\Big|_1^3=2+\frac{1}{2}\ln 3.$$

282. $\varphi=\sqrt{\rho}\quad(0\leqslant\rho\leqslant 5).$

Решение. Аналогично примеру 281, получим

$$L=\int\limits_0^5\sqrt{[\rho\varphi'(\rho)]^2+1}\,d\rho=\int\limits_0^5\sqrt{\frac{\rho}{4}+1}\,d\rho=$$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{\rho}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5=\frac{8}{3}\left(\frac{27}{8}-1\right)=6\frac{1}{3}.$$

283. $\varphi=\int\limits_0^\rho\frac{\operatorname{sh}x}{x}\,dx\quad(0\leqslant\rho\leqslant R).$

Решение. Поступая так же, как и при решении задачи 282, найдем $\varphi'(\rho)=\frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho}$, $[\rho\varphi'(\rho)]^2+1=1+\operatorname{sh}^2\rho=\operatorname{ch}^2\rho$;

$$L=\int\limits_0^R\sqrt{[\rho\varphi'(\rho)]^2+1}\,d\rho=\int\limits_0^R\operatorname{ch}\rho\,d\rho=\operatorname{sh}\rho\,\Big|_0^R=\operatorname{sh}R.$$

284. $\rho=1+\cos t;\quad\varphi=t-\operatorname{tg}\frac{t}{2}\quad(0\leqslant t\leqslant T<\pi).$

Решение. Очевидно, $\frac{d\varphi}{dt}=1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos t}{2\cos^2\frac{t}{2}}$;

$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{d\varphi}=-\sin t\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{\cos t}$; $\rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)^2=(1+\cos t)^2+$
$+\frac{4\sin^2 t\cos^4\frac{t}{2}}{\cos^2 t}=\frac{4\cos^4\frac{t}{2}}{\cos^2 t}$, следовательно,

$$L=\int_0^{T-\operatorname{tg}\frac{T}{2}}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)^2}\,d\varphi=\int_0^T\sqrt{\rho^2[\varphi(t)]+\rho'[\varphi(t)]^2}\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt=$$

$$=\int_0^T\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{\cos t}\,\frac{\cos t}{2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^T dt=T.$$

285. Доказать, что длина дуги эллипса $x=a\cos t$; $y=b\sin t$ равна длине одной волны синусоиды $y=c\sin\frac{x}{b}$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Доказательство. Обозначим через L_1 длину дуги эллипса, а через L_2 — длину одной волны синусоиды; тогда

$$L_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt;$$

$$L_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx=\int_0^{2\pi b}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\frac{x}{b}}\,d\left(\frac{x}{b}\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt\quad\left(\frac{x}{b}=t\right).$$

На первый взгляд может показаться, что $L_1\neq L_2$. Для доказательства того, что $L_1=L_2$, рассмотрим функции $F_1(t)=$ $=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$, $F_2(t)=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}$.

Так как $F_j(2\pi-t)=F_j(t)$, $F_j(\pi-t)=F_j(t)$ $(j=1,\ 2)$, то

$$L_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt,$$

$$L_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt.$$

Полагая $\frac{\pi}{2} - t = z$, получим

$$L_1 = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 z + b^2\sin^2 z}\,dz = L_2,$$

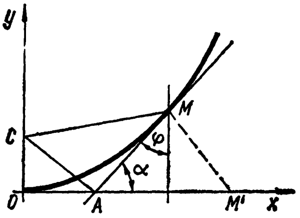

Рис. 139

что и требовалось доказать.

286. Парабола $4ay = x^2$ катится по оси Ox. Доказать, что фокус параболы описывает цепную линию.

Доказательство. Фокус параболы находится в точке $(0, a)$. Фиксируем на кривой точку M (x, y) и обозначим через φ угол между касательной к параболе в точке M и прямой, проходящей через точку M параллельно оси Oy (рис. 139). Представим себе, что парабола катится по оси Ox и точка M при этом перешла в точку M' на оси Ox. При этом, очевидно, фокус параболы будет иметь координаты $x = l - MA$; $y = CA$, где l — длина дуги OM.

Так как $y' = \frac{x}{2a} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2a}{x}$,

откуда $x = 2a\operatorname{ctg}\varphi$; $y = \frac{x^2}{4a} = \frac{4a^2\operatorname{ctg}^2\varphi}{4a} = a\operatorname{ctg}^2\varphi$. Дифференцируя, находим $dx = -\frac{2a\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$, $dy = -\frac{2a\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi$.

Вычислим l:

$$l = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = -2a\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sin^3\psi} = \frac{a\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi} - a\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{a\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi} + a\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Элементарные подсчеты дают: $y = CA = \frac{a}{\sin\varphi}$; $MA = \frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

Таким образом, координаты фокуса параболы как функции параметра φ имеют вид

$$\begin{cases} x = \frac{a\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi} + a\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = a\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right), \\ y = \frac{a}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Осталось исключить параметр φ. Очевидно,

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = e^{\frac{x}{a}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{-\frac{x}{a}}, \quad \sin\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{x}{a}}}{1+e^{-\frac{2x}{a}}}; \quad y = \frac{a}{\sin\varphi} = a\,\frac{1+e^{-\frac{2x}{a}}}{2e^{-\frac{x}{a}}} = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2} =$$

$$= a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Мы получили уравнение цепной линии.

287. Найти отношение площади плоской фигуры, ограниченной петлей кривой $y = \pm\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$, к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

Решение. Найдем площадь, ограниченную петлей кривой:

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}\,dx - 2\int_0^{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

Вычислим длину контура кривой: $L = 2\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$, где $y'(x)$ — производная функции $y = \left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$; $1 + y'(x)^2 = 1 + \frac{(1-9x)^2}{36x} = \frac{(1+9x)^2}{36x}$;

$$L = 2\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1+9x}{6\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

По условию длина окружности равна длине петли, т. е. $2\pi r = \frac{4}{3\sqrt{3}}$, откуда $r = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$; вычислим площадь круга радиуса r: $S_2 = \pi r^2 = \frac{4}{27\pi}$. Находим отношение площадей: $S_1 : S_2 = \frac{8\cdot 27\pi}{135\sqrt{3}\cdot 4} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}}$.

§ 7. Вычисление объемов

1°. Объем тела по известным поперечным сечениям. Если объем тела V существует и $S = S(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox

в точке x, то

$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

2°. Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры $a \leqslant x \leqslant b$; $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, где $y(x)$ — непрерывная однозначная функция, равен

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

В более общем случае объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры $a \leqslant x \leqslant b$; $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V=\pi\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,dx.$$

288. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, верхнее ребро равно c, а высота равна h.

Решение. Обозначим через $S(x)$ площадь сечения (прямоугольника), перпендикулярного высоте и отстоящего от ребра c на расстоянии x. Элементарные подсчеты дают

$S(x)=\frac{1}{h^2}[b(a-c)x^2+hbcx]$. По формуле 1°, § 7 имеем

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\frac{1}{h^2}\left[\frac{b(a-c)h^3}{3}+\frac{bch^3}{2}\right]=h\left(\frac{ab}{3}+\frac{bc}{6}\right)=$$

$$=\frac{bh}{6}(c+2a).$$

289. Найти объем обелиска, параллельные основания которого являются прямоугольниками со сторонами A, B, a, b, а высота равна h.

Решение. Обозначим через $S(x)$ площадь сечения (прямоугольника), перпендикулярного высоте и отстоящего от верхнего основания обелиска на расстоянии x. Используя элементарные приемы, находим

$$S(x)=ab+\frac{(aB-2ab+bA)x}{h}+\frac{(A-a)(B-b)}{h^2}x^2;$$

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=abh+\frac{h}{2}(aB-2ab+bA)+\frac{h}{3}(A-a)(B-b)=$$

$$=\frac{h}{6}(aB+bA+2AB+2ab)=\frac{h}{6}[B(a+2A)+b(A+2a)].$$

290. Найти объем усеченного конуса, основания которого являются эллипсами с полуосями A, B и a, b, а высота равна h.

Решение. Проведем плоскость, перпендикулярную к высоте конуса на расстоянии x от плоскости верхнего основания конуса;

в сечении получим эллипс с полуосями $z_1(x) = a + \frac{A-a}{h} x$ и $z_2(x) = b + \frac{B-b}{h} x$. Площадь такого эллипса, как известно, равна $S(x) = \pi\left(a + \frac{A-a}{h} x\right)\left(b + \frac{B-b}{h} x\right) = \pi\left[ab + \frac{aB - 2ab + bA}{h} x + \frac{(A-a)(B-b)}{h^2} x^2\right]$.

По формуле п.1° находим

$$V = \pi \int_0^h \left(ab + \frac{aB - 2ab + bA}{h} x + \frac{AB - Ab - aB + ab}{h^2} x^2\right) dx =$$

$$= \pi h\left(ab + \frac{aB + bA}{2} - ab + \frac{AB}{3} - \frac{aB + bA}{3} + \frac{ab}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi h}{6}[B(a + 2A) + b(A + 2a)].$$

291. Найти объем параболоида вращения, основание которого S, а высота равна H.

Решение. Параболоид вращения получим, вращая параболу $y = ax^2$ вокруг оси Oy. По условию площадь основания параболоида равна S. В основании параболоида лежит круг, площадь которого равна S. Обозначим радиус этого круга через R; из равенства $\frac{H}{a} = R^2$ находим, умножая обе его части на π: $\frac{\pi H}{a} = S$, откуда $a = \frac{\pi H}{S}$. Находим $y = \frac{\pi H}{S} x^2$, откуда $x^2 = \frac{Sy}{\pi H}$. Умножая левую и правую части последнего равенства на π (при фиксированных x и y), получим площадь поперечного сечения параболоида как функцию переменной y (в сечении параболоида плоскостью, перпендикулярной к оси Oy, получаем круг): $S(y) = \frac{Sy}{H}$. Теперь уже легко вычислить искомый объем:

$$V = \frac{S}{H}\int_0^H y\,dy = \frac{SH}{2}.$$

292. Пусть для кубируемого тела площадь $S = S(x)$ его поперечного сечения, перпендикулярного к оси Ox, изменяется по квадратичному закону: $S(x) = Ax^2 + Bx + C$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, где A, B и C — постоянные. Доказать, что объем этого тела равен $V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right]$, где $H = b - a$ (формула Симпсона).

Доказательство. По формуле п.1° имеем $V = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a) =$

$$= \frac{b-a}{6}[2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C] = \frac{H}{6}[(Aa^2+Ba+$$
$$+C)+(Ab^2+Bb+C)+2Aab+2B(a+b)+4C+Aa^2+Ab^2] =$$
$$= \frac{H}{6}\left\{S(a)+S(b)+4\left[\frac{Aab}{2}+B\left(\frac{a+b}{2}\right)+C+\frac{A(a^2+b^2)}{4}\right]\right\} =$$
$$= \frac{H}{6}\left\{S(a)+S(b)+4\left[A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\left(\frac{a+b}{2}\right)+C\right]\right\} = \frac{H}{6}\left[S(a)+\right.$$
$$\left.+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$ что и требовалось доказать.

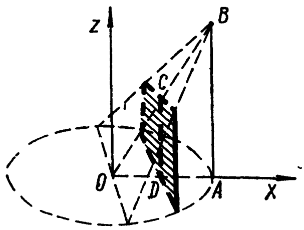

Рис. 140

293. Тело T представляет собой множество точек $M(x, y, z)$, где $0 \leqslant z \leqslant 1$, причем $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, если z рационально, и $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, если z иррационально. Доказать, что объем этого тела не существует, хотя соответствующий интеграл $\int_0^1 S(z)\,dz = 1$.

Решение. Докажем от противного. Допустим, что объем тела T существует; тогда он равен верхнему объему тела, т. е. числу $\overline{V} = \inf\{\overline{V}_T\}$, где $\{\overline{V}_T\}$ — множество объемов всех многогранников, описанных вокруг тела T (т. е. таких, каждому из которых принадлежат все точки тела T и его границы). Среди этих многогранников существует наименьший, представляющий собой объединение кубов $\{0 \leqslant z \leqslant 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ и $\{0 \leqslant z \leqslant 1;\ -1 \leqslant x \leqslant 0;\ -1 \leqslant y \leqslant 0\}$, поэтому множество $\{\overline{V}_T\}$ имеет точную нижнюю грань, равную, очевидно,

$$\overline{V} = \inf\{\overline{V}_T\} = 2.$$

Таким образом, если объем тела T существует, то он равен 2. Но множество рациональных чисел z отрезка $0 \leqslant z \leqslant 1$ является дополнением множества иррациональных z этого отрезка к множеству всех его точек, поэтому объем V заведомо не может превзойти объема куба, ребро которого равно единице:

$$2 = V \leqslant 1.$$

Получили противоречие, источник которого в предположении, что объем тела T существует.

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

294. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad z = \frac{c}{a}x; \quad z = 0.$

Решение. Тело ограничено частью цилиндрической поверхности и частями плоскостей (рис. 140). Рассмотрим сечение тела плоскостью $x = x_0$. В сечении получим прямоугольник. Из подобия треугольников OAB и ODC находим $\frac{AB}{DC} = \frac{OA}{OD}$, откуда $DC =$

$= \frac{AB \cdot OD}{OA} = \frac{cx_0}{a}$. Площадь $S(x)$ произвольного сечения, перпендикулярного к оси Ox, равна $S(x) = \frac{2bcx}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,

поэтому

$$V = \frac{2bc}{a}\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{2bca}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^0 = \frac{2}{3}abc.$$

295. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид).

Решение. В сечении тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, получаем эллипс $\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$, площадь которого $S(x)$, очевидно, равна $S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Найдем теперь объем: $V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$ $=\frac{4}{3}\pi abc.$

296. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\quad z=\pm c.$

Решение. Тело ограничено однополостным гиперболоидом и кусками плоскостей $z=\pm c$. В силу симметрии точек тела относительно плоскости xOy достаточно вычислить объем верхней части тела $(0\leqslant z\leqslant c)$ и удвоить полученный результат. В сечении тела плоскостью $z=c_1$ $(c_1<c)$ получаем эллипс $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c^2}}\right)^2}+$ $+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c^2}}\right)^2}=1$, следовательно, площадь $S(z)$ поперечного сечения, являющаяся функцией z, равна $S(z)=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$, а объем V равен $V=2\pi ab\int_0^c\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(c+\frac{c}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi abc.$

297. $x^2+z^2=a^2,\quad y^2+z^2=a^2.$

Решение. Рассмотрим $\frac{1}{8}$ часть тела (она расположена в первом октанте). В сечении плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, получаем квадрат, площадь которого $S(z)=a^2-z^2$; объем тела равен $V=8\int_0^a(a^2-z^2)\,dz=8a^3\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}a^3.$

298. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2=ax$.

Решение. Тело ограничено частью поверхности цилиндра $x^2+y^2=ax$ и двумя частями сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$. Поскольку точки тела симметричны относительно плоскости xOy, рассмотрим его верхнюю половину ($0\leqslant z\leqslant a$). В сечении плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, получим криволинейную трапецию, площадь которой, очевидно, равна

$$S(x)=\int\limits_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,dy=2\int\limits_{0}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,dy,$$

а искомый объем найдем по формуле

$$V=4\int\limits_0^a S(x)\,dx=4\int\limits_0^a\left\{\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dy\right\}dx. \qquad (1)$$

Вычислим внутренний интеграл; произведя в нем замену $y=\sqrt{a^2-x^2}\sin t$, получим

$$S(x)=\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}}(a^2-x^2)\cos^2 t\,dt=\frac{a^2-x^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}+\frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right).$$

Подставляя полученное $S(x)$ в (1), находим

$$V=2\int\limits_0^a(a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}+\frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right)dx.$$

Положим в интеграле $x=a\,\mathrm{tg}^2\,\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$; тогда

$$V=4a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\mathrm{tg}^4\,\varphi)\left(\varphi+\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}\right)\mathrm{tg}\,\varphi\cdot d(\mathrm{tg}\,\varphi)=$$

$$=4a^3\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\varphi\left[\frac{d(\mathrm{tg}^2\,\varphi)}{2}-\frac{d(\mathrm{tg}^6\,\varphi)}{6}\right]+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}^2\,\varphi-\mathrm{tg}^6\,\varphi)\,d\varphi\right\}=$$

$$=4a^3\left[\varphi\left(\frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi}{2}-\frac{\mathrm{tg}^6\,\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^6\,\varphi d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2\,\varphi d\varphi+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}^2\,\varphi-\mathrm{tg}^6\,\varphi)\,d\varphi\right]=$$

$$= 4a^3\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi - \frac{5}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^6 \varphi d\varphi\right) =$$

$$= 4a^3\left[\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{5}{6}\left(\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} + \operatorname{tg}\varphi - \varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right] =$$

$$= 4a^3\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6} + \frac{5}{18} - \frac{5}{6} + \frac{5\pi}{24}\right) =$$

$$= 4a^3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

299. $z^2 = b(a - x),\ \ x^2 + y^2 = ax.$

Р е ш е н и е. Тело ограничено частью поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = ax$ и частью цилиндрической поверхности (параболического цилиндра $z^2 = b(a - x)$). Рассмотрим верхнюю часть тела ($0 \leqslant z \leqslant \sqrt{ab}$), симметричного относительно плоскости xOy. Площадь поперечного сечения, перпендикулярного к оси Ox, выразится интегралом

$$S(x) = 2\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}} z dy = 2\sqrt{b(a-x)}\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}} dy = 2\sqrt{bx}(a - x).$$

Учитывая симметрию точек относительно плоскости xOy, получим

$$V = 4\sqrt{b}\int\limits_0^a \sqrt{x}(a - x)\,dx = 8\sqrt{b}a^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

300. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a).$

Р е ш е н и е. В сечении тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, получим эллипс с полуосями a и z, следовательно, $S(z) = \pi a z$;

$$V = \pi a\int\limits_0^a z dz = \frac{\pi a^3}{2}.$$

301. $x + y + z^2 = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0.$

Р е ш е н и е. Тело лежит в первом октанте; оно ограничено частями координатных плоскостей и куском поверхности $z = \sqrt{1 - x - y}$. В сечении тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, получаем равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом длиной $1 - z^2$ единиц, поэтому $S(z) = \frac{(1 - z^2)^2}{2}$,

$$V = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1 - 2z^2 + z^4)\,dz = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}.$$

302. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$

Решение. Решая уравнение $y^2+(x+z)y+x^2+z^2+zx-a^2=0$ относительно y, получаем $y=\dfrac{-(x+z)\pm\sqrt{4a^2-3z^2-3x^2-2xz}}{2}$. Из условия $3x^2+2xz+3z^2-4a^2\leqslant 0$ находим, что

$$-\frac{z+2\sqrt{3a^2-2z^2}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\sqrt{3a^2-2z^2}-z}{3}:$$

$$-\sqrt{\frac{3}{2}}a\leqslant z\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

При любом $-\sqrt{\frac{3}{2}}a<z<\sqrt{\frac{3}{2}}a$ площадь $S(z)$ поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, равна, очевидно,

$$S(z)=\int\limits_{-\frac{2\sqrt{3a^2-2z^2}+z}{3}}^{\frac{2\sqrt{3a^2-2z^2}-z}{3}}\sqrt{4a^2-3z^2-3x^2-2xz}\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\frac{2\sqrt{3a^2-2z^2}+z}{3}}^{\frac{2\sqrt{3a^2-2z^2}-z}{3}}\sqrt{4a^2-\frac{8}{3}z^2-3\left(x+\frac{z}{3}\right)^2}\,dx.$$

Обозначая $2\sqrt{3a^2-2z^2}=A(z)$, находим

$$S(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\frac{A(z)+z}{3}}^{\frac{A(z)-z}{3}}\sqrt{A^2(z)-(3x+z)^2}\,dx.$$

Полагая $3x+z=A(z)\sin t$, получаем

$$S(z)=\frac{A^2(z)}{3\sqrt{3}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=\frac{\pi A^2(z)}{6\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(3a^2-2z^2).$$

Интегрируя по z в пределах $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}a,\ \sqrt{\frac{3}{2}}a\right]$, находим

$$V=\int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a}S(z)\,dz=\int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a}\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(3a^2-2z^2)\,dz=$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(3a^2z-\frac{2}{3}z^3\right)\Bigg|_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a}=\frac{4}{3}\pi\sqrt{2}a^3.$$

Методами линейной алгебры уравнение поверхности приводится к каноническому виду — уравнению эллипсоида с полуосями, равными $\sqrt{2}a$; $\sqrt{2}a$; $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

303. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $a \leqslant x \leqslant b$; $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\Pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольнсе разбиение сегмента $[a, b]$. На каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ рассмотрим два прямоугольника с длиной основания Δx_i каждый и с высотами

$$m_i = \min_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{y(x)\}; \quad M_i = \max_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{y(x)\}.$$

Получили две ступенчатые фигуры, одна из которых вписана, а другая описана вокруг криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = y(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox от $x = a$ до $x = b$. При вращении ступенчатых фигур вокруг оси Oy получим два кубируемых тела T_1 и T_2, составленные из кольцевых цилиндров.

Объемы этих тел равны соответственно

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i (x_{i+1}^2 - x_i^2) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \Delta x_i,$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \cdot \Delta x_i.$$

В силу интегрируемости функции $\overline{y}(x) = 2\pi x y(x)$ на отрезке $[a, b]$ при достаточно мелком разбиении Π с длинами сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ $\Delta x_i < \delta$ имеем $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \frac{\varepsilon}{2}$, где $\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \Delta x_i$, $\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \Delta x_i$ верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $\overline{y}(x)$ на сегменте $[a_1 b]$ ($\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное). Тело T, объем которого мы вычисляем, содержит тело T_1 и содержится в теле T_2. Очевидно,

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i \Delta x_i^2,$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i \Delta x_i^2,$$

поэтому $V_{T_2} - V_{T_1} = \overline{S}_n - S_n - \gamma_n$, где $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi (M_i + m_i) \Delta x_i^2$.

Поскольку $\Delta x_i < \delta$, то $|\gamma_n| < 2\pi M\delta(b-a)$, где $M = \max\limits_{x\in[a,b]} \{y(x)\}$; так как $\overline{S}_n - \underline{S}_n < \frac{\varepsilon}{2}$, то, выбирая $\delta < \frac{\varepsilon}{4\pi M(b-a)}$, получим $V_{T_2} - V_{T_1} < \varepsilon$ при $\Delta x_i < \delta$. Таким образом, тело T, образованное вращением плоской фигуры $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant y(x)$ вокруг оси Oy, можно заключить между двумя кубируемыми телами, разность объемов которых меньше произвольного наперед заданного $\varepsilon > 0$, поэтому тело T кубируемо. Поскольку предел сумм V_{T_1} и V_{T_2} при неограниченном измельчении отрезка $[a, b]$ равен интегралу $\int\limits_a^b 2\pi xy(x)\,dx$, то и объем тела T можно вычислить по формуле $V = 2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,dx$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении следующих линий:

304. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ вокруг оси Ox (н е й л о и д).

Р е ш е н и е. Объем тела находим по формуле $V_x = \pi\int\limits_0^a y^2dx =$

$$= \frac{\pi b^2}{a^{\frac{4}{3}}}\int\limits_0^a x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{3}{7}\pi b^2 a^{-\frac{4}{3}}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a = \frac{3}{7}\pi ab^2.$$

305. $y = 2x - x^2$, $y = 0$ а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Р е ш е н и е. а) Кривая $y = 2x - x^2$ пересекает ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 2$, следовательно, $V_x = \pi\int\limits_0^2 (2x - x^2)^2\,dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi$;

б) $V_y = 2\pi\int\limits_0^2 x(2x - x^2)\,dx = 2\pi\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$.

306. $y = \sin x$; $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$: *а*) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Р е ш е н и е. *а*) $V_x = \pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$;

б) $V_y = 2\pi\int\limits_0^\pi x\sin x dx = 2\pi\left(x\cos x\,\Big|_\pi^0 + \sin x\,\Big|_0^\pi\right) = 2\pi^2$.

307. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$; $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения кривых: $\left(\frac{x}{a}\right)^2=\left|\frac{x}{a}\right|$; $\left|\frac{x}{a}\right|\left(\left|\frac{x}{a}\right|-1\right)=0$; $x_1=0$; $|x|=|a|$; $x_{2,3}=\pm a$.

При $|x|\leqslant a$ имеем $\left(\frac{x}{a}\right)^2\leqslant\left|\frac{x}{a}\right|$, поэтому (принимая во внимание симметрию кривых относительно оси Oy):

а) $V_x=2\pi b^2\int\limits_0^a\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{a^4}\right)dx=2\pi ab^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi ab^2$;

б) $V_y=2\pi b\int\limits_0^a\left(\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{a^2}\right)dx=2\pi a^2b\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi a^2b}{6}$.

308. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\leqslant x<+\infty)$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) $V_x=\lim\limits_{X\to+\infty}\pi\int\limits_0^X e^{-2x}dx=\pi\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_X^0=$

$=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{X\to+\infty}(1-e^{-2X})=\frac{\pi}{2}$;

б) $V_y=\lim\limits_{X\to+\infty}2\pi\int\limits_0^X xe^{-x}dx=2\pi\lim\limits_{X\to+\infty}(xe^{-x}+e^{-x})\Big|_X^0=$

$=2\pi\lim\limits_{X\to+\infty}(-Xe^{-X}+1-e^{-X})=2\pi.$

309. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$ вокруг оси Ox.

Решение. Фигура, которая вращается вокруг оси Ox, ограничена окружностью радиуса a с центром в точке $(0, b)$; уравнением верхней ее части (относительно прямой $y=b$) является $y_B=b+\sqrt{a^2-x^2}$, а нижней части — $y_H=b-\sqrt{a^2-x^2}$. Искомый объем равен

$$V_x=\pi\int\limits_{-a}^{a}(y_B^2-y_H^2)\,dx=8\pi b\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=$$

$$=8\pi a^2b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2\pi^2a^2b$$

(мы воспользовались тем, что ось Oy является осью симметрии круга).

310. $x^2-xy+y^2=a^2$ вокруг оси Ox.

Решение. Кривая $y=\frac{x}{2}\pm\sqrt{a^2-\frac{3}{4}x^2}$, ограничивающая вращающуюся фигуру, замкнута, а прямая $y=\frac{x}{2}$ является осью симметрии этой фигуры (рис. 141), поэтому

$$V_x = 2\pi\left[\int\limits_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}}\left(\frac{x}{2}+\sqrt{a^2-\frac{3}{4}x^2}\right)^2 dx - \right.$$

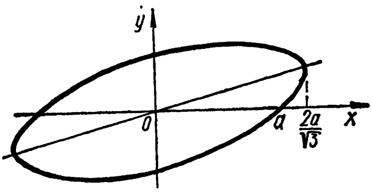

Рис. 141

$$\left. - \int\limits_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}}\left(\frac{x}{2}-\sqrt{a^2-\frac{3}{4}x^2}\right)^2 dx\right] =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}}\left(a^2-\frac{x^2}{2}+ + x\sqrt{a^2-\frac{3}{4}x^2}\right)dx -$$

$$- 2\pi\int\limits_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}}\left(a^2-\frac{x^2}{2}-x\sqrt{a^2-\frac{3}{4}x^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi\left[\frac{2a^3}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{6}\Big|_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}}}+\frac{4}{9}\left(a^2-\frac{3}{4}x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{2a}{\sqrt{3}}}^{0}-\frac{2a^3}{\sqrt{3}}+a^3+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3}{6}\Big|_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}}+\frac{4}{9}\left(a^2-\frac{3}{4}x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{2a}{\sqrt{3}}}^{a}\right]=\frac{2\pi a^3}{3}\left(\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{8\pi a^3}{3}.$$

311. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0\leqslant x<+\infty)$ вокруг оси Ox.

Решение. $\sin x\geqslant 0$ при $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, следовательно, $V_x=\pi\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin x\,dx$; полагая $t=x-2k\pi$, получаем $V_x=\pi\sum\limits_{k=0}^{+\infty}e^{-4k\pi}\int\limits_0^{\pi}e^{-2t}\sin t\,dt=\pi\sum\limits_{k=0}^{+\infty}e^{-4k\pi}\frac{e^{-2t}}{5}(\cos t+$ $+2\sin t)\Big|_{t=\pi}^{t=0}=\frac{\pi}{5}(1+e^{-2\pi})\sum\limits_{k=0}^{+\infty}e^{-4k\pi}=\frac{\pi}{5}\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$

Примечание. По определению $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}a_n.$

Таким образом, решение задачи свелось к вычислению суммы бесконечной прогрессии со знаменателем $e^{-4\pi}$.

312. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$; $y = 0$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = 2a$.

Решение. а) Объем вычислим по формуле $V_x = \pi \int\limits_0^{2\pi a} y^2 dx =$

$$= \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^3 \int\limits_0^{\pi} \sin^6 z dz =$$

$$= 32\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z dz = 32\pi a^3 \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3.$$

б) Объем найдем по формуле $V_y = 2\pi \int\limits_0^{2\pi a} xy(x)\, dx =$

$$= 2\pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 2\pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} t - 2t \cos t +\right.$$

$$\left. + \frac{t}{2} \cos 2t - \frac{3}{2} \sin t + \sin 2t - \frac{\sin t \cos 2t}{2}\right) dt = 2\pi a^3 \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 6\pi^3 a^3, \text{ так как } \int\limits_0^{2\pi} \left(-2t \cos t + \frac{t}{2} \cos 2t - \frac{3}{2} \sin t + \sin 2t -\right.$$

$$\left.- \frac{\sin t \cos 2t}{2}\right) dt = 0.$$

в) Перейдем к новой системе координат по формулам $y_1 = y - 2a$, $x_1 = x$. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$, где V_1 — объем кругового цилиндра с высотой, равной $2\pi a$ и радиусом основания $2a$, а $V_2 = \pi \int\limits_0^{2\pi a} (y_1)^2\, dx_1$.

Очевидно, $V_1 = 2\pi a \pi 4a^2 = 8\pi^2 a^3$; $V_2 = \pi \int\limits_0^{2\pi} [a^2 (1 - \cos t)^2 - 4a^2 (1 - \cos t) + 4a^2]\, a (1 - \cos t)\, dt = \pi^2 a^3$. Окончательно $V = 8\pi^2 a^3 - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3$.

313. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$:

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) При изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ x возрастает от 0 до a; кривая $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ замкнута и симметрична относительно осей координат. При изменении t от 0 до 2π подвижная точка двигается из точки $(0, b)$ в направлении движения часовой стрелки и пробегает всю кривую. Принимая во внимание, что x

возрастает при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а также симметрию точек вращающейся кривой относительно оси Oy, находим

$$V_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b\cos^3 t)^2\, d\,(a\sin^3 t) = 6\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 t - \cos^9 t)\, dt =$$

$$= 6\pi ab^2 \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right) = \frac{32\pi ab^2}{105}.$$

б) Из соображений, высказанных выше, заключаем, что

$$V_y = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\, b\cos^3 t d\,(a\sin^3 t) = 12\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos^4 t dt =$$

$$= 12\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 t - 2\sin^7 t + \sin^9 t)\, dt = 12\pi a^2 b \left(\frac{4!!}{5!!} - 2\frac{6!!}{7!!} + \right.$$

$$\left. + \frac{8!!}{9!!}\right) = \frac{32\pi a^2 b}{105}.$$

314. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной петлей кривой $x = 2t - t^2$; $y = 4t - t^3$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

Решение. а) Поскольку $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $x(2) = 0$; $y(2) = 0$, то $0 \leqslant t \leqslant 2$. При возрастании t от 0 до 1 x также возрастает от 0 до 1, а при возрастании t от 1 до 2 x убывает от 1 до 0; следовательно, $V_x = -\pi \int_1^2 y^2 dx - \pi \int_0^1 y^2 dx = -\pi \int_0^2 y^2 dx =$

$$= 2\pi \int_0^2 (t-1)(16t^2 - 8t^4 + t^6)\, dt = 2\pi \int_0^2 (t^7 - t^6 - 8t^5 + 8t^4 + 16t^3 -$$

$$- 16t^2)\, dt = 2\pi \left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} - \frac{4}{3}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + 4t^4 - \frac{16}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{64}{35}\pi.$$

б) Исходя из соображений, высказанных выше, имеем

$$V_y = -2\pi \int_1^2 xy dx - 2\pi \int_0^1 xy dx = -2\pi \int_0^2 (2t - t^2)(4t - t^3)\, 2(1-t)\, dt =$$

$$= 4\pi \int_0^2 (t^6 - 3t^5 - 2t^4 + 12t^3 - 8t^2)\, dt = 4\pi \left(\frac{2^7}{7} - 2^6 - \frac{2^6}{5} + 3\cdot 2^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{2^6}{3}\right) = \frac{64\pi}{105}.$$

315. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси фигуры $0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi$ (φ и ρ — полярные координаты), равен $V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$.

Доказательство. Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ на части точками $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta$.

Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную лучами $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ и куском кривой $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1})$ (рис. 142).

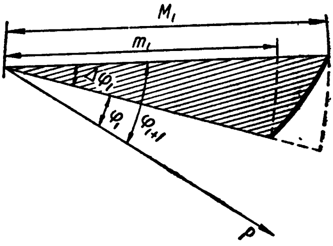

Рис. 142

Пусть $M_i = \sup\limits_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} \{\rho(\varphi)\}$; $m_i = \inf\limits_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} \{\rho(\varphi)\}$. Рассмотрим теперь два тела T_1 и T_2, образованные вращением фигур, ограниченных лучами $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ и дугами окружностей радиусов $\rho = M_i$; $\rho = m_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Очевидно, тело T (объем которого мы вычисляем) содержится в теле T_1 и содержит тело T_2 в себе. Вспоминая, что объем шарового сектора вычисляется по формуле $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где h — высота шарового сегмента, принадлежащего шаровому сектору, R — радиус шара, легко находим объемы тел T_1 и T_2:

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{3}\pi M_i^3 (\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}) = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2};$$

$$V_{T_2} = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2}.$$

При достаточно мелком разбиении Π $\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2} = \frac{\Delta\varphi_i}{2} + O^*[(\Delta\varphi_i)^3]$, $\sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} = \sin\bar{\varphi}_i$, где $\varphi_i < \bar{\varphi}_i < \varphi_{i+1}$. Очевидно,

$$V_{T_1} \leqslant \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin\hat{\varphi}_i \Delta\varphi_i + \gamma_1 = \bar{S}_n + \gamma_1; \quad V_{T_2} \geqslant \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin\check{\varphi}_i \Delta\varphi_i + $$

$+ \gamma_2 = \underline{S}_n + \gamma_2$, где $\gamma_j \to 0$ при $\Delta\varphi_i \to 0$ $(j = 1, 2)$; $\sin\hat{\varphi}_i = \max\limits_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} \sin\varphi$; $\sin\check{\varphi}_i = \min\limits_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]} \sin\varphi$. Легко видеть, что $\bar{S}_n$ есть верхняя сумма Дарбу, а $\underline{S}_n$ — нижняя сумма Дарбу интегрируемой на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции $\frac{2\pi}{3}\rho^3(\varphi)\sin\varphi$, поэтому за счет измельчения ячеек разбиения можно добиться того, что $\bar{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное.

Таким образом, тело T кубируемо. Из неравенств $\gamma_2 + \underline{S}_n \leqslant V_{T_2} \leqslant V_T \leqslant V_{T_1} \leqslant \bar{S}_n + \gamma_1$ заключаем, что объем тела T можно вычислить по формуле $V_T = \frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi d\varphi$, поскольку $\underline{S}_n$ и $\overline{S}_n$ при неограниченном измельчении ячеек как угодно мало отличаются от этого интеграла.

Примечание. Объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси фигуры $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant 0$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)$ равен, как легко показать, $V = -\frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi d\varphi$, поэтому $V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) |\sin\varphi| d\varphi$, если вращающаяся вокруг полярной оси фигура $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)$ целиком лежит по одну сторону полярной оси.

316. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$:

а) вокруг полярной оси; б) вокруг прямой $\rho\cos\varphi = -\frac{a}{4}$.

Решение. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 315.

а) Полярная ось делит плоскую фигуру $0 \leqslant \rho \leqslant a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ на две равные части, поэтому интегрируем от 0 до π:

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_\pi^0 (1 + \cos\varphi)^3 d(\cos\varphi) =$$
$$= \frac{\pi a^3}{6} (1 + \cos\varphi)^4 \Big|_\pi^0 = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

б) Перейдем к новым координатам по формулам $x_1 = y$, $y_1 = -x - \frac{a}{4}$. Учитывая симметрию фигуры относительно оси O_1y_1, получаем $V_{x_1} = 2\pi \int\limits_0^{\frac{3\sqrt{3}a}{4}} (y_1)^2 dx_1$ (здесь учтено, что при возрастании φ от 0 до $\frac{\pi}{3}$ x_1 возрастает от 0 до $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$, а при возрастании φ от $\frac{\pi}{2}$ до π x_1 убывает от $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$ до 0). Записав параметрические уравнения кривой (в качестве параметра берем угол φ), находим:

$$V_{x_1} = 2\pi a^3 \int\limits_0^\pi \left[(1 + \cos\varphi)\cos\varphi + \frac{1}{4}\right]^2 (\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1) d\varphi.$$

В громоздком подынтегральном выражении встретятся нечетные степени $\cos x$; поскольку $\int\limits_0^\pi \cos^{2k+1} x dx = 0$, то мы не будем выписывать этих членов. Таким образом,

$$V_{x_1} = 2\pi a^3 \int\limits_0^\pi (4\cos^4\varphi + 2\cos^6\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^4\varphi + 2\cos^6\varphi - \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 2\pi^2 a^3 \left(\frac{4\cdot 3!!}{4!!} + \frac{2\cdot 5!!}{6!!} - \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}\pi^2 a^3$$

(напомним читателю, что параметрические уравнения кривой $x_1 = x_1(\varphi)$, $y_1 = y_1(\varphi)$ имеют вид: $x_1 = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $y_1 = -\left[\frac{a}{4} + a(1+\cos\varphi)\cos\varphi\right]$.

317. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$:

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = x$.

Решение. а) Перейдем к полярным координатам, полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; полярное уравнение кривой, ограничивающей

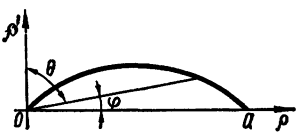

Рис. 143

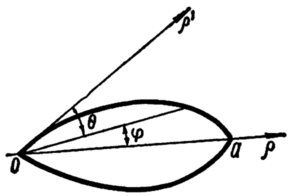

Рис. 144

область, имеет вид $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската Бернулли). Учитывая симметрию точек плоской фигуры относительно осей координат и применяя формулу, полученную в задаче 315, находим

$$V_x = \frac{4}{3}\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^3 \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}}\, d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int\limits_1^{\sqrt{2}} (z^2-1)^{\frac{3}{2}}\, dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{z}{4}(z^2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8} z\sqrt{z^2-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)\right]\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}\right] =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\right].$$

б) Примем луч $\varphi = \frac{\pi}{2}$ за полярную ось системы ρ', θ; тогда (рис. 143) $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$; $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}$ и по формуле, полученной в задаче 315 (с учетом симметрии плоской фигуры и того, что $\sin\theta < 0$), находим

$$V_y = \frac{4\pi}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} [\rho'(\theta)]^3 |\sin\theta|\,d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right| d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\,(\sqrt{2}\sin\varphi) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^1 (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

в) Примем луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$ за полярную ось системы ρ', θ; тогда (рис. 144) $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$; $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$, следовательно (с учетом симметрии плоской фигуры и того, что $\sin\theta \leqslant 0$):

$$V = \frac{4\pi}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} [\rho'(\theta)]^3 |\sin\theta|\,d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\varphi.$$

Произведя замену $\varphi - \frac{\pi}{4} = -t$, получаем

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\right]^{\frac{3}{2}} |\sin(-t)|\,dt =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^{\frac{3}{2}} \sin t\,dt = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} t \sin^{\frac{5}{2}} t\,d(\sin t) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \int\limits_0^1 z^{\frac{5}{2}} (1 - z^2)^{\frac{1}{4}}\,dz.$$

После замены $\frac{1}{z^2} - 1 = u^4$ находим $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^4 du}{(1 + u^4)^3} =$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \left(\frac{u}{8(1+u^4)^2} \Big|_{+\infty}^{0} + \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^4)^2} \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^4)^2}.$$

Вычислим $\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^4)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^4 du}{(1+u^4)^2} =$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} - \frac{u}{4(1+u^4)} \Big|_{+\infty}^{0} - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u^2-1}{u\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{u^2 - u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1} \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Окончательно получаем $V = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3} \cdot \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi^2 a^3}{4}$.

Примечание. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} t \sin^{\frac{5}{2}} t dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) =$

$= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{64} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$, следовательно, $V =$ $= \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3} \cdot \frac{3\pi\sqrt{2}}{64} = \frac{\pi^2 a^3}{4}$; здесь мы не используем Эйлеровы интегралы.

318. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ ($a > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) вокруг полярной оси.

Решение. $V = \frac{2}{3}\pi a^3 \int\limits_0^{\pi} \varphi^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \left(\varphi^3 \cos\varphi \Big|_{\pi}^{0} + \right.$

$$\left. + 3\int_0^{\pi} \varphi^2 \cos\varphi d\varphi \right) = \frac{2}{3}\pi a^3 \left[\pi^3 + 3\left(\varphi^2 \sin\varphi \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \varphi \sin\varphi d\varphi \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \left[\pi^3 - 6\left(\varphi\cos\varphi \Big|_{\pi}^{0} + \int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi \right) \right] = \frac{2}{3}\pi a^3 (\pi^3 - 6\pi) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi^2 a^3 (\pi^2 - 6)$$

(объем вычислили по формуле, полученной в задаче 315).

319. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $\varphi = \pi\rho^3$, $\varphi = \pi$ вокруг полярной оси.

Решение. По формуле задачи 315 имеем $V = \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^\pi \rho^3 \sin\varphi d\varphi =$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^\pi \varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

320. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры $a \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

Решение. Найдем значения φ, при которых лемниската $\rho = a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ и окружность $\rho = a$ пересекаются (рис. 145; на рисунке рассматривается только одна симметричная относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$ часть). Для отыскания упомянутых значений φ решим уравнение $a = a\sqrt{2\sin 2\varphi}$, корнями которого являются $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$; $\varphi_2 = \frac{5\pi}{12}$. Требуется найти удвоенный объем тела, образованного вращением плоской фигуры ACB вокруг полярной оси. Искомый объем равен удвоенной разности объемов тел, образованных вращением плоской фигуры $OACB$ и плоской фигуры OAB вокруг полярной оси. Обозначим эти объемы, соответственно, буквами V_1 и V_2. Таким образом, $V = 2(V_1 - V_2)$, где $V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (2\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \times$

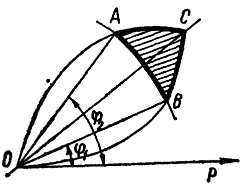

Рис. 145

$$\times \sin\varphi d\varphi;\ V_2 = \frac{2}{3}\pi a^3 \int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}.$$

При вычислении объема V_1 воспользуемся результатами, полученными при решении задачи 317 в).

Имеем

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (2\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi = \frac{16\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin^{\frac{5}{2}}\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} z^{\frac{5}{2}}(1 - z^2)^{\frac{1}{4}} dz = \frac{32\pi a^3}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \frac{u^4 du}{(1+u^4)^3} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \left(\frac{u}{(1+u^4)^2} \Bigg|_{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} + \int\limits_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{(1+u^4)^2} \right) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^3} - \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^3} \right) - \frac{u}{4(1+u^4)} \Bigg|_{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u^2-1}{u\sqrt{2}} \Bigg|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{u^2 - u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1} \Bigg|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \right] =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \left\{ \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^3} - \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^3} - \frac{1}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8\sqrt{2}} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)) + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{2}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \right\} =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{3\pi}{16\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Окончательно имеем $V = 2(V_1 - V_2) = \dfrac{2\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$.

§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox, равна $P = 2\pi \int\limits_A^B |y|\, dl$, где dl — дифференциал дуги.

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

321. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ вокруг оси Ox.

Решение. Поскольку $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx = \sqrt{1+\dfrac{9x}{4a}}\, dx$, то $P = 2\pi \int\limits_0^a y(x) \sqrt{1+\dfrac{9x}{4a}}\, dx = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a}} \int\limits_0^a x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\dfrac{9x}{4a}}\, dx$. Интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов, каждый из которых легко вычисляется. Имеем $P = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a}} \int\limits_0^a x \sqrt{\dfrac{9x^2}{4a} + x}\, dx =$
$= \dfrac{3\pi}{a} \int\limits_0^a x \sqrt{\left(x+\dfrac{2a}{9}\right)^2 - \left(\dfrac{2a}{9}\right)^2}\, d\left(x+\dfrac{2a}{9}\right)$. Произведя замену

$x+\frac{2a}{9}=t$, получаем $P=\frac{3\pi}{a}\int\limits_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}}\left(t-\frac{2a}{9}\right)\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\,dt=$

$$=\frac{3\pi}{a}\int\limits_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}} t\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\,dt-\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}}\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{a}\left[t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}}-\frac{\pi}{3}\left[t\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2a}{9}\right)^2\ln\left(t+\sqrt{t^2-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\right)\right]\Bigg|_{\frac{2a}{9}}^{\frac{11a}{9}}=$$

$$=\frac{13\sqrt{13}\pi a^2}{27}-\frac{\pi}{3}\left(\frac{11\sqrt{13}a^2}{27}-\frac{4a^2}{81}\ln\frac{\frac{11a}{9}+\frac{a\sqrt{13}}{3}}{\frac{2a}{9}}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{27}\left(13\sqrt{13}-\frac{11\sqrt{13}}{3}+\frac{4}{9}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{27}\left(\frac{28\sqrt{13}}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{9}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right).$$

Используя равенство $\frac{11+3\sqrt{13}}{2}=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2$ окончательно находим $P=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Площадь поверхности вращения P можно также вычислить с помощью несобственного интеграла. Для этого в исходном интеграле следует произвести замену переменной $\frac{1}{x}+\frac{9}{4a}=t^2$.

322. $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x|\leqslant b)$ вокруг оси Ox.

Решение. Очевидно $dl=\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}\,dx$;

$$P=2\pi\int\limits_{-b}^{b}a\cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{16b^2}{\pi}\int\limits_{0}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}\,d\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)=$$

$$= \frac{8b^2}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\ln\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}+\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}\right)^2}\right)\right\}\Bigg|_0^b=$$

$$=\frac{8b^2}{\pi}\left[\frac{\pi a}{2b}\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\right)^2}+\ln\left(\frac{\pi a}{2b}+\sqrt{1+\left(\frac{\pi a}{2b}\right)^2}\right)\right]=$$

$$=2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}.$$

323. $y=\operatorname{tg}x\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ вокруг оси Ox.

Решение. По известной нам формуле имеем

$$P=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4x}}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2x)^2+1}\,dx}{\cos^2x\,(1+\operatorname{tg}^2x)}=$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+(1+\operatorname{tg}^2x)^2}}{1+\operatorname{tg}^2x}\,d(1+\operatorname{tg}^2x)=\pi\int_1^2\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\,dz=$$

$$=\pi\int_1^2\frac{(1+z^2)\,dz}{z\sqrt{1+z^2}}=\pi\left(\int_1^2\frac{dz}{z^2\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}+\int_1^2\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)=$$

$$=\pi\left(\int_2^1\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}+\sqrt{1+z^2}\,\Big|_1^2\right)=\pi\left[\ln\left(\frac{1}{z}+\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}\right)\Big|_2^1+\right.$$

$$\left.+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right]=\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}\right].$$

324. $y^2=2px\ \ (0\leqslant x\leqslant x_0)$:
а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) Дифференцируя, получаем $2yy'=2p$, откуда $y'=\frac{p}{\sqrt{2px}}$;

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^{x_0}\sqrt{p+2x}\,dx=$$

$$=2\pi\sqrt{p}\int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}}z^2dz=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\,z^3\Big|_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left((p+2x_0)\sqrt{p^2+2px_0}-p^2\right).$$

б) Площадь поверхности вращения найдем по формуле (принимая во внимание симметрию кривой относительно оси Ox)

$$P_y = 4\pi \int\limits_0^{\sqrt{2px_0}} x(y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}dy = \frac{2\pi}{p}\int\limits_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy =$$

$$= \frac{2\pi}{p^2}\int\limits_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{p^2+y^2}dy =$$

$$= \frac{2\pi}{p^2}\left\{\frac{y(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{p^2}{8}[y\sqrt{p^2+y^2}+p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})]\right\}\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}} =$$

$$= \frac{\pi}{2p^2}\left\{\sqrt{2px_0}(p^2+2px_0)^{\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{p^2}{2}\left[\sqrt{2px_0(p^2+2px_0)} + p^2\ln\frac{\sqrt{2px_0}+\sqrt{p^2+2px_0}}{p}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)} - p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right];$$

интеграл $I = \int y^2\sqrt{p^2+y^2}dy$ берется по частям:

$$I = \frac{y}{3}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy = \frac{y}{3}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} -$$

$$-\frac{p^2}{6}\{y(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + p^2\ln[y+(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]\} + C - \frac{I}{3},$$

C — произвольная постоянная;
откуда

$$I = \frac{y(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{p^2}{8}\{y(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + p^2\ln[y+(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]\} + C.$$

325. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b\leqslant a)$:
а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) Запишем уравнение эллипса в параметрической форме $x = a\cos t$; $y = b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$; тогда $dl = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$. Учитывая симметрию кривой относительно оси Oy, имеем

$$P_x = 4\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\,dl(t) = 4\pi b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 4\pi b \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, d(\cos t) = 4\pi ab\varepsilon \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - z^2}\, dz,$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Полагая в последнем интеграле $z = \frac{\sin u}{\varepsilon}$, получаем $P_x = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int\limits_0^{\arcsin \varepsilon} \cos^2 u\, du = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \times$

$$\times (\arcsin \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}) = \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\left(\arcsin \varepsilon + \varepsilon \frac{b}{a}\right) =$$

$$= 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}.$$

б) Учитывая симметрию эллипса относительно оси Ox, получаем

$$P_y = 4\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\, dl(t) = 4\pi a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}\, d(\sin t) =$$

$$= 4\pi a \int\limits_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) z^2}\, dz = 4\pi a^2 \varepsilon \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + z^2}\, dz =$$

$$= 4\pi a^2 \varepsilon \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{a^2 \varepsilon^2} + z^2}\, dz =$$

$$= 2\pi a^2 \varepsilon \left[z \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}} + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} \ln \left(z + \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}} \right) \right] \Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi a^2 \varepsilon \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}} + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2}}}{\frac{b}{a\varepsilon}} \right) =$$

$$= 2\pi a^2 \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{b^2}{a^2\varepsilon^2} \ln \frac{a}{b}(1 + \varepsilon) \right) = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \left[\frac{a}{b}(1 + \varepsilon) \right].$$

326. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси Ox.

Решение. Точки окружности симметричны относительно прямой $y = b$; уравнение верхней (относительно этой прямой) ее части есть $y_B = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, а нижней ее части — $y_H = b - \sqrt{a^2 - x^2}$. Площадь поверхности вращения вычислим по формуле $P = P_1 + P_2$, где $P_1 = 2\pi \int\limits_{-a}^{a} y_B \sqrt{1 + [y_B'(x)]^2}\, dx$, $P_2 = 2\pi \int\limits_{-a}^{a} y_H \sqrt{1 + [y_H'(x)]^2}\, dx$.

Очевидно, $P = 4\pi b \int\limits_{-a}^{a} dl\ (x)$, где $dl\ (x) = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\ dx = \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Таким образом,

$$P = 4\pi ab\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\int\limits_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}dz = 4\pi^2 ab.$$

Примечание. Можно было сразу записать $dl = ad\varphi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

327. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Ox.

Решение. Параметрические уравнения астроиды имеют вид: $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$; очевидно, $dl = 3a\,|\sin t\cos t\,|\,dt$.

Учитывая симметрию точек кривой относительно осей Ox и Oy, находим $P = 4\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} y\,(t)\,dl\ (t) = 12\,\pi a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d\,(\sin t) = \frac{12}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{12}{5}\pi a^2.$

328. $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\ \ (|\,x\,| \leqslant b)$:

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. а) Очевидно $P_x = 2\pi a\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\ \mathrm{ch}\frac{x}{a}\,dx =$

$$= 4\pi a\int\limits_{0}^{b}\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = 2\pi a\int\limits_{0}^{b}\left(1+\mathrm{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = 2\pi a\left(b+\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right) =$$

$= \pi a\left(2b + a\,\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right).$

б) Решая уравнение $\frac{2y}{a} = e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$, находим

$x = a\ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a};\quad a \leqslant y \leqslant \mathrm{ch}\frac{b}{a};$

$x'(y) = \frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}};\ dl = \sqrt{1+[x'(y)]^2}dy = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}};$

$$P_y = 2\pi a\int\limits_{a}^{a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}}\frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}\ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\,dy =$$

$$= 2\pi a\left(\sqrt{y^2-a^2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}\Bigg|_a^{a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}} - \int\limits_{a}^{a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}}dy\right) =$$

$$= 2\pi a \left(a \operatorname{sh} \frac{b}{a} \cdot \ln \frac{a \operatorname{ch} \frac{b}{a} + a \operatorname{sh} \frac{b}{a}}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} + a\right) =$$

$$= 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a}\right).$$

329. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ вокруг оси Ox.

Решение. Из уравнения кривой видно, что достаточно вычислить площадь поверхности, образуемой вращением одной ветви симметричной относительно оси Oy кривой и, удвоив полученный результат, найти площадь всей поверхности вращения. При $y \to 0$ $x \to \infty$, а при $y \to a$ $x \to 0$. В качестве переменной интегрирования возьмем y.

При $x \in (0, +\infty)$ отрицательному приращению переменной y соответствует положительное приращение переменной x, поэтому $dl =$
$= \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx = -\sqrt{1 + [x'(y)]^2}dy = -\frac{a\,dy}{y}$.

Таким образом, $P = -4\pi a \int\limits_a^0 y\sqrt{1 + [x'(y)]^2}dy = 4\pi a \int\limits_0^a dy = 4\pi a^2$.

330. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = 2a$.

Решение. а) Кривая задана параметрически, поэтому

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt, \quad y = 2a \sin^2 \frac{t}{2};$$

$$P_x = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} y(t)\,dl(t) = 8\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^3 z\,dz =$$

$$= 32\pi a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 z\,dz = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

б) Дифференциал дуги, очевидно, остается прежним; в формулу для вычисления площади поверхности вместо $y(t)$ следует поставить $x(t)$:

$$P_y = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} x(t)\,dl(t) = 4\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} (2z - \sin 2z) \sin z\,dz = 8\pi a^2 \left[2\left(z \cos z \Big|_{\pi}^{0} + \int\limits_0^{\pi} \cos z\,dz\right) - \right.$$

$$\left. - 2\int\limits_0^{\pi} \sin^2 z\,d(\sin z)\right] = 16\pi^2 a^2.$$

в) Переходя к новым координатам $x_1 = x$, $y_1 = y - 2a$ и учитывая симметрию точек кривой относительно прямой $x_1 = a\pi$, а также то, что

$y_1 \leqslant 0$, имеем

$$P = 4\pi \int_0^{\pi} |y_1| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} |-\cos t - 1| \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^2\frac{t}{2} \sin\frac{t}{2}\,dt = 32\pi a^2 \int_{\pi}^{0} \cos^2\frac{t}{2}\,d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^2 \cos^3\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

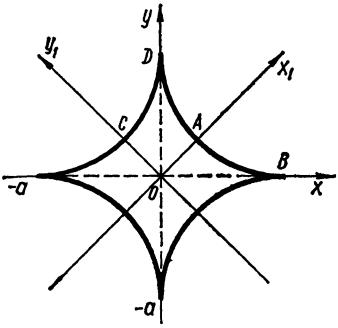

Рис. 146

331. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$.

Решение. Перейдем к новым переменным x_1, y_1 по формулам $x = x_1\cos\frac{\pi}{4} - y_1\sin\frac{\pi}{4}$, $y = y_1\cos\frac{\pi}{4} + x_1\sin\frac{\pi}{4}$, откуда $x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$. Требуется вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin^3 t + \cos^3 t)$, $y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin^3 t - \cos^3 t)$ вокруг оси Ox_1 (рис. 146). Вычислим $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = 3a|\sin t\cos t|\,dt$. Искомая площадь поверхности равна сумме удвоенных площадей поверхностей, образованных вращением кривых AB и CD вокруг оси Ox_1:

$$P = 4\pi\left(\int_B^A |y_1|\,dl + \int_D^C y_1\,dl\right)$$

(в первом интеграле, стоящем в фигурных скобках, берем $|y_1|$, так как в системе координат x_1Oy_1 $y_1 \leqslant 0$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$). Переходя к переменной t и принимая во внимание, что $dl = -3a\sin t\cos t\,dt$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}$, находим

$$P = \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 t - \sin^3 t)\sin t\cos t\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin^3 t - \cos^3 t)\sin t\cos t\,dt\right) = 6\sqrt{2}\pi a^2 \left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} [\cos^4 t\,d(\cos t) + \right.$$

$$+\sin^4 t d(\sin t)] - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} [\sin^4 t d(\sin t) + \cos^4 t d(\cos t)]\Bigg\} =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left((\cos^5 t + \sin^5 t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} + (\sin^5 t + \cos^5 t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{12\sqrt{2}\pi a^2}{5}\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi a^2}{5}(4\sqrt{2} - 1).$$

332. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение. Поскольку $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$; $y = \rho\sin\varphi = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi = 4a\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$, то

$$P = 2\pi\int_0^{\pi} y(\varphi)\,dl(\varphi) = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 32\pi a^2\int_{\pi}^{0}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

333. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Решение. а) С кривой $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемнискатой Бернулли) мы неоднократно встречались; принимая во внимание симметрию точек кривой относительно осей прямоугольной системы координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось — с полярной осью, находим

$$P = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi.$$

Поскольку $\rho\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$; $\rho'(\varphi) = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; $\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$, получаем

$$P = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 2\pi a^2(2 - \sqrt{2}).$$

б) Очевидно, $P = 4\pi a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2$ (в силу тех же соображений, что и в случае а)).

в) Примем (как и при решении задачи 317 в)) луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$ за полярную ось системы $\rho_1(\theta)$, θ; тогда $\rho_1(\theta) = \rho(\varphi)$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$;

$$P = P_1 + P_2, \text{ где } P_1 = 4\pi \int\limits_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=-\frac{\pi}{4}} \rho_1(\theta)\,|\sin\theta|\,\sqrt{\rho_1^2(\theta) + [\rho_1'(\theta)]^2}\,d\theta,$$

$$P_2 = 4\pi \int\limits_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=0} \rho_1(\theta)\,|\sin\theta|\,\sqrt{\rho_1^2(\theta) + [\rho_1'(\theta)]^2}\,d\theta$$ (с учетом симметрии точек кривой и того, что в системе координат ρ_1, θ $\sin\theta$ принимает отрицательные значения при изменении θ от $-\frac{\pi}{2}$ до 0). Переходя к $\rho(\varphi)$ и φ, получим $P_1 = 4\pi a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sqrt{\cos 2\varphi}\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| \times$

$$\times \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 4\pi a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\varphi = 4\pi a^2 \int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = 2\pi a^2\sqrt{2};\ P_2 = 4\pi a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$

Окончательно $P = 2\pi a^2\sqrt{2} + 2\pi a^2(2 - \sqrt{2}) = 4\pi a^2$.

334. Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью Ox.

Найти отношение площади поверхности тела вращения к площади поверхности равновеликого шара.

Решение. Вычислим объем тела, образованного вращением данной плоской фигуры вокруг оси Ox:

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{\pi}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 \, dx = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) \, dx =$$

$$= \frac{2\pi}{a^2} \left(a^5 - \frac{2}{3} a^5 + \frac{a^5}{5} \right) = \frac{16}{15} \pi a^3.$$

Вычислим радиус R равновеликого шара из условия $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{16}{15} \pi a^3$; находим $R = a \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$. Параметрическими уравнениями полуокружности радиуса R являются $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, а дифференциал дуги $dl = R d\varphi$.

Площадь поверхности шара равна $P = 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Вычислим теперь площадь поверхности, образованной вращением кривой $ay = a^2 - x^2$ вокруг оси Ox:

$$P_1 = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{a^2 - x^2}{a} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2}} \, dx = \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} \, dx =$$

$$= 8\pi \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} \, dx - \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} \, dx =$$

$$= 4\pi \left[x \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} + \frac{a^2}{4} \ln \left(x + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} \right) \right] \Bigg|_0^a -$$

$$- \frac{8\pi}{a^2} \left\{ \frac{x}{4} \left(\frac{a^2}{4} + x^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{32} \left[x \left(\frac{a^2}{4} + x^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a^2}{4} \ln \left(x + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} \right) \right] \right\} \Bigg|_0^a = 2\pi a^2 \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{5}) \right) -$$

$$- \frac{\pi a^2}{8} \left(9 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{5}) \right) = \frac{\pi a^2}{16} \left(14 \sqrt{5} + 17 \ln (2 + \sqrt{5}) \right).$$

Осталось рассмотреть отношение $\frac{P_1}{P}$:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{14 \sqrt{5} + 17 \ln (2 + \sqrt{5})}{64 \sqrt[3]{\frac{16}{25}}} = \frac{5 (14 \sqrt{5} + 17 \ln (2 + \sqrt{5}))}{128 \sqrt[3]{10}}.$$

335. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$, вращается вокруг прямой $y = p$. Найти объем и площадь поверхности тела вращения.

Решение. Перейдем к новым координатам по формулам $x_1 = x$, $y_1 = y - p$; искомый объем V, очевидно, равен:

$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} (-\sqrt{2px} - p)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{p}{2}} (\sqrt{2px} - p)^2 dx =$$

$$= 4\sqrt{2}\pi p^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{x}dx = \frac{8}{3}\pi \sqrt{2} p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{4}{3}\pi p^3.$$

Принимая во внимание, как и при вычислении объема, двузначность кривой, находим $P = 2\pi \int_0^{\frac{p}{2}} |-\sqrt{2px} - p| \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx + 2\pi \times$ $\times \int_0^{\frac{p}{2}} |\sqrt{2px} - p| \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\pi \int_0^{\frac{p}{2}} 2p \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\sqrt{2}\pi p \times$ $\times \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{p + 2x}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{p + 2x}\, d(\sqrt{2x}) = 4\pi p \int_0^{\sqrt{p}} \sqrt{p + t^2} dt =$ $= 2\pi p (t\sqrt{p + t^2} + p \ln (t + \sqrt{p + t^2})) \Big|_0^{\sqrt{p}} = 2\pi p (p\sqrt{2} + p \ln (1 +$ $+ \sqrt{2})) = 2\pi p^2 (\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2}))$.

Для вычисления площади полной поверхности вращения к полученному результату следует прибавить величину площади круга, радиус которого равен $2p$, т. е. число $4\pi p^2$:

$$P_{\text{полная}} = 2\pi p^2 [(2 + \sqrt{2}) + \ln (1 + \sqrt{2})].$$

§ 9. Общая схема применения определенного интеграла. Вычисление моментов, координат центра тяжести

1°. Если всякому промежутку $[\alpha, \beta]$, содержащемуся в некотором фиксированном промежутке $[a, b]$, отвечает значение определенной физической или геометрической величины P, то P называют *функцией промежутка* $[\alpha, \beta]$ и обозначают $P([\alpha, \beta])$ (например, если $f(x)$ — непрерывная неотрицательная на $[a, b]$ функция, то с каждым промежутком $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ связываем величину $F([\alpha, \beta])$ площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезками прямых $x = \alpha$; $x = \beta$ и отрезком оси Ox от $x = \alpha$ до $x = \beta$.

Функция промежутка $P([\alpha, \beta])$ называется *аддитивной*, если при $\alpha < \gamma < \beta$ $P([\alpha, \beta]) = P([\alpha, \gamma]) + P([\gamma, \beta])$ (примером аддитивной функции может служить функция $F([\alpha, \beta])$, о которой упоминалось выше).

Рассмотрим аддитивную функцию промежутка $P([\alpha, \beta])$ и допустим, что на фиксированном промежутке $[a, b]$ определена непрерывная функция $p(x)$, связанная с функцией $P([\alpha, \beta])$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ соотношением

$$P([x, x+\Delta x]) = p(x)\Delta x + \rho([x, x+\Delta x]),$$

где $\rho([x, x+\Delta x])$ такая функция, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\rho([x, x+\Delta x])}{\Delta x} = 0 \left(\forall \varepsilon > \right.$ $> 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что при $0 < \Delta x < \delta$ $\left.\left|\frac{\rho([x, x+\Delta x])}{\Delta x}\right| < \varepsilon\right)$.

Тогда

$$P([a, b]) = \int_a^b p(x)\,dx. \tag{1}$$

Таким образом, если нам удалось с точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с Δx установить приближенное равенство $P([x, x+\Delta x]) \approx p(x)\Delta x$, то можем вычислить интересующее нас значение $P([a, b])$ по формуле (1). В этом и состоит схема применения определенного интеграла.

2°. Пусть $\{M_j\}$ — система материальных точек с массами, соответственно, m_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, лежащих в одной плоскости, а y_j — ординаты точек M_j. Величина

$$M_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j$$

называется *статическим моментом* этой системы точек относительно оси Ox, а величина

$$I_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2$$

называется моментом инерции этой системы относительно оси Ox.

Предположим, что вдоль произвольной гладкой кривой $y = f(x)$ равномерно распределена масса с линейной плотностью $\mu \equiv 1$. Тогда статическими моментами дуги кривой (при $a \leqslant x \leqslant b$) относительно осей координат называются величины

$$M_x = \int_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,$$

а моментами инерции дуги кривой относительно осей координат называются величины

$$I_x = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

Координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = f(x)$ (с равномерно распределенной массой, линейная плотность которой

$\mu \equiv 1$) вычисляются по формулам

$$\xi = \frac{M_y}{L}, \quad \eta = \frac{M_x}{L},$$

где L — длина дуги кривой $y = f(x)$; $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Предположим, что ось Ox не пересекает кривую. Умножая левую и правую части равенства $|\eta| L = |M_x|$ на 2π, получаем первую теорему Гульдина:

Величина площади поверхности, полученной от вращения дуги плоской кривой вокруг некоторой не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги кривой.

Если рассматриваемая дуга симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги лежит на этой прямой.

3°. *Статическими моментами однородной криволинейной трапеции* $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $a \leqslant x \leqslant b$ (с равномерно распределенной массой, поверхностная плотность которой $\mu(x, y) \equiv 1$) относительно осей координат называются величины

$$M_x = \frac{\operatorname{sgn} f(x)}{2} \int_a^b f^2(x)\,dx, \quad M_y = \operatorname{sgn} f(x) \int_a^b x f(x)\,dx,$$

а *моментами инерции этой трапеции относительно осей координат* называются величины

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b f^2(x)\,|f(x)|\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2\,|f(x)|\,dx,$$

в предположении, что кривая $f(x)$ не пересекает ось Ox.

Координаты центра тяжести однородной криволинейной трапеции вычисляются по формулам:

$$\xi = \frac{M_y}{S}, \quad \eta = \frac{M_x}{S},$$

где S — площадь трапеции.

Предположим теперь, что ось Ox не пересекает криволинейную трапецию. Умножая левую и правую части равенства

$$|\eta| S = |M_x|$$

на 2π, получаем вторую теорему Гульдина:

Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади S этой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.

Если плоская фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести фигуры лежит на этой оси.

336. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги.

Р е ш е н и е. Выделим элемент $\breve{dl}$ дуги окружности, центральный угол которой равен $d\varphi$; тогда $dl = a d\varphi$. Под расстоянием дуги $\breve{dl}$ от диаметра понимаем величину

$$r^* = \sup \{r_D\},$$

где $\{r_D\}$ — множество расстояний всех точек дуги $\breve{dl}$ от диаметра. С точностью до бесконечно малой того же порядка, что и $d\varphi$, имеем

$$r^* = r_D(\varphi) = a \sin \varphi, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 + d\varphi, \quad 0 < \varphi_0 < \pi.$$

Статический момент и момент инерции элемента $\breve{dl}$ (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $d\varphi$) соответственно равны:

$$dM_D = a^2 \sin \varphi d\varphi, \quad dI_D = a^3 \sin^2 \varphi d\varphi.$$

На основании общей схемы применения определенного интеграла получаем

$$M_D = a^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2a^2; \quad I_D = a^3 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{2}.$$

337. Найти статический момент дуги параболы $y^2 = 2px \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right)$ относительно прямой $x = \frac{p}{2}$.

Решение. Пусть x — абсцисса точки $M(x, y)$, лежащей на дуге $\breve{dl}$; тогда (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости, чем dx)

$$dM_{\frac{p}{2}} = \left(\frac{p}{2} - x\right) dl = \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Применяя общую схему, о которой говорилось выше, и принимая во внимание симметрию кривой относительно оси Ox, получаем

$$M_{\frac{p}{2}} = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} [p - (\sqrt{2x})^2] \sqrt{p + (\sqrt{2x})^2} d(\sqrt{2x}) = \int_0^{\sqrt{p}} (p - z^2) \sqrt{p + z^2} dz =$$

$$= \left\{ \frac{z}{4} \sqrt{p + z^2} \left[\frac{5p}{2} - (p + z^2) \right] + \frac{5}{8} p^2 \ln (z + \sqrt{p + z^2}) \right\} \Bigg|_0^{\sqrt{p}} =$$

$$= \frac{p^2}{8} (\sqrt{2} + 5 \ln (1 + \sqrt{2}))$$

(мы использовали результат задачи 324, б)).

338. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания.

Решение. Отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах треугольника, параллельный основанию, проходящий на расстоянии x $(0 < x < h)$ от него, имеет длину $d = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Рассмотрим теперь горизонтальную полоску шириной dx, параллельную основанию треугольника, приняв ее приближенно за прямоугольник со сторонами, имеющими длины d и dx. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка чем dx, получим, что площадь полоски равна величине $b\left(1 - \frac{x}{h}\right) dx$, а статический момент и момент инерции полоски относительно основания треугольника равны, соответственно,

$$dM = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx; \quad dI = bx^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx.$$

На основании общей теории применения интеграла получаем

$$M = b\int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx = \frac{bh^2}{6},$$

$$I = b\int_0^h x^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx = \frac{bh^3}{12}.$$

339. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy параболического сегмента, ограниченного кривыми $ay = 2ax - x^2$ $(a > 0)$ и $y = 0$.

Чему равны радиусы инерции r_x и r_y, т. е. величины, определяемые соотношениями $I_x = Sr_x^2$, $I_y = Sr_y^2$, где S — площадь сегмента?

Решение. По формулам 3° имеем

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{2a} y^3 dx = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}(2ax - x^2)^3 dx = \frac{32a^4}{105};$$

$$I_y = \int_0^{2a} x^2 y dx = \int_0^{2a} x^2\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{8}{5}a^4.$$

Поскольку $S = \int_0^{2a}\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{4}{3}a^2$, то $r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} = 2a\sqrt{\frac{2}{35}}$; $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} = a\sqrt{\frac{6}{5}}$.

340. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей.

Решение. Главные оси пластинки — оси координат. Запишем параметрические уравнения эллипса в форме

$$\begin{cases} x = a\sin t; \\ y = b\cos t; \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi);$$

тогда при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ x возрастает от 0 до a. В силу симметрии пластинки относительно осей достаточно вычислить моменты инерции четвертой ее части и каждый результат увеличить в четыре раза. Таким образом,

$$I_x = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^3(t)\,dx(t) = \frac{4}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{\pi ab^3}{4};$$

$$I_y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\,y(t)\,dx(t) = a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

341. Найти статический момент и момент инерции однородного кругового конуса с радиусом основания r и высотой h относительно плоскости основания этого конуса.

Решение. В ортогональном сечении плоскостью на расстоянии x $(0 < x < h)$ от основания получим круг, радиус которого y найдем из очевидного равенства

$$\frac{y}{r} = 1 - \frac{x}{h}.$$

Тело, ограниченное конической поверхностью и двумя кругами, полученными от пересечения конуса плоскостями, параллельными плоскости основания на расстояниях x и $x + dx$ от него, примем приближенно за цилиндр, радиус основания которого равен y; объем тела (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем dx) равен

$$\pi r^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx,$$

а статический момент и момент инерции равны, соответственно,

$$dM = \pi r^2 x\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx, \quad dI = \pi r^2 x^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx.$$

Интегрируя по x в пределах $[0, h]$, находим

$$M = \pi r^2\int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^2}{12};$$

$$I = \pi r^2\int_0^h x^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^3}{30}.$$

342. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы M относительно его диаметра.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы начало координат O совпадало с центром шара, а диаметр шара совпал с осью Oz. Пусть ρ — расстояние от начала координат до точки $M(x, y, z)$ шара; φ — угол, образованный вектором $\boldsymbol{OM}$

с положительным направлением оси Oz; θ — угол, образованный проекцией вектора $\mathbf{OM}$ на плоскость xOy с положительным направлением оси Ox.

Рассмотрим такие семейства:

$$\rho = c_1; \quad \theta = c_2; \quad \varphi = c_3 \quad (c_j = \text{const}, \quad j = 1,\ 2,\ 3).$$

Первое семейство — это семейство сфер с центром в начале координат, второе — полуплоскостей, проходящих через ось Oz, третье — круговых конусов с вершинами в начале координат, для которых ось Oz есть ось симметрии. Придавая переменным ρ, θ и φ бесконечно малые приращения $d\rho$, $d\theta$ и $d\varphi$, получим элемент объема шара, который с точностью до бесконечно малых высших порядков можно принять за прямоугольный параллелепипед с ребрами, длины которых $d\rho$, $\rho d\varphi$, $\rho\sin\varphi d\theta$ (рис. 147).

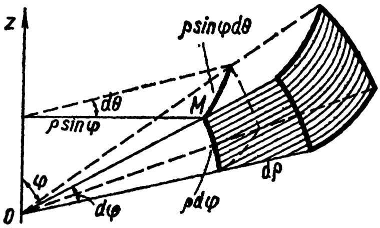

Рис. 147

Расстояние элемента объема от диаметра (с точностью до бесконечно малой того же порядка, что и $d\rho$) равно $\rho\sin\varphi$, поэтому $dI = \rho^4\sin^3\varphi d\rho d\varphi d\theta$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков).

Чтобы вычислить момент инерции всего шара, нужно проинтегрировать полученное выражение последовательно по ρ (от 0 до R), по θ (от 0 до 2π) и по φ (от 0 до π):

$$I = \int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}\pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{8}{15}\pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2,$$

где M — масса шара.

Примечание. Под расстоянием элемента объема dv шара от диаметра понимаем величину $r = \sup\left\{\begin{matrix}\rho(M, z) \\ M \in dv\end{matrix}\right\}$, где $\rho(M, z)$ — расстояние точки M объема dv от оси Oz.

343. Определить координаты центра тяжести круговой дуги $x = a\cos\varphi$; $y = a\sin\varphi$ $(|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi)$.

Решение. Дуга симметрична относительно оси Ox, поэтому центр тяжести дуги $C(\xi, \eta)$ находится на ней. Вычислим длину кривой и ее статический момент относительно оси Oy

$$L = a\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = 2a\alpha; \qquad M_y = a^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = 2a^2\sin\alpha.$$

Найдем координату ξ центра тяжести: $\xi = \frac{M_y}{L} = a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Таким образом, $C(\xi, \eta) = \left(a\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$.

344. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболами $ax = y^2$; $ay = x^2$ $(a > 0)$.

Решение. Точки плоской фигуры симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла, поэтому центр тяжести находится на этой биссектрисе.

Элементарные подсчеты дают:

$$M_y = \int_0^a x\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{3a^3}{20}; \quad S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{a^2}{3},$$

следовательно, $\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{9a}{20}$, $\eta = \frac{9a}{20}$ (так как центр тяжести лежит на биссектрисе $y = x$, $x > 0$).

345. Определить координаты центра тяжести области

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b).$$

Решение. Уравнение четвертой части эллипса запишем в виде

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)\, dx(t) = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{ab^2}{3};$$

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\, y(t)\, dx(t) = a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = \frac{a^2 b}{3}.$$

Поскольку $S = \frac{\pi ab}{4}$, то $\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{4a}{3\pi}$, $\eta = \frac{M_x}{S} = \frac{4b}{3\pi}$.

346. Определить центр тяжести однородного полушара радиуса a.

Решение. Ось Oz является осью симметрии полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, поэтому центр тяжести находится на этой оси. Приняв шаровой пояс, нижнее основание которого находится на расстоянии z $(0 < z < a)$ от плоскости xOy и высота которого равна dz, за цилиндр, высота которого равна высоте шарового пояса, а основание — нижнему основанию шарового пояса (кругу радиуса $\sqrt{a^2 - z^2}$), можем вычислить приближенно статический момент элементарного шарового пояса относительно плоскости xOy: $dM = \pi(a^2 - z^2)\, zdz$, откуда

$$M = \pi \int_0^a z(a^2 - z^2)\, dz = \frac{\pi a^4}{4}.$$

Так как объем полушара равен $\frac{2}{3}\pi a^3$, можем найти координату ζ центра тяжести $C(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\zeta = \frac{3M}{2\pi a^3} = \frac{3\pi a^4}{8\pi a^3} = \frac{3}{8}a.$$

Таким образом, $C(\xi, \eta, \zeta) = \left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$.

347. Определить координаты центра тяжести $C(\varphi_0, \rho_0)$ дуги OP логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ от точки $O(-\infty, 0)$ до точки $P(\varphi, \rho)$. Какую кривую описывает точка C при движении точки P?

Решение. Вычислим статические моменты кривой относительно осей Ox и Oy; параметрическими уравнениями кривой являются

$$\begin{cases} x = ae^{m\varphi}\cos\varphi; \\ y = ae^{m\varphi}\sin\varphi. \end{cases}$$

Очевидно, $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi = a\sqrt{1+m^2}\,e^{m\varphi}d\varphi$;

$$M_x = a^2\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\theta}\sin\theta d\theta;$$

$$M_y = a^2\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\theta}\cos\theta d\theta.$$

Умножим M_x на мнимую единицу i и сложим с M_y; в силу формулы Эйлера получим

$$M_y + iM_x = a^2\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{\varphi} e^{(2m+i)\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}\left\{e^{2m\theta}\left[(2m\cos\theta + \sin\theta) + i(2m\sin\theta - \cos\theta)\right]\right\}\Big|_{\theta=-\infty}^{\theta=\varphi} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}e^{2m\varphi}\left[(2m\cos\varphi + \sin\varphi) + i(2m\sin\varphi - \cos\varphi)\right],$$

откуда

$$M_x = \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}e^{2m\varphi}(2m\sin\varphi - \cos\varphi),$$

$$M_y = \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{4m^2+1}e^{2m\varphi}(2m\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Вычислим длину L дуги кривой:

$$L = \int_{-\infty}^{\varphi} a\sqrt{1+m^2}\,e^{m\theta}d\theta = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\varphi}.$$

Теперь легко найти координаты центра тяжести:

$$\xi = \frac{M_y}{L} = \frac{ame^{m\varphi}(2m\cos\varphi + \sin\varphi)}{4m^2+1};$$

$$\eta = \frac{M_x}{L} = \frac{ame^{m\varphi}(2m\sin\varphi - \cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

Очевидно, $\rho_0 = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \frac{m\rho}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{mae^{m\varphi}}{\sqrt{4m^2+1}}$; $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\eta}{\xi} =$

$$= \frac{2m\sin\varphi - \cos\varphi}{2m\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{\sqrt{4m^2+1}\sin\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right)}{\sqrt{4m^2+1}\sin(\varphi + \operatorname{arctg} 2m)} = \operatorname{tg}\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right),$$

так как $\sin(\varphi + \operatorname{arctg} 2m) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right) = \cos\left(-\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right) = \cos\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}\right)$ (воспользовались известными формулами $\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = \operatorname{arcctg}\alpha$, $\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arcctg}\alpha = \frac{\pi}{2}$ и четностью функции $\cos\varphi$). С точностью до постоянного слагаемого можем записать: $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2m}$.

Записав ρ_0 в виде

$$\rho_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}} e^{m(\varphi_0+\alpha)}, \tag{1}$$

приходим к выводу, что точка C при движении точки P описывает логарифмическую спираль (1).

348. Доказать, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан треугольника.

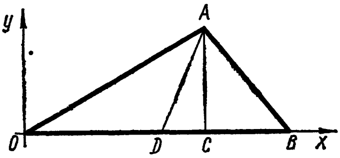

Рис. 148

Решение. Пусть высота треугольника имеет длину h, а основание — длину b (см. задачу 344). Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпало с вершиной треугольника, а основание треугольника было отрезком $[0, b]$ оси Ox (рис. 148).

Статический момент треугольной пластины относительно оси Ox мы вычислили в задаче 338; он равен $M_x = \frac{bh^2}{6}$. Поскольку $S_{\Delta OAB} = \frac{bh}{2}$, то координата центра тяжести

$$\eta = \frac{M_x}{S_{\Delta OAB}} = \frac{h}{3}.$$

Пусть основание высоты треугольника отстоит от начала координат на расстоянии c; тогда уравнения прямых, проходящих через точки O и A, и точки A и B имеют, соответственно, вид

$$y_1(x) = \frac{hx}{c}, \quad y_2(x) = \frac{h(b-x)}{b-c},$$

а объем тела, образованного вращением площади треугольника вокруг оси Oy, равен $V = V_1 + V_2$, где

$$V_1 = 2\pi \int_0^c xy_1(x)\,dx = \frac{2\pi h}{c} \int_0^c x^2 dx = \frac{2\pi h c^2}{3};$$

$$V_2 = 2\pi \int_c^b xy_2(x)\,dx = \frac{2\pi h}{b-c} \int_c^b x(b-x)\,dx = \frac{2\pi h}{3}\left[\frac{b(b+c)}{2} - c^2\right].$$

Складывая, получаем $V = \frac{\pi h}{3} b(b+c)$. Обозначая, как всегда, абсциссу центра тяжести через ξ и применяя вторую теорему Гульдина, находим $\frac{\pi h b}{3}(b+c) = \pi b h \xi$, откуда $\xi = \frac{b+c}{3}$.

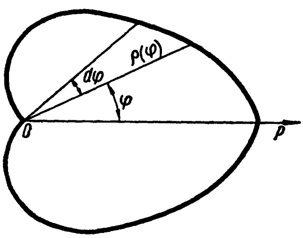

Рис. 149

Покажем, что центр тяжести треугольной пластинки лежит на медиане. Уравнение прямой, проходящей через точки A и D, имеет вид

$$y = h\left(1 - \frac{2(x-c)}{b-2c}\right).$$

Подставляя в это уравнение $x = \xi$, получим $y(\xi) = \eta = \frac{h}{3}$. Так как положение центра тяжести пластины не зависит от выбора системы координат, приходим к выводу, что он находится в точке пересечения медиан треугольника.

349. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Область симметрична относительно полярной оси, поэтому на ней лежит центр тяжести.

Рассмотрим криволинейный сектор с углом при вершине $d\varphi$, образованный лучами φ и $\varphi + d\varphi$ (рис. 149) и дугой кривой. Приняв его за круговой сектор со сторонами $\rho(\varphi)$ и углом при вершине $d\varphi$, можем приближенно вычислить его площадь $dS = \frac{\rho^2(\varphi)}{2}\,d\varphi$.

На основании результата, полученного в задаче 354, можем считать, что центр тяжести криволинейного сектора находится на расстоянии $\frac{2}{3}\rho(\varphi)$ от полюса, поэтому статический момент сектора относительно прямой $\rho\cos\varphi = 0$ равен приближенно (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем $d\varphi$)

$$dM = \frac{\rho^2(\varphi)}{2} \cdot \frac{2}{3}\rho(\varphi)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi = \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\, d\varphi,$$

откуда

$$M = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi +$$

$$+\cos^4\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\varphi+\cos^4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{5}{4}\pi a^3.$$

Так как площадь области $S=\frac{3\pi a^2}{2}$, то $\xi=\frac{M^*}{S}=\frac{5}{6}a.$

Обозначая координаты центра тяжести ρ_0 и φ_0, получаем $\varphi_0=0$, $\rho_0=\frac{5}{6}a.$

Примечание. Можно найти координаты центра тяжести с помощью теоремы Гульдина. В задаче 322, б) мы нашли, что объем тела, образованного вращением площади $\rho=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ вокруг прямой $\rho\cos\varphi=-\frac{a}{4}$, равен

$$V=\frac{13}{4}\pi^2a^3.$$

По второй теореме Гульдина $V=2\pi\eta S$, где $S=\frac{3\pi a^3}{12}$, откуда $\eta=\frac{13a}{12}$. Таким образом,

$$\rho_0=\frac{13}{12}a-\frac{a}{4}=\frac{5}{6}a,\quad \varphi_0=0.$$

350. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ и осью Ox.

Решение. Очевидно,

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi a}y^2dx=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=8a^3\int\limits_0^{\pi}\sin^6 z dz=$$

$$=16a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z dz=16a^3\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi a^3}{2};$$

$$M_y=\int\limits_0^{2\pi a}xy\,dx=a^3\int\limits_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^3\left[\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,d(\cos t)+\int\limits_0^{2\pi}t\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt\right]=3\pi^2a^3.$$

Площадь S, ограниченная первой аркой циклоиды и осью Ox, равна (см. задачу 234) $S=3\pi a^2$, следовательно, координаты центра тяжести $C(\xi,\eta)$ фигуры равны $\xi=\frac{M_y}{S}=\pi a$, $\eta=\frac{M_x}{S}=\frac{5}{6}a.$

351. Определить координаты центра тяжести тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $0\leqslant x\leqslant a$, $y^2=2px$ вокруг оси Ox.

Решение. Центр тяжести тела вращения находится на оси Ox, так как точки тела симметричны относительно этой оси. Проведем на расстояниях x и $x+dx$ ортогональные сечения тела плоскостями и примем полученное элементарное тело за цилиндр, в основании которого лежит круг радиуса $y=\sqrt{2px}$ и высота которого равна dx. Объем элементарного тела dV приближенно равен $dV=2\pi pxdx$, а его статический момент dM относительно плоскости $x=0$ приближенно равен $dM=2\pi px^2dx$. Интегрируя в пределах $[0, a]$, находим $M = 2\pi p\int\limits_0^a x^2dx=\frac{2}{3}\pi pa^3$. Вычислим объем тела $V=2\pi p\int\limits_0^a xdx=\pi pa^2$ и координату ξ его центра тяжести $C(\xi, \eta)$:

$$\xi=\frac{M}{V}=\frac{2}{3}a.$$

Так как $\eta=0$, то $C\left(\frac{2}{3}a, 0\right)$.

352. Определить координаты центра тяжести полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

Решение. Поверхность симметрична относительно оси Oz, поэтому центр тяжести лежит на этой оси. Вводя сферические координаты ρ, φ и θ (см. задачу 342) и выделяя элемент поверхности dS, приближенно имеем

$$dS=a\sin\varphi d\theta a d\varphi=a^2\sin\varphi d\varphi d\theta.$$

Статический момент dM элемента dS относительно плоскости xOy равен

$$dM=a^2\sin\varphi d\varphi d\theta a\cos\varphi=a^3\sin\varphi\cos\varphi d\varphi d\theta$$

(так как расстояние d этого элемента от плоскости xOy равно $d\approx a\cos\varphi$). Интегрируя по φ в пределах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и по θ в пределах $(0, 2\pi)$, найдем статический момент полусферической оболочки относительно плоскости xOy

$$M=a^3\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=2\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d(\sin\varphi)=\pi a^3.$$

Площадь поверхности S полусферы равна $S=2\pi a^2$, следовательно, координата ζ центра тяжести $C(\xi, \eta, \zeta)$ равна $\zeta=\frac{M}{S}=\frac{a}{2}$. Таким образом, $C(\xi, \eta, \zeta)=\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$.

Примечание. Под элементом поверхности dS понимаем площадь элементарного куска поверхности, вырезанного из нее двумя меридианными плоскостями и двумя плоскостями, параллельными плоскости xOy.

§ 10. Задачи из механики и физики

С помощью определенного интеграла решить следующие задачи:

353. Определить массу стержня длины $l = 10$ *см*, если линейная плотность стержня меняется по закону $\mu = 6 + 0{,}3\,x$ *кг/м*, где x — расстояние от одного из концов стержня.

Решение. Вычислим элемент массы $m\,([x,\ x + dx])$ стержня длиной dx с точностью до бесконечно малой высшего порядка, чем dx; имеем $m\,([x,\ x + dx]) = \mu\,(x)\,dx$,

откуда

$$m = \int_0^l \mu\,(x)\,dx = \int_0^l (6 + 0{,}3x)\,dx = 6l + \frac{0{,}3}{2}\,l^2 = \frac{l}{2}\,(12 + 0{,}3l).$$

Подставляя вместо l его значение и принимая во внимание размерности l и μ, находим $m = 75$ *кг*.

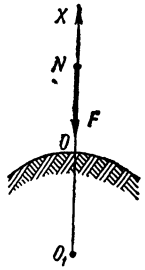

Рис. 150

354. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется на бесконечность?

Решение. На тело массы m действует сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тела от центра Земли и направленная к центру Земли O_1 $\boldsymbol{F} = \dfrac{c\boldsymbol{e}\,(N,\ O_1)}{(R + x)^2}$ (рис. 150).

Здесь c — постоянная, определяемая из условия, что на поверхности Земли ($x = 0$) сила F равна силе веса mg, $F = mg = \dfrac{c}{R^2}$, откуда $c = mgR^2$, R — радиус Земли; $\boldsymbol{e}\,(N,\ O_1)$ — единичный вектор, направленный из точки N к центру Земли O_1.

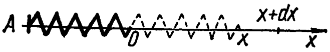

Рис. 151

Элементарная работа центральной силы определяется по формуле $dA = F_x dx$, где F_x — проекция силы $\boldsymbol{F}$ на направление Ox, dx — элементарное перемещение.

Для выражения полной работы имеем

$$A = -\,mgR^2 \int_0^h \frac{dx}{(R + x)^2} = mgR^2\,\frac{1}{R + x}\Bigg|_0^h = -\,\frac{mgRh}{R + h}.$$

Знак «—» обусловлен тем, что проекция силы $\boldsymbol{F}$ на направление Ox отрицательна.

Переходя к пределу при $h \to +\infty$, находим $A_\infty = -\,mgR$.

355. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 10 *см*, если сила в 1 *кГ* растягивает эту пружину на 1 *см*?

Решение. Реакция F упругой пружины, один конец которой закреплен, выражается согласно закону Гука формулой $F = cx$, где c — коэффициент жесткости пружины, x — деформация (рис. 151).

Поскольку для деформации пружины на 1 *см* требуется приложить силу в 1 *кГ*, постоянную c находим из условия 1 $кГ = c \cdot 1$ *см*, откуда $c = 1$ *кГ/см*.

Элементарная работа упругой силы (реакции пружины) приближенно (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем dx) определяется выражением

$$A([x,\ x+dx)] = -cxdx,$$

где dx — элементарное перемещение, направленное в сторону, противоположную силе F.

Полную работу найдем, проинтегрировав в пределах [0, 10] полученное выражение:

$$A = -c\int_0^{10} xdx = -50\,c \cdot см^2 = -50\,кГсм = -0{,}5\ кГм.$$

356. Цилиндр диаметром 20 *см* и длиной 80 *см* заполнен паром под давлением 10 $кГ \cdot см$. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается постоянной?

Решение. Для изотермического процесса справедлив закон Бойля — Мариотта

$$P = \frac{C}{V}$$

(P — давление; V — объем, заполненный газом; C — постоянная).

Обозначив через V_0 объем цилиндра, найдем постоянную C:

$$C = P_0V_0 = 10\,кГ/см^2 \cdot 8\pi \cdot 10^3\,см^3 = 8\pi \cdot 10^4\ кГсм.$$

Элементарная работа dA силы давления P при уменьшении высоты цилиндра на величину dh выражается формулой

$$dA = -\frac{\pi d^2}{4}Pdh,$$

где $d = 20$ *см* — диаметр цилиндра.

Так как объем, на который уменьшится объем пара, равен

$$dV = \frac{\pi d^2}{4}dh,$$

то $dh = \frac{4dV}{\pi d^2}$. Вся работа, затраченная на уменьшение объема пара вдвое, выразится интегралом

$$A = \int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}} dA = -\int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}} PdV = C\int_{\frac{V_0}{2}}^{V_0}\frac{dV}{V} = C\ln 2 \cong 8 \cdot 10^4 \cdot 3{,}1416 \times$$

$$\times\ 0{,}6931\ кГсм \approx 1740\ кГм.$$

357. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a, диаметр которого находится на поверхности воды.

Р е ш е н и е. Обозначим через $l(x)$ длину горизонтальной прямой, проведенной на стенке на расстоянии x от AB (рис. 152). Приняв полоску, содержащуюся между горизонтальными прямыми, отстоящими от AB на расстоянии x и $x + dx$, за прямоугольник с основанием $l(x)$ и высотой dx, можем приближенно (с точностью до бесконечно малых высшего порядка, чем dx) вычислить давление $P([x, x + dx])$, испытываемое этой полоской, применив правило гидростатики, согласно которому давление воды на полоску, погруженную в нее, равно площади полоски, умноженной на глубину погружения:

$$P([x, x+dx]) = xl(x)\,dx.$$

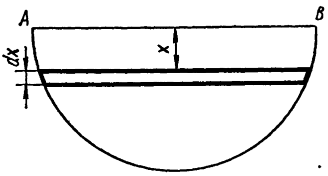

Рис. 152

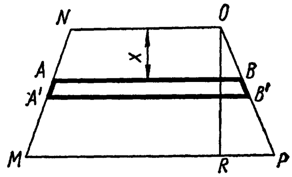

Рис. 153

Так как $l(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем dx, имеем

$$P([x, x+dx]) = 2x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

откуда все давление P равно

$$P = 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{2}{3}a^3$$

(на основании общей схемы применения определенного интеграла).

358. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой $a = 10$ *м*, верхнее $b = 6$ *м* и высота $h = 5$ *м*, если уровень погружения нижнего основания $c = 20$ *м*.

Р е ш е н и е. Пусть $l(x)$ — длина отрезка AB, параллельного основанию трапеции $MNOP$, проходящего на расстоянии x от верхнего основания (рис. 153). Очевидно,

$$l(x) = b + (a - b)\frac{x}{h}.$$

Выделяя элементарную полоску $A'ABB'$ шириной dx и повторяя рассуждения, приводимые в задаче 357, получим, что давление, испытываемое этой полоской, равно (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем dx):

$$P([x, x+dx]) = \left[b + (a-b)\frac{x}{h}\right](c - h + x)\,dx.$$

На основании общей схемы применения определенного интеграла имеем

$$P = \int_0^h \left\{b(c-h) + \left[b + \frac{(a-b)(c-h)}{h}\right]x + \frac{a-b}{h}x^2\right\}dx =$$
$$= bh(c-h) + \frac{h^2}{2}\left[b + \frac{(a-b)(c-h)}{h}\right] + \frac{h^3}{3}(a-b).$$

Подставляя численные значения a, b, c и h, находим

$$P = \left(450 + 225 + 33\frac{1}{3}\right)T = 708\frac{1}{3}T.$$

359. Скорость точки меняется по закону $v = v_0 + at$. Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0, T]$?

Решение. Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то получаем дифференциальное уравнение $\frac{ds}{dt} = v_0 + at$, решая которое, находим

$$s = \int_0^T (v_0 + at)\,dt = v_0T + \frac{aT^2}{2}.$$

360. Однородный шар радиуса R и плотности μ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Определить кинетическую энергию шара.

Решение. По определению кинетическая энергия частицы с массой dm, вращающейся вокруг некоторой оси, равна $dT = \frac{1}{2}dmv^2$, где v — линейная скорость частицы dm. Так как $v = \omega r$, где ω — угловая скорость тела; r — расстояние частицы dm от оси вращения, то

$$dT = \frac{1}{2}dm\omega^2r^2.$$

Рассмотрим элементарный объем (см. задачу 342)

$$dV = \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta d\rho,$$

масса которого dm равна (так как плотность шара постоянна и равна μ)

$$dm = \mu\rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta d\rho.$$

Поскольку $r = \rho\sin\varphi$, то $v = \rho\omega\sin\varphi$ и кинетическая энергия dT вращающейся массы dm вокруг диаметра с точностью до бесконечно малых высших порядков равна

$$dT = \frac{1}{2}\mu\omega^2\rho^4 \sin^3\varphi d\varphi d\rho d\theta.$$

Проинтегрировав выражение dT последовательно по θ (от 0 до 2π), по φ (от 0 до π) и по ρ (от 0 до R), найдем кинетическую энергию шара

$$T = \frac{\mu\omega^2}{2}\int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi\mu\omega^2R^5}{15}.$$

361. С какой силой притягивает материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью μ_0 материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

Решение. Выберем систему координат так, чтобы материальная точка M находилась на оси Oy на расстоянии a от начала координат (рис. 154). Выделим на оси Ox в точке A с абсциссой x элемент dx; этот элемент действует на точку M с силой dF, равной

$$dF = \frac{\gamma m\mu_0 dx}{a^2+x^2} e(M, A),$$

где $e(M, A)$ — единичный вектор, направленный из точки M в точку A; γ — гравитационная постоянная.

Компоненты вектора $dF = \{dF_x, dF_y\}$, очевидно, равны

$$dF_x = \frac{\gamma m\mu_0 dx}{a^2+x^2}\cos\alpha = \frac{x\gamma m\mu_0 dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dF_y = -\frac{\gamma m\mu_0 dx}{a^2+x^2}\sin\alpha = -\frac{a\gamma m\mu_0 dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

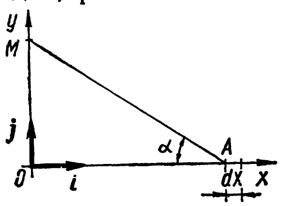

Рис. 154

Чтобы определить силу притяжения точки M всей материальной прямой, необходимо вычислить суммарное воздействие сил dF, т. е. проинтегрировать полученные выражения в пределах $(-\infty, +\infty)$

$$F = i\int_{-\infty}^{+\infty} dF_x + j\int_{-\infty}^{+\infty} dF_y \quad (i, j \text{ — единичные орты}).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dF_x = \gamma m\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma m\mu_0 \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dF_y = -a\gamma m\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a\gamma m\mu_0}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{2\gamma m\mu_0}{a},$$

то $F = -\frac{2\gamma m\mu_0}{a} j$.

362. Определить, с какой силой притягивает круглая пластинка радиуса a и постоянной поверхностной плотности μ_0 материальную точку P массы m, находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через ее центр Q на кратчайшем расстоянии PQ, равном b.

Решение. Выберем систему координат $xQyz$ так, чтобы плоскость xOy совпала с плоскостью пластинки, начало координат O поместим в точку Q, а ось Oz выберем так, чтобы отрезок QP был отрезком оси Oz длиной b (рис. 155). Выделим элемент пластины с измерениями $\rho d\varphi$ и $d\rho$; сила dF, с которой этот элемент действует на материальную точку, равна (с точностью до бесконечно малых более высоких порядков, чем $d\varphi$ и $d\rho$)

$$dF = \frac{m\gamma\mu_0\rho d\rho d\varphi}{b^2+\rho^2}\,\boldsymbol{e}(P, M),$$

где $\boldsymbol{e}(P, M)$ — единичный вектор, направленный из точки P в точку M, γ — гравитационная постоянная.

Представим dF в виде

$$dF = \boldsymbol{i}dF_x + \boldsymbol{j}dF_y + \boldsymbol{k}dF_z,$$

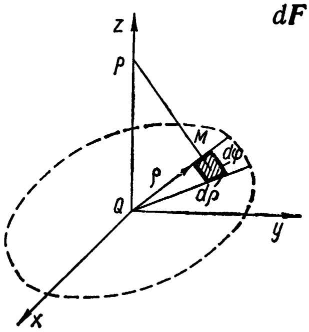

Рис. 155

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные орты; dF_x, dF_y, dF_z — проекции силы dF на соответствующие оси.

Чтобы вычислить суммарное воздействие всех элементов массы $\mu_0\rho d\rho d\varphi$, необходимо проинтегрировать выражение dF последовательно по φ (от 0 до 2π) и по ρ (от 0 до a). Но

$$\int_0^{2\pi} dF_x = 0, \quad \int_0^{2\pi} dF_y = 0,$$

так как для каждого элемента пластинки существует симметричный относительно начала координат элемент; если обозначить через $dF_x^{(1)}$ и $dF_x^{(2)}$ проекции на ось Ox сил $dF^{(1)}$ и $dF^{(2)}$, с которыми эти элементы притягивают точку P, то, очевидно, $dF_x^{(1)} + dF_x^{(2)} = 0$. Аналогично $dF_y^{(1)} + dF_y^{(2)} = 0$. Таким образом,

$$F = \boldsymbol{k}\int_0^a \left\{\int_0^{2\pi} dF_z\right\}.$$

Так как $dF_z = (dF, \boldsymbol{k}) = -m\gamma\mu_0\rho d\rho d\varphi \dfrac{b}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$, где $(dF, \boldsymbol{k})$ — скалярное произведение векторов dF и $\boldsymbol{k}$, то

$$F = -\boldsymbol{k}\int_0^a \left\{\int_0^{2\pi} \frac{\gamma\mu_0 mb\rho}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi\right\} d\rho = -\boldsymbol{k}2\pi\gamma\mu_0 mb\int_0^a \frac{\rho d\rho}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\boldsymbol{k}\frac{2\pi\gamma\mu_0 mb}{\sqrt{b^2+\rho^2}}\Bigg|_a^0 = -\boldsymbol{k}2\pi\gamma\mu_0 m\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Примечание. В последних двух примерах мы интегрировали вектор-функции.

Если $F(x) = \alpha f(x)$, где α — фиксированный вектор, не зависящий от x, а $f(x)$ — интегрируемая на $[a, b]$ функция, то полагают по определению

$$\int_a^b F(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

363. Согласно закону Торричелли скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести, h — высота уровня жидкости над отверстием и $c = 0,6$ — опытный коэффициент.

В какое время опорожнится наполненная доверху вертикальная цилиндрическая бочка диаметром $D = 1$ *м* и высотой $H = 2$ *м* через круглое отверстие в дне диаметра $d = 1$ *см*?

Решение. В процессе истечения жидкости через отверстие диаметра d со скоростью v объемный расход составит $\frac{\pi d^2}{4}v$. Тогда за промежуток времени dt будем наблюдать изменение объема: $dV = \frac{\pi d^2}{4} v dt$.

С другой стороны, $dV = -\frac{\pi D^2}{4} dh$. Приравнивая оба выражения, получаем простейшее дифференциальное уравнение $d^2c\sqrt{2gh}\times$ $\times dt = -D^2dh$, интегрируя которое, находим

$$\int_0^T dt = -\int_H^0 \frac{D^2}{d^2c\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}};$$

$$T = \frac{\sqrt{2}D^2\sqrt{H}}{cd^2\sqrt{g}} = \frac{2\cdot 10^4}{0,6\sqrt{9,81}}\ сек \approx$$

$$\approx \frac{10^5}{9,405}\ сек \approx 10\,633\ сек \approx 3\ час.$$

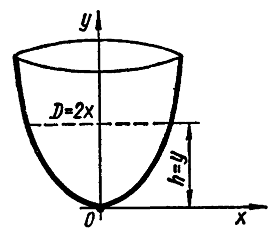

Рис. 156

364. Какую форму должен иметь сосуд, представляющий собой тело вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении было равномерным.

Решение. Рассмотрим сосуд, представляющий собой тело, ограниченное поверхностью вращения кривой $y = y(x)$ вокруг оси Oy, жидкость из которого вытекает вдоль оси Oy через отверстие, находящееся в начале координат (рис. 156). В задаче 363 было показано, что $dt = -\frac{cD^2}{\sqrt{h}}dh$, где c — некоторая постоянная. Для принятой модели $h = y$; $D = 2x$. Таким образом, $\frac{dy}{dt} = c_1\frac{\sqrt{y}}{x^2}$, где $c_1 = -\frac{1}{4c} = \text{const}$.

По условию задачи $\frac{dy}{dt} = c_2$ ($c_2 = \text{const}$), отсюда $c_1\frac{\sqrt{y}}{x^2} = c_2$, $y =$ $= ax^4$, где $a = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \text{const}$.

365. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству.

Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 *г* радия, а через время $T = 1600$ лет его количество уменьшится в два раза.

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляет Q *г*. Тогда за промежуток времени $t - t_0$ масса $Q_0 - Q$ подверглась распаду. Скорость распада равна

$$\frac{d(Q_0 - Q)}{dt} = -\frac{dQ}{dt}.$$

По условию задачи

$$-\frac{dQ}{dt} = cQ. \tag{1}$$

Определение константы c и составляет предмет задачи. Разделяя в дифференциальном уравнении (1) переменные и интегрируя в пределах $[t_0, t]$, получаем

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -c(t - t_0), \tag{2}$$

откуда

$$Q = Q_0 e^{-c(t-t_0)}. \tag{3}$$

Из условия задачи следует, что при $t = T = 1600$ лет, $Q = \frac{Q_0}{2}$. Подставляя в (2) T вместо t и $\frac{Q_0}{2}$ вместо Q, найдем $\ln 2 = cT$, откуда $c = \frac{\ln 2}{T}$.

Подставив полученное c в (3), получим

$$Q = Q_0 e^{-\ln 2\frac{(t-t_0)}{T}} = Q_0 2^{-\frac{(t-t_0)}{T}}.$$

Так как $t_0 = 0$, $T = 1600$ лет, то закон распада выражается формулой $Q = Q_0 2^{-\frac{t}{1600}}$.

366. Для случая процесса второго порядка скорость химической реакции, переводящей вещество A в вещество B, пропорциональна произведению концентрации этих веществ.

Какой процент вещества B будет содержаться в сосуде через $t = 1$ *час*, если при $t = 0$ *мин* имелось 20% вещества B, а при $t = 15$ *мин* его стало 80%?

Решение. Пусть в сосуде объема V содержатся объемы V_A вещества A и V_B вещества B. Приращение V_B в случае перехода вещества A в вещество B, очевидно, имеет вид

$$dV_B = -dV_A,$$

а скорость реакции будет

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_B}{dt} = -\frac{dV_A}{dt}.$$

По условию

$$\frac{dV_B}{dt} = c\frac{V_A}{V}\cdot\frac{V_B}{V}, \tag{1}$$

где c — константа, подлежащая определению. Так как $V_A = V - V_B$, дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{c(V - V_B)V_B}{V^2}. \tag{2}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим (используя условие задачи)

$$\int_{0,2V}^{0,8V} \frac{dV_B}{V_B(V - V_B)} = \frac{c}{V^2}\int_0^{15} dt,$$

откуда $\frac{c}{V} = \frac{4}{15}\ln 2$.

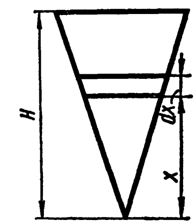

Рис. 157

Подставляя полученное значение $\frac{c}{V}$ в уравнение (2) и разделяя переменные, находим

$$\frac{dV_B}{V_B(V - V_B)} = \frac{4}{15}\ln 2\,\frac{dt}{V}. \tag{3}$$

Допустим, через 60 *мин* в объеме V будет содержаться V_B' вещества B; интегрируя уравнение (3), получаем

$$\int_{0,2V}^{V_B'} \frac{dV_B}{V_B(V - V_B)} = \frac{4}{15}\,\frac{\ln 2}{V}\int_0^{60} dt,$$

откуда

$$\ln\frac{V_B'}{V - V_B'} = \ln 2^{14},\quad V_B' = \frac{2^{14}}{1 + 2^{14}}V \simeq 0,999938V.$$

Таким образом, через 1 час в сосуде будет содержаться около 99,9938% вещества B.

367. Согласно закону Гука относительное удлинение ε стержня пропорционально напряжению силы σ в соответствующем поперечном сечении, т. е. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, где E — модуль Юнга.

Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания равен R, высота конуса H и удельный вес γ.

Р е ш е н и е. Стержень удлинится под действием силы собственного веса.

Рассмотрим поперечное сечение стержня (рис. 157), расположенное на расстоянии x от вершины ($0 < x < H$) и представляющее собой круг, обозначим радиус этого круга через r. Вес кругового конуса, радиус основания которого r, а высота x, равен величине $\frac{\pi r^2 x\gamma}{3}$; напряжение силы σ в этом поперечном сечении равно, очевидно,

$$\sigma = \frac{\pi r^2 x\gamma}{3} : \pi r^2 = \frac{x\gamma}{3}.$$

Обозначим через Δdx удлинение элемента стержня длины dx; оно равно $\Delta dx = \varepsilon dx = \frac{\gamma x}{3E} dx$.

Полное удлинение вычислим с помощью интеграла

$$\Delta \int_0^H dx = \frac{\gamma}{3E} \int_0^H x dx,$$

откуда $\Delta H = \frac{\gamma H^2}{6E}$.

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

1°. Формула прямоугольников. Если функция $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$; $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$; $y(x_i) = y_i$, то

$$\int_a^b y(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi), \qquad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

2°. Формула трапеций. Если $y = y(x) \in C^{(2)}[a, b]$, то при тех же обозначениях имеем

$$\int_a^b y(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

где $R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\eta), \qquad a \leqslant \eta \leqslant b.$

3°. Формула парабол (формула Симпсона). Пусть $y = y(x) \in C^{(4)}[a, b]$. Полагая $n = 2k$, можно получить формулу Симпсона

$$\int_a^b y(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2})] + R_n,$$

где $R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(IV)}(\zeta), \qquad a \leqslant \zeta \leqslant b.$

Примечание. Если имеет место формула

$$\|z - \tilde{z}\|_0 = \max|z_i - \tilde{z}_i| \leqslant Mh^n,$$

где $\tilde{z}_i$ — приближенное значение величины z_i, вычисленное по некоторой формуле, то говорят, что эта формула в некотором классе функций имеет n-й порядок точности ($M > 0$ постоянная, не зависящая от h).

Таким образом, формула прямоугольников имеет в классе $y \in C^{(1)}[a, b]$ первый порядок точности, формула трапеций в классе $y \in C^{(2)}[a, b]$ имеет второй порядок точности, формула парабол в классе $y \in C^{(4)}[a, b]$ имеет четвертый порядок точности.

Часто вместо нормы $\|\cdot\|_0$ берут другие специальные нормы, выбор которых зависит от характера решаемых задач. В дальнейшем отрезок $[a, b]$ с выделенными на нем точками $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ будем называть равномерной сеткой с шагом h; точки деления x_i называются узлами сетки.

368. Применяя формулу прямоугольников $(n = 12)$, приближенно вычислить $I = \int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$ и результат сравнить с точным ответом.

Решение. Рассмотрим равномерную сетку на отрезке $[0, 2\pi]$ с шагом $h = \frac{\pi}{6}$, тогда $x_i = i\frac{\pi}{6}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 12)$. По формуле прямоугольников имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx \approx \frac{\pi}{6}\sum_{i=0}^{11} i\frac{\pi}{6}\sin i\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{36}\sum_{i=0}^{11} i\sin\frac{i\pi}{6} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{36}\left(\sum_{i=1}^{11}\cos ix\right)'_{x=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{\cos 6x\cdot\sin\frac{11}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'_{x=\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{36}\left[\frac{\left(6\sin 6x\cdot\sin\frac{11}{2}x - \frac{11}{2}\cos\frac{11}{2}x\cdot\cos 6x\right)\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos 6x\sin\frac{11}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]\right|_{x=\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{36}\,\frac{\left(\frac{11}{2}\cos\frac{11}{12}\pi\sin\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11}{12}\pi\right)}{\sin^2\frac{\pi}{12}} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{72}\cdot\frac{11\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin^2\frac{\pi}{12}} = -\frac{\pi^2}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{6}(2+\sqrt{3}) \approx -6{,}2961$$

(взяли $\pi \approx 3{,}14$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$). Точное значение интеграла $I = -2\pi = -6{,}28\ldots$

369. С помощью формулы трапеций вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x\,dx} \qquad (n=6)$$

и оценить погрешность формулы.

Решение. Построим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ равномерную сетку с шагом $h\approx\frac{\pi}{12}$: $\left\{x_i=i\frac{\pi}{12};\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\right\}$. По формуле трапеций

$$I=\frac{\pi}{12}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos 2i\frac{\pi}{12}}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos i\frac{\pi}{6}}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{14+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{7}+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{14-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{48}(2+\sqrt{3}+\sqrt{14+\sqrt{3}}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{13}+\sqrt{14-\sqrt{3}})\approx$$

$$\approx\frac{3{,}142}{48}(3{,}732+3{,}966+3{,}873+3{,}742+3{,}606+3{,}502)\approx$$

$$\approx\frac{3{,}142\cdot 22{,}421}{48}\approx 1{,}4676.$$

Оценим погрешность формулы трапеций; для этого оценим R_n. Очевидно, $|R_n|\leqslant\frac{(b-a)h^2}{12}\max\limits_{a\leqslant\eta\leqslant b}|f''(\eta)|$.

В нашем случае $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}}\left|\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\right)''\right|\leqslant\frac{17}{14\sqrt{14}}$.

Таким образом, $|R_n|\leqslant\frac{17\pi^3}{2^8\cdot 3^3\cdot 7\sqrt{14}}<0{,}002$.

370. С помощью формулы Симпсона вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2} \qquad (k=2).$$

Решение. Деля отрезок [0, 1] на четыре равных части $\left(h=\frac{1}{4}\right)$, по формуле Симпсона имеем $I\approx\frac{1}{12}[(y_0+y_4)+4(y_1+$ $+y_3)+2y_2]\approx\frac{1}{12}(1+0{,}5+3{,}76471+2{,}56+1{,}6)=0{,}78539$.

371. Принимая $n = 10$, вычислить константу Каталана

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Решение. Построим равномерную сетку с шагом $h = 0{,}1$ $\{x_i = ih;\ i = 0, 1, \ldots, 10\}$ и вычислим приближенно G по формуле Симпсона

$$G = \frac{1}{30}\,[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)].$$

Вычисляя соответствующие значения функции с точностью до пяти знаков после запятой, получаем $y_0 = 1$; $y_{10} = 0{,}78540$; $y_0 + y_{10} = 1{,}78540$; $y_1 = 0{,}99668$; $y_3 = 0{,}97152$; $y_5 = 0{,}92730$; $y_7 = 0{,}87246$; $y_9 = 0{,}81424$; $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 4{,}58220 = 18{,}32880$; $y_2 = 0{,}98698$; $y_4 = 0{,}95127$; $y_6 = 0{,}900070$; $y_8 = 0{,}84343$; $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3{,}68238 = 7{,}36476$. Подставляя вычисленные значения, находим

$$G \approx \frac{1{,}78540 + 18{,}32880 + 7{,}36476}{30} = 0{,}915965.$$

372. Пользуясь формулой $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$, вычислить число π с точностью до 10^{-4}.

Решение. Мы уже вычислили в задаче 370 интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ с помощью формулы Симпсона, взяв $k = 2$. Оценим погрешность формулы. Поскольку (см. пример 128, гл. II)

$$\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n + 1)\operatorname{arcctg} x],$$

то $\left|\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{(4)}\right| \leqslant 4!$ при $x \in [0, 1]$, следовательно,

$$|R_n| \leqslant \frac{24}{180} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{1}{1920} \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

Используя результат задачи 370, находим $\pi \approx 4 \cdot 0{,}78539 = 3{,}14156$. Сравнивая полученный результат с табличным $\pi = 3{,}141592\ldots$, видим, что все четыре цифры после запятой правильны.

373. Вычислить $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Вычислять интеграл будем по формуле Симпсона; поскольку $|(e^{x^2})^{(4)}| \leqslant 228$ при $x \in [0, 1]$, то шаг сетки выбираем из условия (оценивая погрешность формулы парабол) $h^4 < \frac{10^{-3} \cdot 15}{19} \approx$ $\approx 8 \cdot 10^{-4}$.

Деля отрезок [0, 1] на 10 равных частей, получаем

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \simeq \frac{1}{30} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)].$$

Вычислим значения функции e^{x^2} в узлах сетки с точностью до 10^{-5} (можно вычислить, используя, например, формулу Тейлора). Имеем $y_0 = 1$, $y_{10} \approx 2{,}71828$, $y_1 \approx 1{,}01004$, $y_3 \approx 1{,}09417$; $y_5 \approx 1{,}28733$, $y_7 \approx$ $\approx 1{,}63230$, $y_9 \approx 2{,}24789$, $y_2 \approx 1{,}04081$; $y_4 \approx 1{,}17351$, $y_6 \approx 1{,}43332$, $y_8 \approx 1{,}89648$, $y_0 + y_{10} \approx 3{,}71828$; $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \approx 4 \times$ $\times 7{,}27173 = 29{,}08692$; $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) \approx 2 \cdot 5{,}54412 = 11{,}08824$;

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{30} (3{,}71828 + 29{,}08692 + 11{,}08824) = \frac{43{,}89344}{30} \approx 1{,}46311.$$

Получили три верных цифры после запятой.

374. Вычислить $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. При $x \to 0$ $(e^x - 1) \ln \frac{1}{x} \to 0$, поэтому интеграл Римана существует. Производная четвертого порядка подынтегральной функции имеет весьма сложный вид и оценить ее трудно; более того, уже первая производная подынтегральной функции неограничена на [0, 1]. В принципе мы можем воспользоваться формулой Симпсона, однако оценку погрешности произвести не сможем. Поэтому поступим следующим образом. Разложим по формуле Тейлора функцию $1 - e^x$ по степеням x:

$$1 - e^x = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right) + R(x),$$

где

$$R(x) = \frac{e^c x^7}{7!}, \quad 0 < c < 1.$$

Запишем подынтегральную функцию в виде

$$f(x) = (1 - e^x) \ln x$$

и обозначим через $\varphi(x)$ функцию

$$\varphi(x) = -\ln x \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right).$$

Очевидно, $f(x) = \varphi(x) + R_1(x)$, где $R_1(x) = \ln x R(x)$. Оценим $|R_1(x)| = \left|\frac{\ln x \cdot e^c x^7}{7!}\right|$ при $x \in [0, 1]$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} x^7 \ln x = 0$;

$\ln 1 = 0$, то функция $|z| = |x^7 \ln x|$ достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке отрезка $[0, 1]$. Дифференцируя $z(x)$, получаем $z'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$. Приравнивая нулю $z'(x)$, находим, что в точке $x = e^{-\frac{1}{7}}$ функция $|z(x)|$ достигает абсолютного экстремума, равного

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |z(x)| = \left| -\frac{1}{7} e^{-1} \right| = \frac{1}{7e}.$$

Так как $|R(x)| < \frac{e}{7!}$ при $x \in [0, 1]$, получаем оценку $|f(x) - \varphi(x)| = |R_1(x)| < \frac{1}{7 \cdot 7!}$. Таким образом,

$$\left| \int_0^1 (f(x) - \varphi(x))\, dx \right| \leqslant \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{1}{7 \cdot 7!} < 10^{-4},$$

поэтому вместо интеграла функции $f(x)$ будем вычислять интеграл от функции $\varphi(x)$. Заданная точность будет обеспечена, если в процессе вычисления интеграла функции $\varphi(x)$ погрешность вычислений не превзойдет 10^{-4}.

Интегрируя функцию $\varphi(x)$ по частям, имеем

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \int_0^1 \varphi(x)\, dx = \psi(x) \ln x \Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \frac{x^6}{7!} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{6 \cdot 6!} + \frac{1}{7 \cdot 7!},$$

где $\psi(x) = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{7!} \right)$;

$$\psi(x) \ln x \big|_0^1 = \psi(1) \cdot \ln 1 - \lim_{x \to 0} \psi(x) \ln x = 0.$$

С точностью до 10^{-6} имеем

$$\frac{1}{4} = 0{,}250000; \quad \frac{1}{18} = 0{,}055556; \quad \frac{1}{96} = 0{,}010417;$$

$$\frac{1}{600} = 0{,}001667; \quad \frac{1}{6 \cdot 6!} = 0{,}000231;$$

$$\int_0^1 (1 - e^x) \ln x dx \approx 0{,}250000 + 0{,}055556 + 0{,}010417 + 0{,}001667 +$$

$$+ 0{,}000231 = 0{,}317871 \approx 0{,}3179.$$

375. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл вероятностей $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Решение. Интеграл сходится, поэтому $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, A_1 > 0$ такое, что при $A \geqslant A_1$

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon.$$

Если мы нашли A_1, то можем записать при $A \geqslant A_1$

$$I = \int_0^A e^{-x^2}dx + R, \text{ где } R = \int_A^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Возьмем $\varepsilon = 10^{-3}$ и постараемся определить оптимальное A, т. е. такое, чтобы промежуток $[0, A]$ имел по возможности небольшую длину. Проще всего поступить следующим образом: допустим, мы нашли такое A, что $\int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon$; тогда и интеграл $\int\limits_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon$;

$$0 < \int_A^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_A^{A+1} e^{-x^2}dx = e^{-\xi^2} < \varepsilon,$$

где $A < \xi < A + 1$ (по теореме о среднем).

Полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\xi > \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Подставляя $\varepsilon = 10^{-3}$, получим

$$\xi > \sqrt{\ln 1000} \approx \sqrt{6{,}907755} \approx 2{,}628$$

и в качестве A можем взять $A = 2{,}6$.

Можно получить более тонкую оценку для A. Допустим, найдено такое A, что

$$I_1 = \int_A^{+\infty} e^{-x^2}dx < \varepsilon.$$

Произведя замену $x^2 = t$ $\left(dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}\right)$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{A^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt < \frac{1}{2A}\int_{A^2}^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

Из условия $\dfrac{e^{-A^2}}{2A} < \varepsilon$ находим $Ae^{A^2} > \dfrac{1}{2\varepsilon}$, $\ln A + A^2 > \ln\dfrac{1}{2\varepsilon}$, откуда $A > \sqrt{\ln\dfrac{1}{2\varepsilon} - \ln A}$. Так как должно быть $A > 2$ при $\varepsilon = 10^{-3}$, под радикалом можем взять $\ln 2$ вместо $\ln A$

$$A > \sqrt{\ln 1000 - 2\ln 2} \approx \sqrt{6{,}90775 - 1{,}38628} = \sqrt{5{,}52147} \approx 2{,}35.$$

Таким образом, взяв, например, $A = 2{,}4$, можем записать

$$0 < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int_0^{2{,}4} e^{-x^2}dx < 10^{-3}.$$

Наша задача сводится теперь к вычислению с точностью до 10^{-3} интеграла

$$\bar{I} = \int_0^{2,4} e^{-x^2} dx.$$

Мы могли бы поступить здесь, как и в предыдущей задаче 374: аппроксимировать функцию e^{-x^2} полиномом; в вычислительной практике приятнее всего иметь дело с полиномами. Но в связи с тем, что промежуток интегрирования имеет длину 2,4, а степени $(2,4)^n$ растут довольно быстро, нам пришлось бы для обеспечения нужной точности взять больше 15 членов разложения в формуле Тейлора.

Интеграл $\bar{I}$ будем вычислять по формуле Симпсона. Найдем $y^{(4)}$ функции $y = e^{-x^2}$. Поскольку $y^{(4)} = 4y(3 - 12x^2 + 4x^4)$, то $|y^{(4)}(x)| \leqslant 4(3 - 12 \cdot 5,76 + 4 \cdot 33,1776)$, $x \in [0;\ 2,4]$, так как $|e^{-x^2}| \leqslant 1$, а функция $z = 3 - 12x^2 + 4x^4$ монотонно возрастает при $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Таким образом, $|y^{(4)}(x)| \leqslant 4 \cdot 66,5904 = 266,3616$, $0 \leqslant x \leqslant 2,4$. Оценивая погрешность R формулы Симпсона

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \qquad a \leqslant \xi \leqslant b,$$

находим для нашего случая

$$|R| \leqslant \frac{2,4 \cdot 266,3616}{180} h^4 \approx 3,55128 h^4.$$

Из условия $|R| < 10^{-3}$ получаем

$$h < \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3,55128}} < \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3,5}} = 0,1 \sqrt[4]{\frac{10}{3,5}} \approx 0,13.$$

Для получения заданной точности можем взять $h = 0,1$.

Рассмотрим сетку на отрезке $[0;\ 2,4] : \omega_h = \{x_i = 0,1i;\ i = 0, 1, \ldots, 24\}$. Для обеспечения заданной точности значения подынтегральной функции в узлах сетки будем вычислять с пятью значащими цифрами после запятой. Имеем $y_0 = 1$; $y_{24} \simeq 0,00315$; $y_1 \approx 0,99005$; $y_2 \approx 0,96079$; $y_3 \approx 0,91393$; $y_4 \approx 0,85214$; $y_5 \approx 0,77880$; $y_6 \approx 0,69768$; $y_7 \approx 0,61263$; $y_8 \approx 0,52729$; $y_9 \approx 0,44486$; $y_{10} \approx 0,36788$; $y_{11} \approx 0,29820$; $y_{12} \approx 0,23693$; $y_{13} \approx 0,18452$; $y_{14} \approx 0,14086$; $y_{15} \approx 0,10540$; $y_{16} \approx 0,07731$; $y_{17} \approx 0,05558$; $y_{18} \approx 0,03916$; $y_{19} \approx 0,02705$; $y_{20} \approx 0,01832$; $y_{21} \approx 0,01216$; $y_{22} \approx 0,00791$; $y_{23} \approx 0,00504$; $y_0 + y_{24} \approx 1,00315$;

$$4 \sum_{j=1}^{12} y_{2j-1} \approx 4 \cdot 4,42822 = 17,71288;$$

$$2 \sum_{j=1}^{11} y_{2j} \approx 2 \cdot 3,92627 = 7,85254;$$

$$\bar{I} \approx \frac{1}{30}\left(y_0 + y_{24} + 4\sum_{j=1}^{12} y_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{11} y_{2j}\right) \approx \frac{26,56857}{30} \approx 0,8856.$$

Рассмотрим точное значение $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0{,}8862\ldots$, а также ошибку $R=I-\bar{I}=0{,}0006=6\cdot10^{-4}$. Полученная точность превысила заданную.

376. Приближенно найти длину эллипса, полуоси которого $a=10$ и $b=6$.

Решение. Параметрическими уравнениями эллипса являются $x=10\cos t$, $y=6\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, а длина его дуги

$$L=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100\cos^2 t+36\sin^2 t}\,dt=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{17+8\cos 2x}\,dx.$$

Вычислим интеграл с помощью формулы Симпсона, разделив отрезок $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ на 6 равных частей $\left(h=\frac{\pi}{12}\right)$. Будем вычислять значения подынтегральной функции в узлах сетки $\omega_h=\{ih;\ i=0,1,2,3,4,5,6\}$:

$$y_0=5,\ y_6=3,\ y_1=\sqrt{17+4\sqrt{3}}\approx\sqrt{23{,}928}\approx4{,}892;$$
$$y_2=\sqrt{17+4}=\sqrt{21}\approx4{,}583,\quad y_3=\sqrt{17}\approx4{,}124;\quad y_4=\sqrt{17-4}=$$
$$=\sqrt{13}\approx3{,}606;\ y_5=\sqrt{17-4\sqrt{3}}\approx\sqrt{10{,}072}\approx3{,}173;\quad y_0+y_6=8;$$
$$4(y_1+y_3+y_5)\approx48{,}756;\ 2(y_2+y_4)\approx16{,}378.$$

Подставляя полученные результаты в формулу парабол, находим:

$$L\approx\frac{2\pi}{9}(8+48{,}756+16{,}378)=\frac{6{,}283\cdot73{,}134}{9}\approx51{,}047.$$

377. Построить по точкам график функции $y=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, приняв $\Delta x=\frac{\pi}{3}$.

Решение. Рассмотрим сетку $\omega_h=\left\{x_i=\frac{i\pi}{3};\ i=0,1,2,3,4,5,6\right\}$. Значения функции $y(x)$ в узлах сетки:

$$y_0=0;\quad y_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\,dx;\quad y_2=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\,dx;\quad y_3=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx;$$
$$y_4=\int\limits_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\,dx;\quad y_5=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\,dx;\quad y_6=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Задача сводится к приближенному вычислению шести интегралов.

Рассмотрим на отрезке $[0, 2\pi]$ сетку $\bar{\omega}_h = \left\{x_i = i\frac{\pi}{12};\ i = 0, 1, \ldots, 24\right\}$; очевидно, узлы сетки ω_h являются узлами сетки $\bar{\omega}_h$. Вычислять интегралы будем по формуле Симпсона. Находя значения функции дискретного аргумента $\bar{y}_i = \frac{\sin x_i}{i}$ в узлах сетки $\bar{\omega}_h$, получим

$\bar{y}_0 = \lim\limits_{i\to 0} \frac{\sin x_i}{i} = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618$; $\bar{y}_1 \approx 0{,}2590$; $\bar{y}_2 = 0{,}25$; $\bar{y}_3 \approx 0{,}2359$; $\bar{y}_4 \approx 0{,}2165$; $\bar{y}_5 \approx 0{,}1932$; $\bar{y}_6 \approx 0{,}1666$; $\bar{y}_7 \approx 0{,}1380$; $\bar{y}_8 \approx 0{,}1083$; $\bar{y}_9 \approx 0{,}0785$; $\bar{y}_{10} = 0{,}05$; $\bar{y}_{11} \approx 0{,}0235$; $\bar{y}_{12} = 0$; $\bar{y}_{13} \approx -0{,}0199$; $\bar{y}_{14} \approx -0{,}0357$; $\bar{y}_{15} \approx -0{,}0471$; $\bar{y}_{16} \approx -0{,}0541$; $\bar{y}_{17} \approx -0{,}0568$; $\bar{y}_{18} \approx -0{,}0555$; $\bar{y}_{19} \approx -0{,}0508$; $\bar{y}_{20} \approx -0{,}0433$; $\bar{y}_{21} \approx -0{,}0336$; $\bar{y}_{22} \approx -0{,}0227$; $\bar{y}_{23} \approx -0{,}0112$; $\bar{y}_{24} = 0$.

Очевидно,

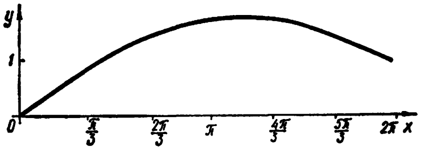

Рис. 158

$$y_1 \approx \frac{1}{3}\left[\bar{y}_0 + \bar{y}_4 + 4(\bar{y}_1 + \bar{y}_3) + 2\bar{y}_2\right] = \frac{2{,}9579}{3} \approx 0{,}9859;$$

$$y_2 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_8 + 4\sum_{k=1}^{4} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{3} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{4{,}9407}{3} \approx 1{,}6469;$$

$$y_3 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{12} + 4\sum_{k=1}^{6} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{5} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{5{,}5570}{3} \approx 1{,}8523;$$

$$y_4 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{16} + 4\sum_{k=1}^{8} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{7} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{5{,}1635}{3} \approx 1{,}7211;$$

$$y_5 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{20} + 4\sum_{k=1}^{10} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{9} y_{2k}\right) = \frac{4{,}5247}{3} \approx 1{,}5082;$$

$$y_6 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{24} + 4\sum_{k=1}^{12} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{11} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{4{,}2568}{3} \approx 1{,}4189.$$

При $x \in (0, \pi)$ $y'(x) > 0$, а при $x \in (\pi, 2\pi)$ $y'(x) < 0$; $y''(x) < 0$ при $x \in (0, \frac{4}{3}\pi)$. Таким образом, $y(x)$ в интервале $(0, \pi)$ возрастает, а в интервале $(\pi, \frac{4\pi}{3})$ убывает; на интервале $(0, \frac{4\pi}{3})$ функция $y(x)$ выпукла сверху. График функции изображен на рис. 158.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Указание. Воспользоваться тождеством

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

2. Пусть $0 < \xi < 1$ и функция $f(x)$ на отрезке $[0, \xi]$ монотонно возрастает, а на отрезке $[\xi, 1]$ монотонно убывает; ее абсолютный максимум на отрезке равен $M = f(\xi)$.

Доказать, что $-\frac{M - f(0)}{n} \leqslant \Delta_n \leqslant \frac{M - f(1)}{n}$, где $\Delta_n = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \times$ $\times \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3. Пусть $f(x)$ — функция с ограниченным изменением на отрезке $[0, 1]$. Показать, что для Δ_n из задачи 2 справедлива оценка $|\Delta_n| \leqslant \frac{V}{n}$, где V — полное изменение $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Примечание. По определению $V = \sup\left\{\sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1} - f(x_i)|\right\}$,

где множество в фигурных скобках рассматривается при всех возможных разбиениях отрезка $[a, b]$. Функции, имеющие конечное полное изменение, называются функциями с ограниченным изменением.

4. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$, а $f''(x)$ интегрируема на этом отрезке. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Delta_n'$, где $\Delta_n' = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left[a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}\right]$.

5. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Delta_n''$, где $\Delta_n'' = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2n+1}\left[f(a) + 2\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + 2k\frac{b-a}{2n+1}\right)\right]$.

6. Пусть функция $f(x) > 0$ интегрируема на отрезке $[a, b]$; обозначим $f_{kn} = f(a + k\delta_n)$, $\delta_n = \frac{b-a}{n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f_{kn} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n} f_{2n} \ldots f_{nn}} = e^{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f(x)dx};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f_{kn}}} = \frac{b-a}{\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}}.$$

Вычислить интегралы:

7. $\displaystyle\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx.$

8. $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$ 9. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ 11. $\displaystyle\int_{0}^{1} (\arcsin x)^4\,dx.$

12. Решить уравнение $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}.$

13. Решить уравнение $\displaystyle\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}.$

14. Найти абсолютные экстремумы функции $f(x)=\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt$ на отрезке $[-1,\ 1]$.

15. Исследовать на экстремум и найти точки перегиба графика функции $y=\displaystyle\int_{0}^{x} (t-1)(t-2)^2\,dt.$

16. Доказать тождество $\displaystyle\int_{0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_{0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}.$

Указание. Найти производную функции

$$F(x)=\int_{0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_{0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt.$$

17. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна и $f(x)=\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt$, то $f(x)$ тождественно равна нулю.

18. Зная, что порядок роста положительной функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ выше, тот же самый или ниже порядка роста степени x^m, доказать, что функция $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ имеет соответствующий порядок роста по отношению к степени x^{m+1}.

19. Сравнить порядок роста интеграла $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ при $x\to+\infty$ по отношению к $f(x)$ для следующих функций $f(x)$:

а) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; б) e^x; в) xe^{x^2}; г) $\ln x$.

20. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}$.

21. О непрерывной функции $f(x)$ известно, что она нечетная на отрезке $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ и имеет период, равный T. Доказать, что $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ есть также периодическая функция с тем же периодом.

22. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$ на отрезке $[0, 2]$.

23. При каком a среднее значение функции $y = \ln x$ на отрезке $[1, a]$ равно средней скорости изменения функции на этом отрезке?

24. Показать, что $\dfrac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

Указание. Воспользоваться неравенствами $4 - 2x^2 \leqslant 4 - x^2 - x^3 \leqslant 4 - x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

25. Показать, что $0{,}5 < \int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} \leqslant \dfrac{\pi}{6}$ $\quad (n \geqslant 1)$.

26. Показать, что $0{,}78 < \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} < 0{,}93$.

Указание. Для оценки сверху воспользоваться неравенством Коши — Буняковского.

27. Доказать равенство $\int\limits_{100}^{200} \dfrac{x^3 dx}{x^4 + x + 1}\,dx = \ln 2 - \dfrac{\theta}{3 \cdot 10^6}$, $\quad 0 < \theta < 1$.

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\frac{x^3}{x^4 + x + 1} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x(x^4 + x + 1)}.$$

28. Доказать равенство $\int\limits_{100}^{200} \sin \pi x^2 dx = \dfrac{\theta}{200\pi}$, $\quad |\theta| < 1$.

29. Доказать равенство $\int\limits_{100}^{200} \dfrac{\sin \pi x}{x}\,dx = \dfrac{0{,}005}{\pi} + \dfrac{2\theta}{\pi^3 \cdot 10^6}$, $\quad |\theta| < 1$.

Исследовать сходимость следующих интегралов:

30. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$. **31.** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{1 + x^2 \sin^2 x}$. **32.** $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{e^x - \cos x}$.

33. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^\alpha (x + 2)}{x + 1}\,dx$. **34.** $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x\,dx$. **35.** $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\ln \sin x}{x}\,dx$. **36.** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + (\ln x)^n}$.

37. $\int\limits_0^{+\infty} x^x e^{-x^n}\,dx$. **38.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$.

39. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^2x^{n-1}(1-x)\,dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} n^2x^{n-1}(1-x)\,dx.$$

40. Доказать, что если интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

41. Доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to+0}\alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t)\,dt = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$, предполагая, что интеграл в левой части и предел в правой части имеют смысл.

42. Доказать равенство $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

43. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin^2\left[\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dx$ расходится.

44. Найти площадь конечной части фигуры, ограниченной кривой $x^2y^2 = 4(x-1)$ и прямой, проходящей через ее точку перегиба.

45. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, осью Ox и двумя прямыми, параллельными оси Oy, проведенными через точки экстремума функции $y(x)$.

46. Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривыми $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

47. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

48. Найти площадь петли кривой $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.

49. Найти площадь фигуры, заключенной между внешней и внутренней частями кривой $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

50. Найти площадь общей части фигур, ограниченных кривыми $\rho = 3+\cos 4\varphi$ и $\rho = 2-\cos 4\varphi$.

51. Для кривой $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ найти площадь петли и площадь фигуры, заключенной между кривой и ее асимптотой.

52. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

53. Найти длину кривой $y = \sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

54. Найти длину дуги трактрисы $x = a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = a\sin t$ от ее точки $(0, a)$ до ее точки (x, y).

55. Найти длину кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

56. Доказать, что длина кривой $\rho = a \sin^m \frac{\varphi}{m}$ (m — целое число) соизмерима с a при m четном и соизмерима с длиной окружности радиуса a при m нечетном.

57. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении трактрисы $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$; $y = a \sin t$ вокруг ее асимптоты.

58. Вычислить объемы тел, ограниченных параболоидом $z = x^2 + 2y^2$ и эллипсоидом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

59. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс петли кривой $9ay^2 = x(3a - x)^2$.

60. Бесконечная дуга кривой $y = e^{-x}$, соответствующая неотрицательным значениям x, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить площадь поверхности, которая при этом получается.

61. Однородная прямоугольная пластина со сторонами a и b разбивается на две части дугой параболы, вершина которой совпадает с одной из вершин прямоугольника и которая проходит через его противоположную вершину. Найти центры тяжести обеих частей S_1 (верхней) и S_2 (нижней) прямоугольника (длина основания прямоугольника равна b).

62. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

63. Найти статический момент однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1 + x^2}$ и $y = x^2$, относительно оси Ox.

64. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = ax^3 - x^4$.

65. Доказать, что абсцисса и ордината центра тяжести однородного сектора, ограниченного двумя полярными радиусами и кривой, уравнение которой дано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, выражается так:

$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \cos \varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi}; \quad \eta = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \sin \varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi}.$$

66. Найти декартовы координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной правой петлей лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

67. Показать, что декартовы координаты центра тяжести дуги однородной кривой, уравнение которой дано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, выражаются так:

$$\xi = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}; \quad \eta = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}.$$

68. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}$ $\left(\text{от } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ до } \varphi_2 = \pi\right)$.

69. Найти момент инерции боковой поверхности конуса (радиус основания R, высота H) относительно его оси симметрии.

70. Криволинейная трапеция, ограниченная кривыми $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$ вращается: 1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy. Вычислить момент инерции получающегося тела относительно оси вращения.

71. Квадрат вращается вокруг своей оси, лежащей в его плоскости и проходящей через одну из его вершин. При каком положении оси относительно квадрата объем получающегося тела вращения будет наибольшим. Тот же вопрос для треугольника.

Указание. Воспользоваться теоремой Гульдина.

72. Радиусы оснований усеченного прямого кругового конуса равны R и r, высота h, плотность μ. С какой силой действует он на материальную точку массы m, помещенную в его вершине?

73. С какой силой материальная ломаная $y = |x| + 1$ притягивает материальную точку массы m, находящуюся в начале координат (линейная плотность равна μ)?

74. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную m. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли (сопротивлением воздуха пренебречь)?

75. Треугольная пластинка, основание которой $a = 40$ *см*, а высота $h = 30$ *см*, вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ *сек*$^{-1}$. Найти кинетическую энергию пластинки, если толщина ее $d = 0{,}2$ *см*, а плотность материала, из которого она изготовлена, $\mu = 2{,}2$ *г/см*^{3}.

76. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h.

а) Вычислить силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

б) Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется вершина, а основание будет параллельно поверхности воды.

77. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b ($a > b$) погружена в жидкость под углом α к поверхности жидкости. Большая сторона параллельна поверхности и лежит на глубине h. Вычислить давление жидкости на каждую из сторон пластинки, если удельный вес жидкости d.

78. В дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R = 43$ *см*, образовалась пробоина площадью $S = 0{,}2$ *см*^{2}. Через сколько времени вода, наполняющая котел, вытечет из него?

79. 2 *кг* соли растворяются в 30 *л* воды. Через 5 *мин* растворяется 1 *кг* соли. Через сколько времени растворяется 99% первоначального количества соли (скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией насыщенного раствора, которая равна 1 *кг* на 3 *л*, и концентрацией раствора в данный момент)?

80. Вычислить $\ln 10 = \int\limits_1^{10} \frac{dx}{x}$, используя правило Симпсона при $n = 10$. Найти модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным. Сравнить с табличным значением.

ОТВЕТЫ

Глава I

9. $(n+1)!-1$. 10. $\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2-1)$.

11. $\frac{n^2(n+1)^2}{12}(2n^2+2n+1)$. 12. а) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

б) $\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$; в) $\frac{n}{5}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

13. а) $1-\frac{1}{n+1}$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

в) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$. 14. а) ± 2; б) $0\leqslant x<+\infty$.

17. а) $-\frac{1}{9}$; б) 1. 18. а) $-\frac{1}{3}$; б) 0. 28. $|p|<1$; $\frac{p}{1-q}$.

38. $l=-1$; $L=1$. 39. $l=0$; $L=1$. 40. $l=0$; $L=4$.

41. $l=-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$; $L=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. 42. $l=0$; $L=2$.

43. $l=-1$; $L=1$. 44. $l=0$; $L=\frac{1}{\pi-1}$. 45. $l=-1$; $L=1$.

46. $l=-3$; $L=3$. 49. 2. 50. Если $n-2k$, то $x<1$, $2j<x<2j+1$ $(j=1, 2, \ldots, k-1)$, $x>n$; если $n=2k-1$ $(k>1)$, то $2j-1<x<2j$ $(j=1, 2, \ldots, k-1)$, $x>n$. 51. $x\leqslant 1$, $2k<x\leqslant 2k+1$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, $x>2n$. 52. $1<x<+\infty$. 53. $\frac{313}{280}$. 54. $\frac{2}{3}\sqrt[6]{a}$. 55. $\frac{\alpha-1}{2}$. 56. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2m}$.

57. $\sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m}$. 58. $\frac{1}{4m}$. 59. $\frac{1}{m(p+1)}$. 60. $\frac{x}{p+1}$. 61. $e^{\frac{1}{p+1}}$.

62. $l=-2$; $L=2$. 63. $l=0$; $L=a^2+b^2$. 64. $l=-2$; $L=1$.

65. $l=0$; $L=e$. 66. $l=e$; $L=e+1$. 67. $l=\frac{e}{3}$; $L=\frac{e}{2}$. 81. При $-\infty<x<0$ функция выпукла вверх, а при $0<x<+\infty$ — вниз. 82. Выпукла вниз. 83. При $0\leqslant x<+\infty$ выпукла вниз. 84. Выпукла вниз при $-\infty<x<-\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}}<x<+\infty$; выпукла вверх при $|x|<\sqrt{\frac{1}{3}}$. 85. Выпукла вниз. 86. Выпукла вверх. 87. Выпукла вниз при $x>0$; выпукла вверх при $x<0$. 88. Выпукла вверх при $2k\pi<x<2k\pi+\pi$; выпукла вниз при $2k\pi+\pi<x<(2k+2)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 89. Выпукла вниз. 107. В точках $x=n$ $(n=1, 2, \ldots)$ функция непрерывна справа. 109. $x=\pm 1, \pm 2, \ldots$ — точки раз-

рыва первого рода. **110.** Непрерывна. **111.** Непрерывна. **113.** $x = \pm 1$ — точки разрыва первого рода. **114.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки устранимого разрыва. **115.** $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки устранимого разрыва. **116.** $x = 0$ — точки разрыва второго рода. **117.** $x = \frac{2}{\pi(1+2k)}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва второго рода. **120.** Равномерно непрерывна. **121.** а) Равномерно непрерывна; б) равномерно непрерывна. **122.** а) При $\alpha \leqslant 1$ равномерно непрерывна; б) равномерно непрерывна при $0 \leqslant \alpha$; в) равномерно непрерывна при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. **123.** а) Равномерно непрерывна; б) не является равномерно непрерывной.

Глава II

1. $f'(k) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $f'(x)$ не существует, если $x \neq k$.

2. а) $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & \pi \leqslant x < +\infty; \end{cases}$ б) $f'(x) = \begin{cases} 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}; \\ -\sin x, & \frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi; \\ 0, & 2\pi \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

3. $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ \text{не существует} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

4. а) $f'(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 4x^3, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f'(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ 2e^{2x}, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

в) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & 0 < x < 1; \\ 2xe^{x^2}, & |x| > 1; \\ 0, & -1 < x < 0; \end{cases}$ г) $f'(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ e^{e^x + x}, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

5. $f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{x} - \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}$, $x \neq 0$; $f'(0) = 0$. **6.** а) $f'(x) = x$; б) $f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}$.

7. а) $y'_{\pm}(x) = -\dfrac{\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{2\pi}{x}\right)}{x^2}$, $x \neq \frac{2}{k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

$y'_{+}\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^k \frac{k^2}{4}$; $y'_{-}\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{k+1} \frac{k^2}{4}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

б) $y'_{\pm}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}; \\ -2\cos 2x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ $y'_{+}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'_{-}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;

в) $y'_{\pm}(0) = \pm \frac{\ln 2}{2}$; $y'_{+}(1) = 2$; $y'_{-}(1) = 2\ln 2$; $y'_{+}(2) = 8\ln 2$; $y'_{-}(2) = 4$;

$y'_{+}(-1) = -2\ln 2$; $y'_{-}(-1) = -2$; $y'_{+}(-2) = -4$; $y'_{-}(-2) = -8\ln 2$;

$y'_{\pm}(x) = \begin{cases} \frac{\ln 2}{2} 4^{|x|} \operatorname{sgn} x, & 0 < |x| < 1, \quad 2 < |x| < +\infty; \\ 2x, & 1 < |x| < 2. \end{cases}$

8. $f'_{\pm}(x) = 2\pi x [x^2] \cos \pi x^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sin \pi x^2)$, $x \neq \pm\sqrt{k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$;

$f'_{\pm}(\pm\sqrt{k}) = \pm 2\pi k^{\frac{3}{2}}$; $f'_{\mp}(\pm\sqrt{k}) = \mp 2\pi(k-1)\sqrt{k}$.

9. а) $f'_{\pm}(x) = \dfrac{2^{\frac{x}{1-x}} \ln 2}{(1-x)^2 \left(1 - 2^{\frac{x}{1-x}}\right)^2}$ $(x \neq 0;\ x \neq 1)$; $f'_{+}(1) = 0$; $f'_{-}(1) = +\infty$;

б) $f'_{\pm}(x) = \dfrac{2^{\frac{x}{1-x}} \ln 2}{(1-x)^2 \left(1 - 2^{\frac{x}{1-x}}\right)^2}$ $(x \neq 0;\ x \neq 1)$; $f'_{+}(1) = +\infty$; $f'_{-}(1) = 0$.

10. а) $f'_{\pm}(x) = e^{|x|} \operatorname{sgn} x$ $(x \neq 0)$; $f'_{\pm}(0) = \pm 1$;

б) $f'_{\pm}(x) = -e^{-|x|} \operatorname{sgn} x$ $(x \neq 0)$; $f'_{\pm}(0) = \mp 1$.

11. $f'_{\pm}(x) = 0$ $(x \neq 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$; $f'_{+}(k) = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$; $f'_{-}(k) = +\infty$ $(k = 2,\ 3,\ \ldots)$. 12. $y'_{\pm}(k) = 0$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

13. а) $f'_{\pm}(0) = \mp \infty$; б) $f'_{\pm}(k\pi) = \pm \infty$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

14. $\alpha + \beta > \dfrac{1}{2}$; при $\beta > 0$ и любом α.

15. $f_{k+1}(x) = x f_k(x) + \dfrac{1}{n} x (1 - x) f'_k(x)$.

16. а) $D^{\pm} f(x) = D_{\pm} f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $D^{+} f(0) = 1$,

$D^{-} f(0) = 0$, $D_{+} f(0) = -1$, $D_{-} f(0) = 0$;

б) $D^{\pm} f(x) = D_{\pm} f(x) = a \sin^2 \dfrac{1}{x} + b \cos^2 \dfrac{1}{x} + \dfrac{b-a}{x} \sin \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$;

$D^{\pm} f(0) = \max(a,\ b)$, $D_{\pm} f(0) = \min(a,\ b)$.

17. $D'_{20}(x) = a^{59} (1 - b) \dfrac{40a'b + b'a}{(1 - ba^{40})^2} + a^{19} \dfrac{20a'(1 - b) - b'a}{1 - ba^{40}}$,

$a = \dfrac{5 - x^2 + \sqrt{9 - 10x^2 + x^4}}{4}$, $b = \dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{a} - 2 \right)^2$.

19. $f'(x) = \max(1, x^2)$. 20. $f'(x) = [x]\,|\sin \pi x|$. 21. $f'(x) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа. 23. 3. 24. $\dfrac{12}{5}$. 25. -1. 28. $y'(0) = 0$.
29. $y'(0) = -1$. 31. $dy(0) = 0$. 32. $\Delta y(0) = \pm 2$, $dy(0)$ не существует.
33. $\Delta y(0) = \pm 4$, $\pm 4\sqrt{3}$, 206, -250, 18, 26, $22 \pm 4\sqrt{3}$; $dy(0) = 75$.
34. $dy(0) = 0{,}2dx$. 35. $dy(0) = k\pi dx$ $(dx < 0;\ k = 0,\ \pm 1,\ \ldots)$. 36. $dy(0) = 3dx$.
37. $dy(0) = 2dx$. 38. $d_{\pm} y(0) = \pm dx$. 39. $d_{+} y(0) = -dx$. 40. $d_{\pm} y(0) = 0$.
41. $y''(0) = 0$; да; $m < 0$. 42. $\alpha > 4$.

43. $y'' = \begin{cases} -\cos x, & \text{если } |x| > 2; \\ e^x, & \text{если } -2 < x < \ln 2; \\ e^x (\cos e^x - e^x \sin e^x), & \text{если } \ln 2 < x < 2. \end{cases}$

44. $f''_{\pm}(0) = -\dfrac{1}{3}$. 46. $d^2 y(0) = \pi (dx)^2$ $(\alpha = 2)$, $d^2 y(0) = 0$ $(\alpha > 2)$,

47. $y''_{x^2}(0) = 2$. **48.** $y''_{x^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{если } -\infty < t < -1; \\ \dfrac{t}{2\pi}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}, & \text{если } |t| < 1; \\ -\dfrac{1}{4t^3}, & \text{если } t > 1. \end{cases}$

49. $y''_{x^2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{(2-\pi)^2}{4}$. **50.** $\sum\limits_{i=1}^{10} i^{100}x^i$. **51.** $y'(0) = \pm 1$, $y'(0) = 0$.

52. $y^{(50)}(0) = 26 \cdot 27 \ldots 50$. **53.** 0. **54.** 0. **55.** $\pm \dfrac{3}{2^{50}} 95!!$ **58.** $n^{\frac{n}{1-n}}, \dfrac{1}{2}$.

62. Нет. **64.** а) нет; б) да; в) да. **67.** Возрастает. **68.** Убывает. **69.** При $0 < t < 1$ функция убывает, при $t < 0$ и $t > 1$ — возрастаст. **70.** Каждая ветвь функции возрастает. **74.** Перегиба нет. **75.** При $0 < t < e^{-1}$ и $t > e$ — выпуклость вверх; при $e^{-1} < t < e$ — выпуклость вниз. **76.** Выпуклость вниз. **77.** Выпуклость вверх. **78.** При $0 < \varphi < \varphi^*$ — выпуклость вниз; при $\varphi^* < \varphi < 1$ — выпуклость вверх, где $\operatorname{tg}\varphi^* = \dfrac{1-2\varphi^*}{\varphi^* - \varphi^{*2}}$. Перегиба нет. **79.** Слева от точки $x = -1$ выпуклость вниз, справа — вверх. **83.** Вообще говоря, нет. **84.** 0. **85.** $-\dfrac{8}{525}$. **86.** $e^{-\frac{1}{12}}$. **87.** e. **88.** e^{-11}. **89.** 0. **90.** $f(x) = o(x^3)$. **91.** $f(x) = 1 + o(x^3)$; да. **92.** $o(x^{10})$; да, если $x \neq 0$. **93.** $f(x) = o(x^2)$. **94.** $y_1 = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$; $y_2 = -2 + \dfrac{9}{2}x - \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$. **95.** $y(x) = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{26}{81}x^3 + o(x^3)$.

97. $f(x) = 1 + \dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3$. **98.** $f(x) = \dfrac{f^{(IV)}(\xi)}{4!}x^4$; да.

99. $y_1 = 1 - \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{32} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{y_1^{(IV)}(\xi_1)}{4!}x^4$, $y_2 = -1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{32} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{y_2^{(IV)}(\xi_2)}{4!}x^4$. **100.** $A = \dfrac{4}{15}$, $B = \dfrac{3}{5}$, $n = 7$. **101.** $A = -\dfrac{17}{60}$, $B = -\dfrac{9}{20}$, $n = 7$. **102.** $A = \dfrac{1}{6}$, $B = \dfrac{2}{3}$, $n = 4$. **103.** $A = \dfrac{k+1}{2k}$, $B = \dfrac{k-1}{2k}$, $n = 3$.

104. $A = C = \dfrac{1}{2}$, $B = 1$, $n = 4$. **105.** $y = x + o(x^6)$. **106.** $-\dfrac{\pi}{4}$.

107. а) $y_{\max} = 1$; б), в) экстремума нет; г) $y_{\min} = 0$. **108.** При $x = 0$ и $x = 1$ минимум $y = 0$; при $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ максимум $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

109. При $x = 0$ минимум $y = 2$. **110.** При $x = 2k\pi$ максимум $y = 1$. **111.** При $x = 0$ минимум $y = 0$. **112.** $y_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ при $x = \dfrac{3}{4}$. **113.** При $x = 0$ минимум

$y = -1$; при $x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{31}}$ максимум $y = -\dfrac{3}{\sqrt[3]{31}}$. **114.** Нет. **115.** $f_{\text{нб.зн.}} = \sqrt{2}e^{-\pi}$. **116.** $f_{\text{нм.зн.}} = 0$. **117.** $\inf f(x) = -1$, $\sup f(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}}$.

118. $\inf f(x) = \begin{cases} \sin 1 - a - 1, & \text{если } -\infty < a \leqslant -1; \\ -\sin a, & \text{если } -1 \leqslant a \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant a \leqslant 1 + \sin 1; \\ a - 1 - \sin 1, & \text{если } 1 + \sin 1 \leqslant a < +\infty. \end{cases}$

$\sup f(x) = \begin{cases} 1 + a + \sin 1, & \text{если } -\sin 1 \leqslant a < +\infty; \\ 1 - a - \sin 1, & \text{если } -\infty < a \leqslant -\sin 1. \end{cases}$

119. а) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \sin x, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi; \\ \operatorname{tg} x, & \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \quad \pi \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

Функция $f(x)$ — 2π — периодическая.

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant 0, \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \\ \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \quad \dfrac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}; \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \quad \dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4}. \end{cases}$

120. Спиралевидная кривая, лежащая на конусе $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **121.** Двойная 2π — периодическая (по t) кривая, лежащая на параболическом цилиндре $y = \dfrac{2}{a}x^2 - a$. В проекции на плоскость OYZ — петлевидная кривая, симметричная относительно оси OY. **122.** Отрезок $|x| \leqslant 1$. **123.** Внутренняя часть $\dfrac{3}{4}$ квадрата. **124.** Внутренняя часть прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant 5$, $-3 \leqslant y \leqslant 2$ с выброшенным полукругом: $(\sqrt{x})^4 + y^2 \leqslant 1$. **125.** Плоскость треугольника с вершинами: $M_1(-1, 0)$; $M_2(0, 1)$; $M_3(1, 0)$.

Глава III

1. $-\dfrac{1}{2}\ln^2\dfrac{1+x}{x}$. **2.** $\dfrac{1}{6}\ln^3(1-x^2)$. **3.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **4.** $\dfrac{8-5x^2}{15\sqrt{(x^2+1)^5}}$. **5.** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^8-x^4+1}{x^4}$. **6.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x^4+1}{x^2}$. **7.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right) - \dfrac{\pi}{2} \times \operatorname{sgn} x$. **8.** $\dfrac{x^3}{3} - x - \dfrac{4}{3}$, если $-\infty < x < 1$; $x - \dfrac{x^3}{3}$, если $-1 \leqslant x < 1$; $\dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{4}{3}$, если $1 \leqslant x < +\infty$. **9.** $\dfrac{(-1)^k}{2}(x-k\pi)^2 + \dfrac{\pi^2}{8}(-1(-1)^k)$, где $k = \left[\dfrac{2x+\pi}{2\pi}\right]$.

10. $\frac{1}{2}|x-2k\pi|(x-2k\pi)+k\pi^2$, где $k=\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. 11. $e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

12. $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}$. 13. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|$.

14. $\ln(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4+x^2+1})$. 15. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+3x^2+1}$.

16. $\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. 17. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

18. $\left(\frac{\pi}{2}x-2\sqrt{1-x^2}\right)\arcsin x-x\arcsin^2 x+2x+\sqrt{1-x^2}$. 19. $\frac{x-2}{x+2}e^x$.

20. $\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\sin x-\frac{1}{2}(x-1)^2\cos x\right]e^x$.

21. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. 22. $\frac{1}{4}\ln(x^4+1)-\frac{x^4}{4(x^4+1)}$.

23. $-\frac{x^6}{6(x^3-1)^2}-\frac{x^3}{3(x^3-1)}+\frac{1}{3}\ln|x^3-1|$.

24. $\frac{-x^5}{8(x^4-1)^2}-\frac{5x}{32(x^4-1)}+\frac{5}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{5}{64}\operatorname{arctg}x$.

25. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|$. 26. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}$.

27. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}-\frac{7}{4(x-1)^2}$.

28. $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}$.

29. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-2}\right|$.

30. $x-\ln|x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn}x$. 31. $-\frac{x^3+x}{x^3+x+1}$.

32. $-\frac{9x^2+10x+7}{(x+1)(x^2+x+1)}$. 33. $\frac{x}{x^6+1}$. 34. $\frac{x+8}{x^8+1}$ (весь интеграл).

35. $2\ln|\sqrt{x+1}-1|-\frac{x+1}{(\sqrt{x+1}-1)^2}-\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$.

36. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}$. 37. $4\sqrt{\sqrt{x+2}-1}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}}$.

38. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{|x|}$. 39. $\frac{3}{9}\arcsin x-\frac{2x^3+3x}{8}\sqrt{1-x^2}$.

40. $2(x^3+1)\sqrt{x^2+x+1}+2\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

41. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{2}(x+1)}\right|-\frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

42. $\dfrac{(3x+8)\sqrt{x^2+1}}{8(x+2)}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$.

43. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\dfrac{\sqrt{3(1+x+x^2)}-(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{1-x-x^2}}+\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$.

44. $\ln\left|\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^4+1}}{4}\right|$. 45. $\dfrac{-t^5}{10}+\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t}{2}$, где $t=\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^4}}$.

46. $\dfrac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. 47. $-\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{12}\operatorname{ctg}^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

48. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right|+\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)$.

49. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right|+\dfrac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}-2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}-\dfrac{1}{5\sqrt{\sqrt{5}+2}}\times$
$\times\ln\left|\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{2}\cos t}\right|$, где $t=x-\dfrac{\pi}{4}$.

50. $\dfrac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)}+\dfrac{4}{15\sqrt{15}}\arcsin\dfrac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x}$.

51. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|-\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{3\sin^3 x}$. 52. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}-\cos 2x}{\sin 2x}\right|$.

53. $\arcsin(\sin x-\cos x)$. 54. $\dfrac{4x}{25}+\dfrac{3}{25}\ln|4\cos x+3\sin x|$.

55. $-\dfrac{e^{\frac{x^2}{4}}}{2(e^{x^2}+1)}+\dfrac{1}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}+1}{e^{\frac{x^2}{2}}-\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}+1}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{x^2}{4}}}$.

56. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. 57. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

58. $-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt[4]{\cos 2x}+\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}-\cos x}\right|$.

59. $\operatorname{arctg}\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}$. 60. $x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. 61. $\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$.

62. $\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$.

Глава IV

1. $\ln 2$. 4. $\dfrac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a))$. 5. $\dfrac{(b-a)^2}{24}(f'(b)+2f'(a))$.

7. $8+\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$. 8. $\dfrac{\sqrt{6}}{27}+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{48}$. 9. $\dfrac{\pi}{6}$. 10. $4-\pi$. 11. $\dfrac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$.

12. $x=2$. 13. $2\ln 2$. 14. $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)=f(1)\approx 1{,}66$; $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\approx$
$\approx -0{,}11$. 15. $y_{\min}=y(1)=-\dfrac{17}{12}$; точки перегиба: $\left(2,-\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{112}{81}\right)$.

19. а) Выше; б) тот же самый; в) ниже; г) выше. 22. $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$. 23. При $a=e$. 30. Сходится. 31. Расходится. 32. Расходится. 33. Расходится. 34. Сходится. 35. Расходится. 36. Расходится. 37. Сходится абсолютно при $n>1$; при $n\leqslant 1$ расходится. 38. Сходится. 44. $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$.

45. $\frac{3}{e}(e^3-4)$. 46. $\sqrt{2}-1$. 47. $6\pi a^2$. 48. $\frac{72\sqrt{3}}{5}$. 49. $\frac{a^2(5\pi+18\sqrt{3})}{32}$.

50. $\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$. 51. $2-\frac{\pi}{2}$, $2+\frac{\pi}{2}$. 52. $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$. 53. 2.

54. $a\ln\frac{a}{y}$. 55. $\frac{4(a^2+ab+b^2)}{a+b}$. 57. $\frac{2\pi a^3}{3}$. 58. $V_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\frac{11}{3}\right)$; $V_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\frac{11}{3}\right)$. 59. $3\pi a^2$. 60. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

61. $\left(\frac{3a}{5},\ \frac{3b}{8}\right)$; $\left(\frac{3a}{10},\ \frac{3b}{4}\right)$. 62. $\left(\frac{a}{5},\ \frac{a}{5}\right)$. 63. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$.

64. $\left(\frac{5}{8}a,\ 0\right)$. 66. $\left(\frac{\pi\sqrt{2}a}{8},\ 0\right)$. 68. $\left(-\frac{a}{5}\,\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}},\ \frac{a}{5}\,\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}\right)$.

69. $\frac{1}{2}MR^2$, где M — масса боковой поверхности конуса.

70. $I_x=\frac{\pi(e^4-1)}{8}$, $I_y=4\pi(3-e)$. 71. Ось вращения должна быть перпендикулярна к диагонали квадрата; ось вращения должна быть перпендикулярна к медиане треугольника. 72. $2\pi\gamma m\mu h\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\right)$, где γ — гравитационная постоянная. 73. $2\gamma m\mu$. 74. $\frac{g^2M^3}{6m^2}$. 75. $\frac{ah^3d\omega^2\mu}{24}\approx 0{,}05$ *кГм*.

76. а) $\frac{ah^2}{6}$, б) в два раза. 77. $abd\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)$. 78. ≈ 1 *час* 6 *мин* 53 *сек*.

79. $\approx 37{,}3$ *мин*. 80. $\ln 10\approx 2{,}31$; $M=\frac{1}{\ln 10}\approx 0{,}433$.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава IV
Определенный интеграл

Ответы

Ляшко Иван Иванович,
Боярчук Алексей Климентьевич,
Гай Яков Гаврилович,
Головач Григорий Петрович

Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1.

Введение в анализ,
производная,
интеграл

Пособие для студентов университетов и технических высших учебных заведений

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство

Редактор *О. С. Дзюба.* Литредактор *Н. М. Чеховой* Обложка художника *В. П. Кузя.* Художественный редактор *И. Р. Ойхман.* Технический редактор *Л. И. Швец.* Корректор *Т. Н. Гиндич.*

Сдано в набор 16.05.1974 г. Подписано к печати 24.09.1974 г. Формат бумаги 60х90$^1/_{16}$. Бум. тип. № 2. Печ. л. 42,5. Уч.-изд. л. 39,4 Тираж 24 000. Изд. № 1814. БФ. 31124. Цена 1 руб. 51 коп. Зак. № 4-2403.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев, 54, Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3 на Харьковской книжной фабрике «Коммунист» республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Харьков, ул. Энгельса, 11

1 руб. 51 коп.